推荐示范教材
教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会

教育部高等农林院校理科基础课程

教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

线性代数学习指导

Guidance for Linear Algebra

惠淑荣　张万琴　主编

$$\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

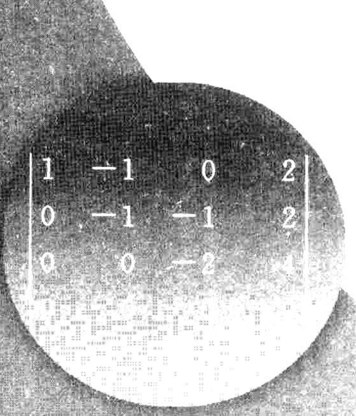
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

中国农业大学出版社
ZHONGGUONONGYEDAXUE CHUBANSHE

教育部高等农林院校理科基础课程
教学指导委员会推荐示范教材配套辅导教材

线性代数学习指导

惠淑荣　张万琴　主编



中国农业大学出版社
CHUBANSHE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导/惠淑荣，张万琴主编. —北京：中国农业大学出版社，2010. 1
ISBN 978-7-81117-356-7

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①惠…②张… Ⅲ. 线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 222071 号

书　名 线性代数学习指导
作　者 惠淑荣　张万琴　主编

策划编辑 赵　中　董夫才　　**责任编辑** 李丽君
封面设计 郑　川　　**责任校对** 陈　莹　王晓凤
出版发行 中国农业大学出版社
社　址 北京市海淀区圆明园西路 2 号　　**邮政编码** 100193
电　话 发行部 010-62731190，2620　　读者服务部 010-62732336
编辑部 010-62732617，2618　　出　版　部 010-62733440
网　址 http://www.cau.edu.cn/caup　　**e-mail**：cbsszs@cau.edu.cn
经　销 新华书店
印　刷 北京鑫丰华彩印有限公司
版　次 2010 年 1 月第 1 版　2010 年 1 月第 1 次印刷
规　格 787×1 092　16 开本　11. 25 印张　251 千字
定　价 18. 00 元

主　　编　惠淑荣　张万琴
副 主 编　杜世平　郭亚军　戴云仙
　　　　　李　强　李喜霞　沈陆明
参编人员　（按姓氏拼音顺序排列）
　　　　　戴云仙（内蒙古农业大学）
　　　　　杜世平（四川农业大学）
　　　　　付玖春（内蒙古农业大学）
　　　　　郭亚军（河北科技师范学院）
　　　　　惠淑荣（沈阳农业大学）
　　　　　李　强（南京农业大学）
　　　　　李喜霞（沈阳农业大学）
　　　　　马宝林（河南科技学院）
　　　　　沈陆明（湖南农业大学）
　　　　　陶桂洪（沈阳农业大学）
　　　　　王莉莉（四川农业大学）
　　　　　张万琴（河南科技学院）
　　　　　郑国萍（河北科技师范学院）

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐示范教材编审指导委员会

主　任　江树人

副主任　杜忠复　程备久

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　王国栋　方炎明　李宝华　张文杰　张良云
杨婉身　吴　坚　陈长水　林家栋　周训芳　周志强
高孟宁　戚大伟　梁保松　曹　阳　焦群英　傅承新

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会
推荐数学类示范教材编审指导委员会

主　任　高孟宁

委　员（以姓氏笔画为序）

王来生　石　峰　卢恩双　吴　坚　杜忠复　张良云
杜晓林　孟　军　房少梅　梁保松　惠淑荣

出版说明

在教育部高教司农林医药处的关怀指导下，由教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会（以下简称“基础课教指委”）推荐的本科农林类专业数学、物理、化学基础课程系列示范性教材现在与广大师生见面了。这是近些年全国高等农林院校为贯彻落实“质量工程”有关精神，广大一线教师深化改革，积极探索加强基础、注重应用、提高能力、培养高素质本科人才的立项研究成果，是具体体现“基础课教指委”组织编制的相关课程教学基本要求的物化成果。其目的在于引导深化高等农林教育教学改革，推动各农林院校紧密联系教学实际和培养人才需求，创建具有特色的数理化精品课程和精品教材，大力提高教学质量。

