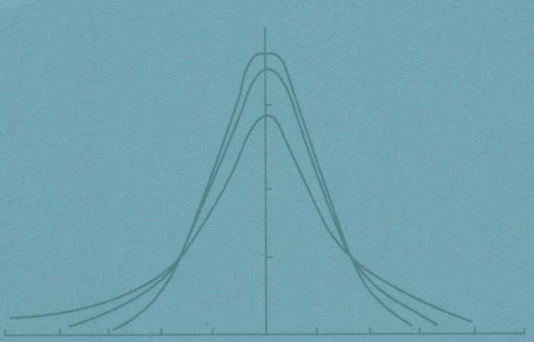
《概率论与数理统计》配套辅导书

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

学习参考

姚孟臣　编著



中国人民大学出版社

《概率论与数理统计》配套辅导书

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

学习参考

姚孟臣　编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习参考/姚孟臣编著.
北京：中国人民大学出版社，2010
ISBN 978-7-300-12688-3

Ⅰ.①概…
Ⅱ.①姚…
Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 176519 号

经济应用数学基础(三)
概率论与数理统计学习参考
姚孟臣 编著
Gailülun yu Shuli Tongji Xuexi Cankao

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京雅艺彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本	**版　　次**	2010 年 9 月第 1 版
印　　张	13.25	**印　　次**	2010 年 9 月第 1 次印刷
字　　数	247 000	**定　　价**	19.80 元

出 版 说 明

为适应公共数学教学形势的发展，我社邀请姚孟臣教授编写了《概率论与数理统计》.同时，为了满足广大读者尤其是自学读者的学习需要，我们邀请他编写了这本《概率论与数理统计》的学习参考读物.本书是一本教与学的参考书.

这里要特别指出的是，编写、出版学习参考书的目的是使读者更加清晰、准确地把握正确的解题思路和方法，扩大知识面，加深对教材内容的理解，及时纠正在解题中出现的错误，克服在一些习题求解过程中遇到的困难.读者一定要本着对自己负责的态度，先自己做教材中的习题，不要先看解答或抄袭解答，在独立思考、独立解答的基础上，再参考本书，并领会注释中的点评，总结规律、加深对基本概念的理解、提高解题能力.

《概率论与数理统计学习参考》各章内容均分为两部分.

(一) 习题解答与分析

该部分基本上对《概率论与数理统计》中的习题给出了解答，并结合教与学作了大量的分析和注释.通过这些分析和注释，读者可以深刻领会教材中的基本概念的准确含义，开阔解题思路，掌握解题方法，避免在容易发生错误的环节上出现问题，从而提高解题能力，培养良好的数学思维.

(二) 参考题(附解答)

该部分编写了一些难度略大且有参考价值的题目，目的是给愿意多学一些、多练一些的学生及准备考研的读者提供一些自学材料，也为教师在复习、考试等环节的命题工作提供一些参考资料.

本书给出了较多的单项选择题.单项选择题是答案唯一且不要求考核推理步骤的题型，因此，不论用什么方法(诸如排除法、图形法、计算法、逐项检查法，等等)，只要能找出正确选项即可.在必须使用逐项检查法时，只要检查到符合题目要求的选项，即可得出答案，停止检查，不必将所有选项全部检查完.但是选择题的各个选项，恰恰是概念模糊、不易辨别的内容或计算容易出错的环节，恰是需要读者搞清楚的问题，所以本书作为辅导书，在使用逐项检查法时，对四个选项均做了探讨，目的是使读者不仅能解答这个题目，而且能对这个题目有更全面、更准确的认识，通过总结规律，提高知识水平与解题技能.必须提醒读者，在参加考试时，一旦辨别出所要求的选项，即可停止探讨，不必继续往下讨论，以免浪费考试时间.

本书是我社出版的《概率论与数理统计》的配套参考书，但它本身独立成书，选

用其他概率论与数理统计教材的读者也可以选做参考书,同时也适合自学读者或准备考研的读者作为自学练习读物.

由于多方面原因,书中不妥之处在所难免,我们衷心欢迎广大读者批评指正.

