机构性能指标理论与仿真

$$\frac{\|\delta a\|}{\|a\|} \leqslant k\|G\|\|G^{+}\| + l\|H\|\|H^{+}\|$$

$$\frac{\|\delta a\|}{\|a\|} \leqslant k\|G\|\|G^{+}\| + l\|H\|\|H^{+}\|$$

郭希娟 著

科学出版社
www.sciencep.com

机构性能指标理论与仿真

郭希娟 著

河北省教育厅学术著作出版基金资助出版

科学出版社
北京

内 容 简 介

如何衡量机构的动力学性能，优化机构的设计，一直是机器人技术领域的一个热点问题。本书系统地阐述了一套同时基于一阶 Jacobian 矩阵和二阶 Hessian 矩阵的机构动力学性能指标体系，并通过一系列实际串、并联机构的动力学性能分析，阐述了指标的具体应用及其在衡量和优化机构动力学性能方面的可行性。

本书内容系统全面，从最基础的数学知识引出性能指标的推导过程，并结合大量的实例分析阐述了指标的应用方法，对于从事机构动力学研究的人员具有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

机构性能指标理论与仿真/郭希娟著. —北京：科学出版社，2010
ISBN 978-7-03-029225-4

Ⅰ. 机… Ⅱ. 郭… Ⅲ. 机器人-机构动力分析 Ⅳ. TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 199509 号

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 10 月第 一 版 开本：B5 (720×1000)
2010 年 10 月第一次印刷 印张：21 1/4
印数：1—3 000 字数：413 000

定价：60.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着机器人技术的发展和工业生产的需要，机器人技术正向着高速度、高精度的方向发展，这对机构的动力学性能提出了更高的要求，因此如何衡量和优化机构的动力学性能成为机器人技术领域的热点问题。影响机构动力学性能的因素很多，其中机构的二阶影响系数 Hessian 矩阵是一个关键的因素。以前所提出的衡量机构动力学性能的指标都是基于一阶 Jacobian 矩阵的，没有考虑二阶Hessian矩阵对机构动力学性能的影响。本书系统地阐述了一套同时基于一阶Jacobian矩阵和二阶 Hessian 矩阵的机构动力学性能指标体系，并对一系列实际串、并联机构的动力学性能进行分析，阐述了指标的具体应用及其在衡量和优化机构动力学性能方面的可行性。

本书包含了作者十余年来在机构动力学性能研究方面的成果，共包括四篇 17 章。其中，第一篇为基础理论篇，简要阐述了数学、机构学等基础理论知识，为后续指标的论述作了铺垫；第二篇为性能指标篇，系统地阐述了一套机构动力学性能指标，针对并联机构、串联机构及平面机构提出了相应的动力学性能指标；第三篇和第四篇为应用篇，利用上述指标分别对一系列的、典型的串联机构和并联机构的动力学性能进行了分析，阐述了指标的具体应用，并对机构进行了实体动力学仿真，验证了指标的可行性。

在此深深感谢我的启蒙导师黄真教授。正是黄老师把我带入了这一研究领域，黄老师渊博的知识、严谨的治学态度令我终生受益，我今天的进步和取得的成绩与黄老师的教导和关怀是分不开的。借此机会向给予我很多指点和帮助的熊有伦院士、加拿大 Ryerson 大学的奚风丰教授表示深深地感谢。同时也感谢朱思俊、刘爽、王震春、宁淑荣、张微微、杜熊、彭艳敏、刘金科、耿清甲、高永亮、张强、岳阔明、周凯、樊少帅、杨华兴、付燕平等学生多年来给予我的支持与帮助。最后感谢多年来所有给予我支持和帮助的同行和朋友，衷心地谢谢你们！本书还得到黄真教授河北省高层次特别人才支持计划项目的资助，在此一并致谢。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，敬请专家和读者批评指正。

作　者

2010 年 10 月于秦皇岛

目　录

第三篇 串联机构动力学性能实例分析与仿真

第四篇　并联机构动力学性能分析与仿真

第一篇　基础理论

第 1 章　数学基础理论

1.1　不等式的概念及性质

1. 不等式的概念[1]