课程教学基本要求是高等学校制定相应课程教学计划和教学大纲的基本依据，也是规范教学和检查教学质量的依据，同时还是编写课程教材的依据。“基础课教指委”在教育部高教司农林医药处的统一部署下，经过批准立项，于2007年年底开始组织农林院校有关数学、物理、化学基础课程专家成立专题研究组，研究编制农林类专业相关基础课程的教学基本要求，经过多次研讨和广泛征求全国农林院校一线教师意见，于2009年4月完成教学基本要求的编制工作，由“基础课教指委”审定并报教育部农林医药处审批。

为了配合农林类专业数理化基础课程教学基本要求的试行，“基础课教指委”统一规划了名为“教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材”（以下简称“推荐示范教材”）。“推荐示范教材”由“基础课教指委”统一组织编写出版，不仅确保教材的高质量，同时也使其具有比较鲜明的特色。

一、“推荐示范教材”与教学基本要求并行 教育部专门立项研究制定农林类专业理科基础课程教学基本要求，旨在总结农林类专业理科基础课程教育教学改革经验，规范农林类专业理科基础课程教学工作，全面提高教育教学质量。此次农林类专业数理化基础课程教学基本要求的研制，是迄今为止参与院校和教师最多、研讨最为深入、时间最长的一次教学研讨过程，使教学基本要求的制定具有扎实的基础，使其具有很强的针对性和指导性。通过“推荐示范教材”的使用推动教学基本要求的试行，既体现了“基础课教指委”对推行教学基本要求的决心，又体现了对“推荐示范教材”的重视。

二、规范课程教学与突出农林特色兼备 长期以来各高等农林院校数理化基础课程在教学计划安排和教学内容上存在着较大的趋同性和盲目性，课程定位不准，教学不够规范，必须科学地制定课程教学基本要求。同时由于农林学科的特点和专业培养目标、培养规格的不同，对相关数理化基础课程要求必须突出农林类专业特色。这次编制的相关课程教学基本要求最大限度地体现了各校在此方面的探索成果，“推荐示范教材”比较充分反映了农林类专业教学改革的新成果。

三、教材内容拓展与考研统一要求接轨 2008 年教育部实行了农学门类硕士研究生统一入学考试制度。这一制度的实行，促使农林类专业理科基础课程教学要求作必要的调整。“推荐示范教材”充分考虑了这一点，各门相关课程教材在内容上和深度上都密切配合这一考试制度的实行。

四、多种辅助教材与课程基本教材相配 为便于导教导学导考，我们以提供整体解决方案的模式，不仅提供课程主教材，还将逐步提供教学辅导书和教学课件等辅助教材，以丰富的教学资源充分满足教师和学生的需求，提高教学效果。

乘着即将编制国家级“十二五”规划教材建设项目之机，“基础课教指委”计划将“推荐示范教材”整体运行，以教材的高质量和新型高效的运行模式，力推本套教材列入“十二五”国家级规划教材项目。

“推荐示范教材”的编写和出版是一种尝试，赢得了许多院校和老师的参与和支持。在此，我们衷心地感谢积极参与的广大教师，同时真诚地希望有更多的读者参与到“推荐示范教材”的进一步建设中，为推进农林类专业理科基础课程教学改革，培养适应经济社会发展需要的基础扎实、能力强、素质高的专门人才做出更大贡献。

中国农业大学出版社

2009 年 8 月

内 容 简 介

本书从知识点精要、典型题精解、教材习题同步解析、单元同步测试及参考答案 4 个方面对主教材中行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型等内容加以提炼和梳理，以为广大学生学习线性代数提供尽可能的帮助。