中国人民大学出版社
2010 年 3 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

(一) 习题解答与分析

(A)

1. 写出下列随机试验的样本空间 Ω:

(1) 同时掷两枚骰子,记录两枚骰子点数之和;

(2) 10 件产品中有 3 件是次品,每次从中取 1 件,取出后不再放回,直到 3 件次品全部取出为止,记录抽取的次数;

(3) 生产某种产品直到得到 10 件正品,记录生产产品的总件数;

(4) 将一尺之棰折成三段,观察各段的长度.

解　(1) $\Omega=\{2,3,\cdots,12\}$;

(2) $\Omega=\{3,4,\cdots,10\}$;

(3) $\Omega=\{10,11,\cdots\}$;

(4) 分别用 x,y,z 表示三段的长度,我们有

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0,x+y+z=1\}.$$

2. 设 A,B 为两个事件,用文字写出下列事件:

(1) $\overline{A}+\overline{B}$;　(2) $\overline{A+B}$;　(3) $\overline{AB}$;　(4) $\overline{A}\,\overline{B}$.

解　(1) $\overline{A}+\overline{B}$ 表示"A 与 B 至少有一个不发生",也就是"A 与 B 不同时发生".

(2) $\overline{A+B}$表示"A 与 B 都不发生".

(3) $\overline{AB}$表示"A 与 B 不同时发生",即 $\overline{A}+\overline{B}$.

(4) $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示"A 与 B 都不发生",即$\overline{A+B}$.

3. 停车场有 10 个车位排成一行,现在停着 7 辆车.求恰有 3 个连接的车位空着的概率.

解　设 $A=$"恰有 3 个连接的车位空着".

因为这个试验样本空间共有 C_{10}^3个样本点,事件 A 包含 8 个样本点,这可由车位号 123,234,345,…,8910 得到.所以

$$P(A)=\frac{8}{C_{10}^{3}}=\frac{1}{15}.$$

4. 某产品 50 件，其中有次品 5 件. 现从中任取 3 件，求其中恰有 1 件次品的概率.

解 这是一个古典概型问题，设 $A=\{$其中恰有 1 件次品$\}$.

$$n=C_{50}^{3},\quad m=C_{5}^{1}C_{45}^{2},$$

故
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{5}^{1}C_{45}^{2}}{C_{50}^{3}}=\frac{99}{392}.$$

注意 无放回抽取时，建议使用组合公式来计算，这样较为方便.

5. 从一副扑克牌的 13 张梅花中，有放回地取 3 次，求三张都不同号的概率.

解 这是一个古典概型问题，设 $A=\{$三张都不同号$\}$.

$$n=13^{3},\quad m=P_{13}^{3},$$

故
$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{P_{13}^{3}}{13^{3}}=\frac{132}{169}.$$

注意 有放回抽取时，建议使用排列公式来计算，这样较为方便.

6. 某化工商店出售的油漆中有 15 桶标签脱落，售货员随意重新贴上了标签. 已知这 15 桶中有 8 桶白漆，4 桶红漆，3 桶黄漆. 现从这 15 桶中取 6 桶给一欲买 3 桶白漆，2 桶红漆，1 桶黄漆的顾客，那么这位顾客正好买到自己所需的油漆的概率是多少？

解 设 $A=$“6 桶油漆中恰好有 3 桶白漆，2 桶红漆，1 桶黄漆”.

$$P(A)=\frac{C_{8}^{3}C_{4}^{2}C_{3}^{1}}{C_{15}^{6}}=\frac{144}{715}\approx 0.201.$$

7. 10 个塑料球中有 3 个黑色，7 个白色，今从中任取 2 个，求在已知其中一个是黑色球的条件下，另一个也是黑色球的概率.

解 设 $A_i=$“两个球中有 i 个黑球”$(i=0,1,2)$，$B=$“其中有一个是黑球”，本题所求为 $P(A_2|B)$.

