21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

线性代数

学习辅导与习题解答

（理工类·第三版）

· 吴赣昌 主编 ·

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

Math 大学数学立体化教材

线性代数

学习辅导与习题解答

(理工类·第三版)

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

《线性代数》学习辅导与习题解答（理工类·第三版）/吴赣昌主编.
北京：中国人民大学出版社，2010
21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-12722-4

Ⅰ. 线…
Ⅱ. 吴…
Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2010）第181840号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
《线性代数》学习辅导与习题解答
（理工类·第三版）
吴赣昌　主编
Xianxing Daishu Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http：//www. crup. com. cn		
	http：//www. ttrnet. com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京鑫霸印务有限公司		
规　格	148 mm×210 mm　32开本	**版　次**	2010年11月第1版
印　张	15.125	**印　次**	2010年11月第1次印刷
字　数	570 000	**定　价**	25.00元

前　言

人大版“21 世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新性“立体化教材”. 教材自出版以来，历经多次的升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育新时代的教育改革，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国 600 余所大专院校广泛采用.

大学数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段. 对于非数学专业的大学生而言，大学数学的教育，其意义则远不仅仅是学习一种专业的工具而已. 事实上，在大学生涯中，就提高学习基础、提升学习能力、培养科学素质和创新能力而言，大学数学是最有用且最值得你努力学习的课程.

为方便同学们使用“21 世纪数学教育信息化精品教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”. 该系列教辅书籍均根据教材章节顺序编排了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的**主要知识归纳、典型例题分析**与**习题解答**等内容，而每一章的设计中包括了该章的**教学基本要求、知识点网络图与题型分析**，上述设计有助于学生在课后自主研读时通过这些教辅书更好更快地掌握所学知识，在较短时间内取得好成绩.

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了，事实上，你需要在课后花更多的时间主动去做相关训练才能真正掌握所学知识. 而在课后的自学与练习过程中，首先要反复、认真地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解.

与传统的教材和教辅建设不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者队伍，我们还为读者朋友打造了数苑网（www. math168. com)，此网站为本系列教材与教辅的用户提供丰富的资源性与交互性的网络学习服务，其中最为直接相关的是数苑论坛中专门建设的“**大学公共数学同步学习论坛**”（建设中，

待投入使用)，该论坛的建设旨在为全国大学数学相关课程的教学双方提供一个基于网络进行学习辅导与交流讨论的平台；**其最大的特色**在于该论坛的编辑工具中集成了作者团队开发的、国际领先的网页公式编辑系统 Web-FES 与网页图形编辑系统 Web-GES，使得论坛能支持文字、公式与图形的在线编辑、发布、复制、粘贴与修改，从而使得该论坛能全面支持用户基于网络进行数学与科学知识的在线交流与讨论. 在该论坛中，用户不仅可用跟帖方式对各类教学要点、例题与习题进行交流讨论，还可用主动发帖方式将自己学习中遇到的困惑、问题或者获得的经验、心得发布到论坛上进行交流讨论. 大学公共数学同步学习论坛的建设有利于汇聚广大师生的智慧对课程教育与学习相关的各类问题进行深入的讨论，而论坛中建设与积累的丰富教学资源又能进一步为参与交流讨论的师生创造良好的教学环境.

与“21 世纪数学教育信息化精品教材”配套建设的教辅书籍包含了面向普通本科理工类、经管类、农林类、医药类、医学类与纯文科类的 14 套共 16 本，面向各类三本院校理工类与经管类的 6 套共 7 本，面向高职高专院校的理工类、经管类与综合类的 7 套共 7 本，总计 27 套 30 本. 此外，该系列教辅书籍的内容建设与编排具有相对的独立性，它们还可以作为相应大学数学课程教学双方的参考书.

经常登录作者团队倾力为你建设的“数苑网”(www.math168.com)，你将会获得意想不到的收获. 在那里，你不仅能进一步拓展自己的学习空间，下载优秀的学习交流软件，寻找到更多教材教辅之外的学习资源，而且还能与来自全国各地的良师益友建立联系.

吴赣昌

2010 年 6 月 18 日

目　录

第 1 章　行 列 式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章教学基本要求：

1. 会求 n 元排列的逆序数.

2. 深入领会 n 阶行列式的定义.

3. 熟练掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质化简行列式，利用"三角化"计算行列式.

4. 理解行列式元素的子式、余子式和代数余子式的概念，灵活掌握行列式按行（列）展开法则（降阶法）.