表示不相等关系的式子，叫做不等式。例如，$5>3$，$a+1>a$，$2x-4>0$ 等，都是不等式。在不等式里，把不等号左侧叫做不等式的左边，把右侧叫做不等式的右边，左边和右边统称为不等式的两边。不等号开口的方向叫做不等号的方向。形式为 $a>b$ 及 $c>d$（或形式为 $a<b$ 及 $c<d$）的两个不等式叫做同向不等式。形式为 $a>b$ 及 $c<d$（或形式为 $a<b$ 及 $c>d$）的两个不等式叫做异向不等式。

不等式只有在实数集合内才有意义，因为虚数间没有大小的规定，所以不等式里面的数及文字所代表的数都要限定为实数。

2. 不等式的性质

① 若 $a>b$，则 $b<a$。
② 若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$。
③ 若 $a>b$，则 $a+c>b+c$。
④ 若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$；若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$。
⑤ 若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$。
⑥ 若 $a>b$，$c<d$，则 $a-c>b-d$。
⑦ 若 $a>b$，$c>d$，且 a，b，c，d 均为正数，则 $ac>bd$。
⑧ 若 $a>b$，$c>d$，且 a，b，c，d 均为正数，则 $a/d>b/c$。
⑨ 若 $a>b$，且 a，b 均为正数，则 $a^n>b^n$，n 是自然数。

1.2　矩阵的概念及性质

1. 矩阵的基本概念

$m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$）排成的数表称为 m 行 n 列矩阵，简称 mn 矩阵。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中,a_{ij} 称为该矩阵中的第 i 行、第 j 列元素。i 称为该元素的行下标,j 称为该元素的列下标。

2. 逆矩阵

设 A 是一个 n 阶矩阵,若存在 n 阶矩阵 P,使得

$$AP = PA = I_n$$

其中,I_n 为 n 阶(n 行 n 列)单位矩阵,则称 P 为 A 的逆矩阵,即为 A^{-1}。同理可得,A 也为 P 的逆矩阵。

若 A,B,C 均为 n 阶可逆矩阵,则具有如下性质:

① 逆矩阵唯一性,即若 B,C 均为 A 的逆矩阵,则 $B=C$。

② 转置矩阵可逆,且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$。

③ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

3. 矩阵的广义逆理论

设 $A\in C^{m\times n}$,如果存在矩阵 $B\in C^{m\times n}$,满足:

(1)$ABA=A$

(2)$BAB=B$

(3)$(AB)^{\mathrm{H}}=AB$

(4)$(BA)^{\mathrm{H}}=BA$ (1.2)

中的一部分或全部,则称 B 为 A 的伪逆矩阵[2],记作 $B=A^{-}$。当同时满足上述四条规则时,则称 B 为 A 的广义逆矩阵,记作 $B=A^{+}$。可见,广义逆矩阵为伪逆矩阵的特例,一个矩阵的伪逆矩阵可以有多个,但广义逆矩阵只有一个,即广义逆矩阵唯一。当矩阵 B 为矩阵 A 的广义逆矩阵时,矩阵 A 同样为矩阵 B 的广义逆矩阵,因此 A 和 B 互为广义逆矩阵。

同时满足 $BA=AB$ 的广义逆矩阵 B 称为矩阵 A 的逆矩阵。

设数域 C,$A\in C^{m\times n}$,$\lambda\in C$,则有如下性质[2]:

① $(A^{\mathrm{T}})^{-}=(A^{-})^{\mathrm{T}}$,$(A^{\mathrm{H}})^{-}=(A^{-})^{\mathrm{H}}$,其中,$A^{\mathrm{H}}$ 为 A 的共轭转置逆矩阵。

② 若 $\operatorname{rank}A=m=n$,则 $A^{-}=A^{-1}$ 且唯一。

③ $\operatorname{rank}A=m$,则 $AA^{+}=I_m$;$\operatorname{rank}A=n$,则 $A^{+}A=I_n$。

④ $(A^{+})^{+}=A$。

⑤ λ^+A^- 是 λA 的伪逆矩阵，其中 $\lambda^+=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ 0, & \lambda=0\end{cases}$。

⑥ 设 $A\in C^{m\times n}$，$A=BC$ 为 A 的最大秩分解，则 $A^+=C^+B^+$。　　(1.3)

4. 矩阵范数的概念与性质

设 A,B 为数域 F 上的两个 $m\times n$ 矩阵，若映射 $\|\cdot\|: F^{m\times n}\rightarrow R$ 满足：

(1)非负性：$\|A\|>0,\forall 0\neq A\in F^{m\times n}$

(2)齐次性：$\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|,\forall \lambda\in F,A\in F^{m\times n}$