因为 $B=A_1+A_2$，A_1 与 A_2 互不相容，所以

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{C_{3}^{1}C_{7}^{1}}{C_{10}^{2}}+\frac{C_{3}^{2}}{C_{10}^{2}}=\frac{8}{15},$$

或
$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-P(A_0)=1-\frac{C_{7}^{2}}{C_{10}^{2}}=\frac{8}{15}.$$

又因为 $A_2B=A_2$，所以

$$P(A_2B)=P(A_2)=\frac{C_{3}^{2}}{C_{10}^{2}}=\frac{1}{15},$$

$$P(A_2 \mid B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{1}{8}.$$

8. 从 5 副不同的手套中任取 4 只,求这 4 只都不配对的概率.

解　这是一个古典概型问题,设 $A=\{4$ 只都不配对$\}$.

方法 1(使用排列方法)　由于考虑抽取时是有序的,因此

$$n = \mathrm{P}_{10}^{4},$$

这时 4 只都不配对,共有 $m=\mathrm{C}_{10}^{1}\cdot\mathrm{C}_{8}^{1}\cdot\mathrm{C}_{6}^{1}\cdot\mathrm{C}_{4}^{1}$ 种情况,故

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_{10}^{1}\mathrm{C}_{8}^{1}\mathrm{C}_{6}^{1}\mathrm{C}_{4}^{1}}{\mathrm{P}_{10}^{4}} = \frac{8}{21}.$$

方法 2(使用组合方法)　由于没有考虑抽取的顺序,因此

$$n = \mathrm{C}_{10}^{4},$$

这时 4 只都不配对,共有 $m=\mathrm{C}_{5}^{4}\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{2}^{1}\mathrm{C}_{2}^{1}$ 种情况,故

$$P(A) = \frac{\mathrm{C}_{5}^{4}\cdot 2^{4}}{\mathrm{C}_{10}^{4}} = \frac{8}{21}.$$

9. 三个人独立地破译一个密码,他们能译出的概率分别为$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,求此密码能译出的概率.

解　设 $B=\{$此密码能译出$\}$,$A_i=\{$第 i 个人能译出$\}$,$i=1,2,3$.

方法 1(加法公式)　由于 $B=A_1+A_2+A_3$,根据加法公式,我们有

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1+A_2+A_3)\\
&= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1)P(A_2)\\
&\quad -P(A_2)P(A_3)-P(A_3)P(A_1)\\
&\quad +P(A_1)P(A_2)P(A_3)\\
&= \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\\
&\quad -\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\\
&= \frac{3}{5}.
\end{aligned}$$

方法 2(乘法公式)　由于 $\overline{B}=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,根据独立情况下的乘法公式,我们有

$$\begin{aligned}
P(\overline{B}) &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)\\
&= \left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{24}{60} = \frac{2}{5},
\end{aligned}$$

故

$$P(B) = 1-P(\overline{B}) = \frac{3}{5}.$$

分析　由此可见,多个事件独立和计算,使用乘法公式较为方便.

10. 设某种产品 50 件为一批，如果每批产品中没有次品的概率为 0.35，有 1，2，3，4 件次品的概率分别为 0.25，0.2，0.18，0.02. 今从某批产品中任取 10 件，检查出一件次品，求该批产品中次品不超过 2 件的概率.

解 设 A_i＝“一批产品中有 i 件次品”$(i=0,1,2,3,4)$，B＝“任取 10 件，检查出一件次品”，本题所求为

$$P(A_0 \mid B)+P(A_1 \mid B)+P(A_2 \mid B).$$

因为

$$P(B \mid A_0)=0,$$

$$P(B \mid A_1)=\frac{C_1^1 C_{49}^9}{C_{50}^{10}}=\frac{1}{5},$$

$$P(B \mid A_2)=\frac{C_2^1 C_{48}^9}{C_{50}^{10}}=\frac{16}{49},$$

$$P(B \mid A_3)=\frac{C_3^1 C_{47}^9}{C_{50}^{10}}=\frac{39}{98},$$

$$P(B \mid A_4)=\frac{C_4^1 C_{46}^9}{C_{50}^{10}}=\frac{988}{2\,303}.$$

又因为 A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 构成一个完备事件组，所以

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=0}^{4} P(A_i)P(B \mid A_i)\\&=0.35\times 0+0.25\times\frac{1}{5}+0.2\times\frac{16}{49}\\&\quad+0.18\times\frac{39}{98}+0.02\times\frac{988}{2\,303}\\&\approx 0.196,\end{aligned}$$

$$P(A_0 \mid B)=\frac{P(A_0)P(B \mid A_0)}{P(B)}=0,$$

$$P(A_1 \mid B)=\frac{P(A_1)P(B \mid A_1)}{P(B)}\approx 0.255,$$

$$P(A_2 \mid B)=\frac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)}\approx 0.333,$$