5. 理解克莱姆法则，并会用克莱姆法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

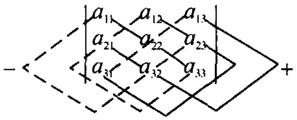
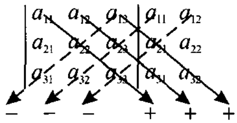
§ 1.1　二阶与三阶行列式

一、主要知识归纳

表 1—1—1　　二阶行列式

定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
规律	对角线法则：$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$
应用	二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D}$.

表 1—1—2 三阶行列式

定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$
规律	1. 对角线法则  2. 沙路法则 
应用	三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$, 则 $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$.

二、典型例题分析

例 1 设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值.

解 由

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0.$$

解得 $x=1$ 或 $x=-2$.

小结：本题的关键是计算等式左边的三阶行列式，三阶行列式一般用对角线法则和沙路法则来计算，但对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的计算.

例 2 解方程组

$$\begin{cases} bx + ay + 2ab = 0 \\ 2cy + 3bz - bc = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}.$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & 2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=b\times 2c\times a+a\times 3b\times c+0-0-0-0=5abc,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2ab & a & 0 \\ bc & 2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=-2ab\times 2c\times a+0+0-0-a\times bc\times a-0=-5a^2bc,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$=b\times bc\times a+(-2ab)\times 3b\times c+0-0-0-0=-5ab^2c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & a & -2ab \\ 0 & 2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=0+a\times bc\times c+0-(-2ab)\times 2c\times c-0-0=5abc^2,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-5a^2bc}{5abc}=-a,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{-5ab^2c}{5abc}=-b,\ z=\frac{D_3}{D}=\frac{5abc^2}{5abc}=c.$$

小结：本题求解三元线性方程组，但其关键在于计算相关的三阶行列式.

例 3 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 3x-2 \\ 1 & x+2 & 5x-4 \\ 1 & x+3 & 7x-6 \end{vmatrix}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证 由三阶行列式的定义知，$f(x)$ 是 x 的二次多项式，因而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，又

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0,\ f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

小结：本题的证明利用了高等数学微分学中的罗尔中值定理，只不过这里的函数是用三阶行列式的形式来表示的一个多项式.

三、习题 1—1 解答

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$=1\times4-3\times1=1$.

(2) 原式$=2\times2-1\times(-1)=5$.

(3) 原式$=a\cdot b^2-b\cdot a^2=ab(b-a)$.

(4) 原式$=(x-1)(x^2+x+1)-1\cdot x^2=x^3-x^2-1$.

(5) 原式$=\frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{-2t}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{1+t^2}=\frac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=1$.

(6) 原式$=1\cdot1-\log_a b\cdot\log_b a=0$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$；　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$；　(8) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$=1\times1\times1+3\times3\times3+2\times2\times2-2\times1\times3-3\times2\times1-1\times3\times2$
$=18$.

(2) 原式$=1\times1\times5+3\times9\times1+1\times4\times8-1\times1\times8-3\times1\times5-1\times9\times4$
$=5$.

(3) 原式$=1\times5\times1+0\times0\times0+(-1)\times3\times4-(-1)\times5\times0-3\times0\times1$
$-1\times4\times0=-7.$

(4) 原式$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$
$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$
$=-24+8+16-4=-4.$

(5) 原式$=0\times0\times0+0\times b\times d+0\times a\times c-0\times0\times0-b\times a\times0-0\times d\times c=0.$

(6) 原式$=acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc$
$=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(7) 原式$=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$
$=(a-b)(b-c)(c-a).$

(8) 原式$=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-y^3-(x+y)^3-x^3$
$=3xy(x+y)-y^3-3x^2y-3y^2x-x^3-y^3-x^3$
$=-2(x^3+y^3).$

3. 证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

证
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+c_1a_2b_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$$
$$=a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$
$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

4. 当 x 取何值时, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0.$

解
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=3\times x\times x+4\times x\times0+1\times0\times1-x\times x\times1-3\times0\times0-1\times4\times x$$
$$=3x^2-x^2-4x=2x^2-4x$$
$$=2x(x-2),$$

所以当 $x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时, $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0.$

§1.2 n阶行列式

一、主要知识归纳

表 1—2—1 排列与逆序

定义	在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若数 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与 i_s 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序数的总数称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.
计算方法	先计算出排列中每个元素逆序的个数，即计算出排列中每个元素前面比它大的数码个数之和，该排列中所有元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

表 1—2—2 n 阶行列式

n 阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^N a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, $= \sum (-1)^N a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ $= \sum (-1)^N a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$ 它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积的代数和，其中 N 为行标组成的排列与列标组成的排列的逆序数之和.