本书可供农林类专业广大学生使用，也可供相关专业教师教学参考。

前言

教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会(简称"基础课教指委")根据农林类专业特点和教学实际需求,于2009年组织编制了《普通高等学校农林类专业数理化基础课程教学基本要求》(简称《教学基本要求》)。为配合《教学基本要求》的实施,基础课教指委组织全国涉农高校编写了教育部高等农林院校理科基础课程教学指导委员会推荐示范教材。

线性代数是普通高等学校农林类专业最重要的基础课程之一,为了更好地指导学生学好这门课程,加深对所学内容的理解和掌握,我们编写了这本《线性代数学习指导》。本书是与基础课教指委推荐示范教材《线性代数》(惠淑荣、张万琴主编)的配套辅导教材。本辅导教材对主教材内容进行整合,突出体现辅导教学的功能,将内容归纳为知识点精要、典型题精解、教材习题同步解析、单元同步测试及参考答案4个方面。

本书是编者在长期教学实践经验累积并进一步梳理的基础上形成的,可供农林类专业广大学生使用,也可供相关专业教师教学参考。

本书由惠淑荣、张万琴任主编,参加编写的还有杜世平、郭亚军、戴云仙、李强、李喜霞、沈陆明、付玖春、马宝林、陶桂洪、王莉莉、郑国萍。由于编写人员水平所限,书中定有疏漏及不妥之处,敬请广大读者指正。

编　者

2009年8月

目录

CONTENTS

Chapter 1 第 1 章

行列式

Determinant

1.1 知识点精要

1.1.1 n 阶行列式

1. n 阶行列式的定义

设有 n^2 个元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列的算式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，简记为 $\det(a_{ij})$，数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$的元素。其中横排称行，纵排称列。

2. 代数余子式

在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，把元素 $a_{ij}(i=1,2,\cdots n;j=1,2,\cdots n)$所在的第 i 行元素与第 j 列元素划掉，剩下的元素按原来位置所构成的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式，记为 M_{ij}；称$(-1)^{i+j}M_{ij}$为元素 a_{ij} 的代数余子式，记为 A_{ij}，即 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$。

3. n 阶行列式的值

(1)n 阶行列式的值等于它的第 1 列的每个元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$$

其中 A_{i1} 为 n 阶行列式第 1 列元素 $a_{i1}(i=1,2,\cdots,n)$的代数余子式；

(2)n 阶行列式的值等于它的第 1 行的每个元素与其相应的代数余子式乘积之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

1.1.2 行列式的性质

1. 转置行列式

设有 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将 D 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次变为第 $1,2,\cdots,n$ 列，得到的新行列式称为 D 的转置行列式，记为 D^{T} 或者 D'，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

显然$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$。

2. 行列式的性质

(1)行列式和它的转置行列式的值相同，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D^{\mathrm{T}}$$

(2)互换一个行列式的两行(列)，行列式的值改变符号。

(3)用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1　行列式的某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面。

推论 2　如果行列式的某一行(列)的所有元素都为零,则行列式的值等于零。

推论 3　如果行列式的某两行(两列)的对应元素成比例,则行列式的值等于零。

(4)如果行列式 D 的某一行(列)的所有元素都可以表成两项的和,则行列式 D 等于两个行列式 D_1 和 D_2 的和。这两个行列式的这一行(列)的元素分别为原行列式中相应位置两项中的第 1 项、第 2 项,而其他位置的元素不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j}+b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j}+b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj}+b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

(5)把行列式的某一行(列)的元素乘同一个数后,加到另一行(列)的对应元素上,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6)行列式 D 的值等于它的任意一行(列)的元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \ (i = 1,2,\cdots,n)$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}(j=1,2,\cdots,n)$$

(7)行列式某一行(列)的元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零,即

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0(i\neq j)$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0(i\neq j)$$