所以

$$P(A_0 \mid B)+P(A_1 \mid B)+P(A_2 \mid B)=0.588.$$

11. 两台机床加工同样的零件，第一台出现废品的概率是 0.03，第二台出现废品的概率是 0.02. 加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的零件是合格品的概率. 又：如果任意取出的零件经检查是废品，求它是由第二台机床加工的概率.

解　设 $A_i=\{$第 i 台生产产品$\}(i=1,2)$，$B=\{$任取一件是废品$\}$. 由题意有

$$P(A_1)=\frac{2}{3},\quad P(A_2)=\frac{1}{3},$$

$$P(B\mid A_1)=0.03,\quad P(B\mid A_2)=0.02.$$

(1) 由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.02\approx 0.0267,$$

$$P(\bar{B})=1-P(B)=0.9733.$$

(2) 由逆概公式，有

$$P(A_2\mid B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)P(B\mid A_2)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times 0.02}{\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.02}=0.25.$$

12. 盒中有 12 个乒乓球，其中有 9 个是新的. 第一次比赛时从中任取 3 个，用后仍放回盒中，第二次比赛时再从盒中任取 3 个，求第二次取出的球都是新球的概率. 又：已知第二次取出的球都是新球，求第一次取到的都是新球的概率.

解　设 $A_i=\{$第一次取出的 3 个球中有 i 个新球$\}(i=0,1,2,3)$，$B=\{$第二次取出的都是新球$\}$. 由题意，我们有

$$P(A_i)=\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\quad(i=0,1,2,3),$$

而

$$P(B\mid A_i)=\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}.$$

由全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

$$=\sum_{i=0}^{3}\frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}$$

$$\approx 0.1458.$$

再由逆概率公式，有

$$P(A_3\mid B)=\frac{\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3}}{P(B)}=\frac{5}{21}.$$

13. 某仪器有三个独立工作的元件,它们损坏的概率都是 0.1,当一个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.25;当二个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.6;当三个元件损坏时,仪器发生故障的概率为 0.95.求仪器发生故障的概率.

解 设 A_i="三个元件中有 i 个损坏"($i=0,1,2,3$),B="仪器发生故障".

因为

$$P(A_0)=0.9^3=0.729,$$
$$P(A_1)=C_3^1\times 0.1\times 0.9^2=0.243,$$
$$P(A_2)=C_3^2\times 0.1^2\times 0.9=0.027,$$
$$P(A_3)=0.1^3=0.001,$$

且 A_0,A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组.

又因为

$$P(B\mid A_0)=0,\quad P(B\mid A_1)=0.25,$$
$$P(B\mid A_2)=0.6,\quad P(B\mid A_3)=0.95,$$

所以
$$P(B)=\sum_{i=0}^{3}P(A_i)P(B\mid A_i)\approx 0.078.$$

14. 某人买了四节电池,已知这批电池有百分之一的产品不合格.求这人买到的四节电池中恰好有一节、二节、三节、四节不合格的概率.

解 设 A_i="四节电池中有 i 节是不合格的"($i=1,2,3,4$)

$$P(A_1)=C_4^1\times 0.01\times 0.99^3\approx 0.039,$$
$$P(A_2)=C_4^2\times 0.01^2\times 0.99^2\approx 0.0006,$$
$$P(A_3)=C_4^3\times 0.01^3\times 0.99\approx 4\times 10^{-6},$$
$$P(A_4)=0.01^4=10^{-8}.$$

15. 设某人打靶,命中率为 0.6.现独立地重复射击 6 次,求至少命中两次的概率.