(3)三角不等式：$\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|,\forall A,B\in F^{m\times n}$

(4)乘积不等式：$\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|,\forall A,B\in F^{n\times n}$　　(1.4)

则称映射 $\|\cdot\|$ 为定义在空间 $F^{m\times n}$ 上的一个矩阵范数。范数一般包括一阶矩阵范数，二阶矩阵范数和无穷矩阵范数。在下文应用到的均为二阶矩阵范数，其定义形式为

$$\|A\|_2 \triangleq \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^P\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.5}$$

向量范数的定义与矩阵范数相仿，是向量 X 在线性空间 $V(C)$ 上的一种映射关系。

性质 1　设 $A,B\in F^{m\times n}$，则

$$\begin{aligned}\|0_{m\times n}\| &= 0\\ \|A-B\| &\geqslant \big|\,\|A\|-\|B\|\,\big|\end{aligned} \tag{1.6}$$

性质 2　设 $\|X\|$ 是 F^n 上的向量范数，$\|A\|$ 是 $F^{m\times n}$ 上得矩阵范数，则

$$\|AX\|\leqslant\|A\|\,\|X\| \tag{1.7}$$

5. 矩阵的分解与分块

为了理论分析，计算方法和应用的需要，我们常常要寻求一个矩阵在不同意义下的分解形式：把矩阵分解为几个矩阵的乘积或者是若干矩阵的和。这种分解往往既能反映出原矩阵的某些数值特征，又能提供分析问题所需的简化形式[2]。

如果矩阵 $A\in C^{m\times n}$，则存在可逆矩阵 $P\in C^{m\times m}$，$Q\in C^{n\times n}$，使

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q \tag{1.8}$$

其中，r 为 A 的秩；I_r 为 r 阶单位矩阵。

常见的矩阵分解有三角分解、满秩分解等。在矩形阵列内，引入一些纵横虚线，将其划分成较小的元素块，常会带来一些方便，如

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{bmatrix}\text{可分为}A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&3&4\\5&6&7&8\\\hdashline 9&10&11&12\\13&14&15&16\end{array}\right]\text{四块来表示。}$$

则矩阵 A 可表示为

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$$

一般而言，将矩阵 A 分块为 $A=\left[\begin{array}{cc:c}A_{11}&A_{12}&A_{1n}\\A_{21}&A_{22}&A_{2n}\\\hdashline A_{m1}&A_{m2}&A_{mn}\end{array}\right]$，每个子块 A_{ij} $(i\leqslant m, j\leqslant n)$ 的行的数目对每一个 i 均应相同，同样列的数目对每一个 j 也均应相同。

6. Hessian 矩阵

Hessian 矩阵[3]对机构动力学性能有着重要的影响，因此，这里简单介绍其定义。

设 n 元函数 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 点二次可微，将 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 点的二阶偏导按如下方式组成矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$，即

$$\nabla^2 f(\bar{x})=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1^2}&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_1\partial x_n}\\\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2\partial x_1}&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2^2}&\cdots&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_2\partial x_n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n\partial x_1}&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n\partial x_2}&\cdots&\dfrac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}\tag{1.9}$$

则称 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 是函数 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 点的 Hessian 矩阵，并记 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 为 $H(\bar{x})$。

显然，当 $f(x)$ 二阶连续可微时，其 Hessian 矩阵 $\nabla^2 f(\bar{x})$ 是对称矩阵。

1.3　李代数的基本概念

李代数起源于由线性变换构成的向量空间，并且这个空间被赋予一个通常既不交换又不结合的新运算：$[x,y]=xy-yx$（右边的运算是通常的线性变换乘法），也可以用一些公理抽象地描述这一类代数系。

李代数[4]　在域 F 上的一个向量空间 L 里，有一个运算 $L\times L\rightarrow L$，记为 $(x,y)\mapsto[xy]$，如果满足以下公理：

(L1)方括号运算是双线性的

(L2) $[xx]=0$ 对 L 内所有的 x

(L3) $[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0\ (x,y,z\in L)$　(1.10)