1.1.3 行列式的计算

1. 行列式的计算

(1)逐次降阶法。

(2)化三角形法。

(3)递推公式法。

(4)加边法。

2. 拉普拉斯定理

在 n 阶行列式 D_n 中,任选 k 行 k 列,位于这些行、列交叉点处的元素按照原位置排列构成的一个 k 阶行列式 M,称为行列式 D_n 的 k 阶子式,称 D_n 中划去这 k 行 k 列后,剩余的元素按原位置排列成的 $n-k$ 阶行列式 N 为 M 的余子式。若 k 阶子式 M 在行列式 D_n 中所在的行、列的序号分别为 $i_1,i_2,\cdots,i_k,j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$$

为 M 的代数余子式。

拉普拉斯定理:在 n 阶行列式中,任取 k 行(列),则由这 k 行(列)的元素组成的所有 k 阶子式与其对应的代数余子式的乘积之和,等于行列式的值。

1.1.4 克莱姆法则

若 n 元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$ 的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

则此方程组有唯一解，且 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$

其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列的元素用方程组的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 替换而得到的 n 阶行列式。

齐次线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$ 有非零解的充分必要条件是 $D=0$

1.2 典型题精解

例 1 $D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$__________。

分析 此题属于低阶行列式，观察此行列式的特点，可以发现它的零元素较多，可采取按一行(列)展开的降阶法，继续观察还可发现第 1 行与第 4 行元素所组成的一切二阶子式只有一个非零，所以利用拉普拉斯定理计算会更简便。

解 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3)$

例 2 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$__________。

分析 此题可化为上(下)三角行列式或利用每行(每列)元素之和均相等的特点计算行列式。

解 $D\xlongequal{\text{每列加到第1列}}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{\text{每行减第1行}}3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-3$

例 3 $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$__________。

分析 此行列式的特点也为各行之间元素之和相同,故可采取把各列元素加到第1列,再提取公因子的方法,再降阶。

解 $D=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\1&-1&x+1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&1&-1\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1&-1&1&x-1\\0&0&x&-x\\0&x&0&-x\\0&0&0&-x\end{vmatrix}=-x^2\begin{vmatrix}1&-1&1\\0&0&x\\0&x&0\end{vmatrix}=x^4$

例4 已知方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+3x_3=0\\2x_1+3x_2+tx_3=0\end{cases}$有非零解,则$t=$________。

分析 齐次线性方程组有非零解⇔系数行列式$D=0$

解 $D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\2&3&t\end{vmatrix}=0\Rightarrow t-4=0\Rightarrow t=4$

例5 若$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=3$,$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&5a_{11}+2a_{12}&a_{13}\\a_{21}&5a_{21}+2a_{22}&a_{23}\\a_{31}&5a_{31}+2a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$,则$D_1$的值为________。

①-15 ②-6 ③6 ④15

分析 利用行列式的性质

解 $D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&5a_{11}+2a_{12}&a_{13}\\a_{21}&5a_{21}+2a_{22}&a_{23}\\a_{31}&5a_{31}+2a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&5a_{11}&a_{13}\\a_{21}&5a_{21}&a_{23}\\a_{31}&5a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&a_{13}\\a_{21}&2a_{22}&a_{23}\\a_{31}&2a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=5\times0+2\times3=6$

答案为③。

例6 已知3阶行列式$\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&3a_{13}\\2a_{21}&4a_{22}&6a_{23}\\3a_{31}&6a_{32}&9a_{33}\end{vmatrix}=6$,则$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$________。

分析 利用行列式的性质

解 因为$\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&3a_{13}\\2a_{21}&4a_{22}&6a_{23}\\3a_{31}&6a_{32}&9a_{33}\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}a_{11}&2a_{12}&3a_{13}\\a_{21}&2a_{22}&3a_{23}\\a_{31}&2a_{32}&3a_{33}\end{vmatrix}=36\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=6$

所以$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\frac{1}{6}$

例7 已知四阶行列式$D_4=\begin{vmatrix}1&2&7&-1\\3&2&8&0\\-2&2&4&3\\5&2&2&5\end{vmatrix}$,求$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}$的值,其中$A_{ij}$