解 这是一个伯努利概型问题.由题意,有

$$\begin{aligned}P_6(\mu\geqslant 2)&=1-P_6(\mu<2)\\&=1-P_6(\mu=0)-P_6(\mu=1)\\&=1-C_6^0\times 0.6^0\times 0.4^6-C_6^1\times 0.6^1\times 0.4^{6-1}\\&=1-0.4^6-6\times 0.6\times 0.4^5\\&=0.95904.\end{aligned}$$

16. 设 A,B 为两个事件,$0<P(B)<1$,并且 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$,证明:A 与 B 独立.

证 由于 $0<P(B)<1$,并且

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\quad P(A \mid \bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}.$$

因为已知 $P(A|B)=P(A|\bar{B})$，所以

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}. \qquad ①$$

又因为 AB 与 $A\bar{B}$ 互不相容，且 $AB+A\bar{B}=A$，所以

$$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B}),$$

$$P(A\bar{B})=P(A)-P(AB). \qquad ②$$

将②式代入①式得

$$P(AB)[1-P(B)]=[P(A)-P(AB)]P(B),$$

化简得

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

所以事件 A 与 B 独立.

17. 事件 A,B 相互独立，且 $P(A)>0,P(B)>0$，证明：A 与 B 必不互斥.

证　由于 A,B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B),\text{而 } P(A)\cdot P(B)>0,$$

即 $P(AB)>0$，因此 A 与 B 必不互斥.

18. 事件 A,B 互斥，且 $P(A)>0$，证明：$P(B|A)=0$.

证　由于 A,B 互斥，即 $AB=\varnothing$，所以 $P(AB)=0$. 而

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B \mid A),$$

由于 $P(A)>0$，故 $P(B|A)=0$.

19. 设 A,B 为两个随机事件，若 $B\subset\bar{A}$，证明：$\bar{A}+\bar{B}=U$.

证　由于 $B\subset\bar{A}$，所以 A 与 B 互斥，即 $AB=\varnothing$. 因此

$$\bar{A}+\bar{B}=\overline{AB}=\overline{\varnothing}=U.$$

20. 若事件 A,B 相互独立，证明：$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 亦相互独立.

证　因为 A 与 B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

根据事件的关系与运算，我们有

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\,\bar{B})&=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=1-P(A)-P(B)+P(A)\cdot P(B)\\&=1-P(A)-P(B)[1-P(A)]\\&=[1-P(A)]\cdot[1-P(B)]\\&=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B}),\end{aligned}$$

所以 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 亦相互独立.

(B)

1. 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为（　　）

(A)“甲种产品滞销，乙种产品畅销”

(B)“甲、乙两种产品均畅销”

(C)“甲种产品滞销”

(D)“甲种产品滞销或乙种产品畅销”

答案是：(D).

分析　设 $B=\{$甲种产品畅销$\}$，$C=\{$乙种产品滞销$\}$，则由题设 $A=BC$，于是，对立事件 $\overline{A}$ 为

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\}.$$

2. 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是（　　）

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容　　(B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$　　(D) $P(A-B)=P(A)$

答案是：(D).

分析　据题设 A 和 B 是任意两个不相容事件，$AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$.

利用公式 $A\overline{B}+AB=A$，知

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A),$$

所以(D)为正确答案.

另外，由于 $P(A)\neq0$，$P(B)\neq0$，(C)项不可能成立，值得注意的是(A)、(B)两项，有人认为(A)项与(B)项是互逆的，总有一个是正确的. 实际上，若 $AB=\varnothing$，$A\cup B\neq\Omega$ 时，(A)项不成立；$AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$ 时，(B)项不成立.

3. 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则（　　）

(A) A 是必然事件　　(B) $P(B|\overline{A})=0$

(C) $A\supset B$　　(D) $A\subset B$

答案是：(D).

分析　由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，可知 $P(AB)=P(A)$，从而有 $A\subset B$.

4. 设 A,B 为任意两个事件且 $A\subset B$，$P(B)>0$，则下列选项必然成立的是（　　）

(A) $P(A)<P(A|B)$　　(B) $P(A)\leqslant P(A|B)$

(C) $P(A)>P(A|B)$　　(D) $P(A)\geqslant P(A|B)$

答案是：(B).