二、典型例题分析

例 1 设排列 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 的逆序数是 k，则排列 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 的逆序数是多少?

解 因为任取一对数在 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 和 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 中必定会形成一个逆序和一个顺序，所以两个排列的逆序之和等于从 n 个数中取 2 个数的排列数 C_n^2，即

$$N(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) + N(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

则

$$N(x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1) = \frac{n(n-1)}{2} - N(x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n) = \frac{n(n-1)}{2} - k.$$

小结：本题的关键是利用了 $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$ 中的逆序和 $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$ 中的顺

序之间类似互补的性质，即任取一对数在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中必定会形成一个逆序和一个顺序.

例2 设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1=D_2$.

证 由行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \\ D_2 &= \sum(-1)^N (a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n}) \\ &= \sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)} \end{aligned}$$

其中，$N=N(j_1j_2\cdots j_n)$，又 $j_1+j_2+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n$，则

$$D_2=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

故 $D_1=D_2$.

小结：本题证明的关键在于用定义计算出两个 n 阶行列式的值.

例3 已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解 $f(x)$ 中含 x 为因子的元素有

$$a_{11}=-x,\ a_{21}=x,\ a_{23}=2x,\ a_{32}=x,\ a_{35}=3x,\ a_{44}=x,\ a_{52}=-7x$$

即含有 x 为因子的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1;\ j_2=1,\ 3;\ j_3=2,\ 5;\ j_4=4;\ j_5=2.$$

则含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1;\ j_2=3;\ j_3=2;\ j_4=4 \quad 和 \quad j_2=1;\ j_3=5;\ j_4=4;\ j_5=2$$

对应的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}$，则含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

和

$$(-1)^{N(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

即 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

小结：本题求一个用行列式形式表示的五次多项式中 x^4 的系数，本题的关键是利用行列式的定义根据列下标来讨论出现 x^4 的项.

此类求 x^n 的系数的题，只需考虑行列式按定义展开的不同行不同列乘积中出现 x^n 的项，然后将它们的系数相加即可.

三、习题 1—2 解答

1. 求下列排列的逆序数：

解题思路　利用逆序数的定义，即

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{k=1}^{n}t_k.$$

(1) 4132；　　(2) 2413；

(3) 36715284；　　(4) 3712456；

(5) $1\ 3\cdots(2n-1)\ 2\ 4\cdots(2n)$；　　(6) $1\ 3\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots2$.

解　(1) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lcccc} 排列 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 逆序 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+1+1+2=4.$$

(2) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lcccc} 排列 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 逆序 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+2+1=3.$$

(3) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{排列} & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+0+3+2+4+0+4=13.$$

(4) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{cccccccc} \text{排列} & 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+2+2+1+1+1=7.$$

(5) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{排列} & 1 & 3 & \cdots & (2n-1) & 2 & 4 & \cdots & (2n-2) & (2n) \\ & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(6) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{cccccccccc} \text{排列} & 1 & 3 & \cdots & (2n-1) & (2n) & (2n-2) & \cdots & 4 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & \cdots & 2n-4 & 2n-2 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$\begin{aligned} N &=2+4+\cdots+2n-4+2n-2 \\ &=2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)]=n(n-1). \end{aligned}$$

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解题思路 利用 n 阶行列式的一般项的定义.

解 由定义知，四阶行列式的一般项为：

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4},$$

其中，t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数.

由于 $p_1=1$，$p_2=3$ 已固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如

13□□.

即 1324 或 1342，其对应的 t 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{ 或 } 0+0+0+2=2,$$

所以 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

3. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号？

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$； (2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$； (3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

解 (1) 因为 $N(123456)+N(532416)=0+8=8$，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 的符号为正.

(2) 因为 $N(123456)+N(162435)=0+5=5$，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 的符号为负.

(3) 因为 $N(251463)+N(136254)=6+5=11$，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 的符号为负.

4. 选择 k，l，使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{51}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

解 因为 $N(12345)+N(3k42l)=N(3k42l)$，根据行列式的定义，$k$，$l$ 只能取 1 或 5.

若 $k=5$，$l=1$，则 $N(35421)=8$；若 $k=1$，$l=5$，则 $N(31425)=3$. 所以，$k=1$，$l=5$.

5. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零，证明该行列式为零.

证 如果 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零，则至多有 $n-1$ 个不为零的元素.

由于 n 阶行列式的每一项为 n 个不同的元素乘积，从而每一项均为零，故该行列式为零.

6. 用行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；