则这个运算称为 x 和 y 的方括号或换位子，且称 L 为 F 上 Lie 代数。

公理(L3)称为 Jacobian 等式，如果把(L1)和(L2)应用于 $[x+y,x+y]$，即可得到反交换性

(L2′) $[xy]=-[xy]$

如果存在向量空间的同构 $\phi:L\to L'$，它对 L 内所有 x,y 都满足 $\phi([xy])=[\phi(x)\phi(y)]$，则称 F 上两个李代数 L 和 L' 是同构的（且称 ϕ 为李代数的同构）。显然，可类似地定义 L 的（李）子代数，若 K 是 L 的子空间，并且只要 $x,y\in K$，即有 $[xy]\in K$，则称 K 为 L 的子代数。特别的，K 关于它的内在运算本身就是一个李代数。

1.4　集合的基本概念及性质

集合是数学中的一个原始概念。正如几何中的点、线、面、体一样，无法用更简单的概念给予精确定义，只能用它的同义语或与之等价的概念作适当的描述。这样的定义，也可以称为描述性定义[5]。

任何具有某种属性的具体的或抽象的事物（研究对象），把它们作为一个整体看待，这个整体就叫做一个集合。例如“一班学生”的“班”、“一队人马”的“队”等都是一些具体对象组成的集合。组成集合的每一个事物，叫做这个集合的元素。

我们常用大写拉丁字母 $A,B,M,N,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素。

当事物 a 是某集合 A 的一个元素时，我们就说元素 a 属于集合 A，并记作 $a\in A$。

当对象 b 不是某集合 B 的元素时，我们就说元素 b 不属于集合 B，并记作 $b\notin B$。

设有两个集合 A 和 B，若属于集合 A 的每个元素也同时属于集合 B，即若对任一元素 $a\in A\Rightarrow a\in B$，则称集合 A 是集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$。

当 $A\subseteq B$，但 $B\not\subset A$，即 B 至少包含一个不属于 A 的元素时，则称 A 为 B 的真子集，表示为 $A\subset B$。例如，偶数集是整数集的真子集。

设有集合 A 与 B，若关系 $A\subseteq B$ 及 $B\subseteq A$ 同时成立，称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$。换言之，当且仅当集合 A 与集合 B 由完全相同的元素组成时，才有 $A=B$。

设有二集合 A 与 B，则由属于集合 A 且属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集，简称交，记作 $A\cap B$。例如，设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e\}$，则 $A\cap B=\{c,d\}$。

设有二集合 A 与 B,则由属于集合 A 或属于集合 B 的所有元素组成的集合叫做 A 与 B 的并集,简称并,记作 $A\cup B$。例如,设 $A=\{a,b,c,d\}$,$B=\{c,d,e\}$,则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$。

1.5 变分法的基本概念及性质

对于任意定值 $x\in[x_0,x_1]$,可取函数 $y(x)$ 与另一可取函数 $y_0(x)$ 之差,$y(x)-y_0(x)$ 称为函数 $y(x)$ 在 $y_0(x)$ 处的变分[6],记作 δy,δ 称为变分符号。这时有

$$\delta y = y(x) - y_0(x) = \varepsilon\eta(x) \tag{1.11}$$

其中,ε 为一小参数;$\eta(x)$ 为 x 的任意函数。

由于可取函数都通过区间的端点,即它们在区间的端点的值都相等,故在区间的端点,任意函数 $\eta(x)$ 满足

$$\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0 \tag{1.12}$$

显然,函数 $y(x)$ 的变分 δy 是 x 的函数。注意函数变分 δy 与函数增量 Δy 的区别:函数的变分 δy 是两个不同函数 $y(x)$ 与 $y_0(x)$ 在自变量 x 取固定值时之差 $\varepsilon\eta(x)$;函数的增量 Δy 是由于自变量 x 取一个增量而使函数 $y(x)$ 产生的增量。如图 1.1 所示。

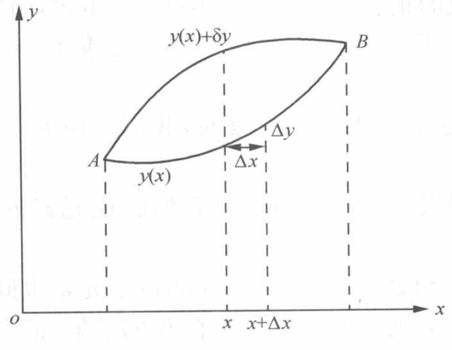

图 1.1 变分与微分的区别

性质 1.1 设 F,F_0,F_1,F_2 是 x,y,y' 的可微函数,则变分符号 δ 有下列运算性质