分析　由 $A\subset B, P(B)>0$ 知

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}\geqslant P(A),$$

故(B)为正确选项.

5. 设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是　(　　)

(A) $\overline{A+B}$与 C　(B) $\overline{AC}$与$\overline{C}$　(C) $\overline{A-B}$与$\overline{C}$　(D) $\overline{AB}$与$\overline{C}$

答案是：(B).

分析　由于 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，故其中任意两个事件的和、差、交、逆与另一个事件或其逆是相互独立的，根据这一性质(A)、(C)、(D)三项中的两事件是相互独立的，因而均为干扰项.

6. 设 A,B,C 三个事件两两独立，则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是　(　　)

(A) A 与 BC 独立　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立

(C) AB 与 AC 独立　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立

答案是：(A).

分析　先证必要性，设 A,B,C 为相互独立的事件，则有

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=P(A)P(BC),$$

故事件 A 与事件 BC 独立，从而必要性成立.

反之，设 A,B,C 两两独立，且 A 与 BC 独立，于是有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(CA)=P(C)P(A),$$
$$P(ABC)=P(A)P(BC)=P(A)P(B)P(C),$$

根据三事件 A,B,C 相互独立的定义知，A,B,C 相互独立，从而充分性成立.

7. 设 A,B,C 是三个随机事件，$P(ABC)=0$，且 $0<P(C)<1$，则一定有　(　　)

(A) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

(B) $P((A+B)|C)=P(A|C)+P(B|C)$

(C) $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$

(D) $P((A+B)|\overline{C})=P(A|\overline{C})+P(B|\overline{C})$

答案是：(B).

分析　对于(A)，由于不知道 $P(A)$或 $P(B)$是否为零，因此不能确定(A)一定

成立.

对于(B),因为

$$P((A+B)C)=P(AC+BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$
$$=P(AC)+P(BC),$$
$$P((A+B)\mid C)=\frac{P((A+B)C)}{P(C)}=\frac{P(AC)+P(BC)}{P(C)}$$
$$=P(A\mid C)+P(B\mid C),$$

因而选项(B)是正确的.

对于(C),由于不能判断 AB,BC,AC 的概率是否全为零.因此不能确定(C)一定成立.

对于(D),$P((A+B)\overline{C})=P(A\overline{C}+B\overline{C})=P(A\overline{C})+P(B\overline{C})-P(AB\overline{C})$,但是 $P(AB\overline{C})=P(AB)-P(ABC)$,其值是否为零不能判断.因此,亦不能说明(D)一定成立.

8. 假设 A,B,C 是三个随机事件,其概率均大于零,A 与 B 相互独立,A 与 C 相互独立,B 与 C 互不相容,则下列命题中不正确的是 (　　)

(A) A 与 BC 相互独立　　(B) A 与 $B\cup C$ 相互独立

(C) A 与 $B-C$ 相互独立　　(D) AB,BC,CA 相互独立

答案是:(D).

分析 仅需用相互独立定义验证各选项是否成立即可.由于 $BC=\varnothing$,因而首先要验证(D)是否成立,易知 $P(ABCA)=0\neq P(AB)P(CA)$,故选(D).

注意 由于 $BC=\varnothing$,因而 BC 与任何事件相互独立,但 AB,CA 未必相互独立,因而(D)未必成立.

9. 已知 A,B 为任意两个随机事件,$0<P(A)<1,0<P(B)<1$,假设两个事件中只有 A 发生的概率与只有 B 发生的概率相等,则下列等式未必成立的是 (　　)

(A) $P(A|B)=P(B|A)$　　(B) $P(A|\overline{B})=P(B|\overline{A})$

(C) $P(A|\overline{B})=P(\overline{A}|B)$　　(D) $P(A-B)=P(B-A)$

答案是:(C).

分析 仅需将已知条件中所隐含的数量关系写出,即可得到所要的选项.事实上,由题设知 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$,即 $P(A-B)=P(B-A)$,故(D)成立,且 $P(A)=P(B)$,

所以有 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=P(B|A)$,故(A)成立;

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(B\overline{A})}{P(\overline{A})}=P(B|\overline{A}),$$