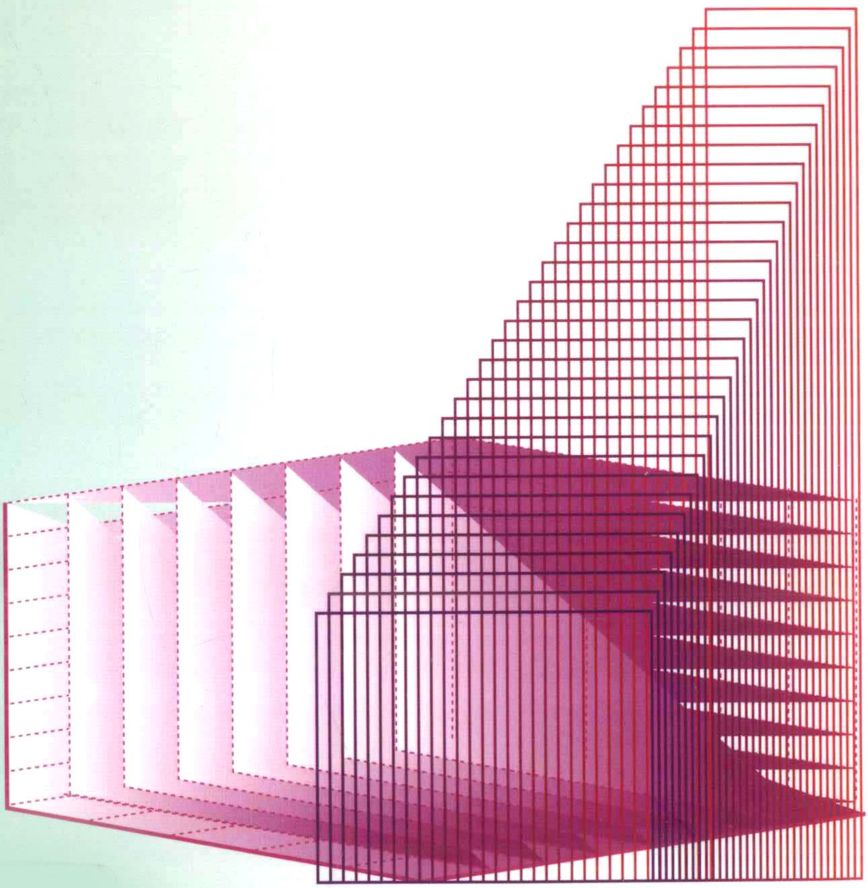
数学实验与数学建模

宗 容 施继红 尉 洪 李海燕 编著



云南大学出版社

数学实验与数学建模

宗　容　施继红
尉　洪　李海燕　编著

云南大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学实验与数学建模/宗容等编著．—昆明：云南大学出版社，2009

ISBN 978－7－81112－981－6

Ⅰ．数… Ⅱ．宗… Ⅲ．数学模型—高等学校—教材 Ⅳ．O141．4

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第234673号

数学实验与数学建模

宗　容　施继红　尉　洪　李海燕　编著

策划组稿：叶枫红
责任编辑：叶枫红
封面设计：丁群亚
出版发行：云南大学出版社
印　　装：云南大学出版社印刷厂
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：15．375
字　　数：276千
版　　次：2009年12月第1版
印　　次：2009年12月第1次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81112－981－6
定　　价：26．00元

地　　址：云南省昆明市翠湖北路2号云南大学英华园（邮编：650091）
发行电话：0871－5031071　5033244
网　　址：www．ynup．com
E－mail：market@ynup．com

前　言

随着科学技术的发展和不同学科领域的交叉融合，数学的应用已经不再局限于物理学等传统领域，生态学、环境科学、医学、经济学和信息科学都出现了数学的融合，更多的是一些交叉学科都提出了大量涉及应用数学的实际问题。要解决这些实际问题，关键是基于问题，利用合理的假设，建立恰当的数学模型。同时，计算机科学技术的不断发展，促使这些从实际问题中抽象提炼出来的相对烦琐的数学问题的求解成为可能。

传统的大学数学教育主要注重理论知识的传授，忽略了实践能力的培养，学生在大学进行了许多数学课程的学习，却不知道如何用于指导实践。数学实验课程和大学生数学建模竞赛，架起了数学知识和应用之间的桥梁。数学实验与数学建模是对大学生掌握各领域专业知识，利用数学理论方法和计算机技术，分析和解决实际问题能力的全面考验。同时也是培养大学生创新能力和实践能力的有效手段。

本书的作者都是云南大学数学建模竞赛的指导教师，取得了优秀的竞赛成绩，他们总结多年的竞赛指导经验编写而成此书。本书将数学实验和数学建模有机地结合起来，结合实例既介绍如何利用相应的数学知识建立模型，又介绍合适的数学软件（Matlab、Lingo、SPSS）求解模型，并在每章的最后介绍一个综合案例。

本书结构的组织基于关联知识点展开，共分五篇，包括方程建模，数理统计建模，运筹优化建模，网络图论建模，数学建模与竞赛。第一篇介绍了不同的方程或方程组建模方法，第二篇介绍了数据插值，拟合与回归分析，方差分析与假设检验，计算机模拟的建模方法，同时还介绍了该部分主要使用的数理统计软件工具 SPSS 的应用。第三篇介绍了线性规划，非线性规划，目标规划等最优化问题的相关建模方法，以及用于求解最优化问题的软件工具 LINGO 的应用。第四篇介绍了网络图的模型及算法分析，基于最小生成树、最短路径等问题的建模方法及算法。第五篇主要介绍了国内外数学建模竞赛的相关概况，数学建模论文的撰写规范和要求，结合近几年来指导学生参加全国大学生数学建模竞赛（CUMCM）和美国大学生数学建模竞赛（MCM）一等奖的优秀

论文，给出了两个综合案例。

本书第1、2、3、15章由施继红编写，第4、5、6、7章及16.2章由李海燕编写，第8、9、10、11章及16.1章由尉洪编写，第12、13、14章由宗容编写。

本书可作为大专院校《数学实验》、《数学建模》课程的教科书，也可作为数学建模竞赛培训的教材和参考书。

本书的编写工作得到了云南大学信息学院相关领导的大力支持和帮助，在此表示由衷的感谢！

限于作者水平，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

编著者

2009年11月于云南大学信息学院

目　　录

前　言 …………………………………………………………………………（1）

第一篇　方程模型

第一章　方程（组）模型 ……………………………………………………（1）
1.1　问题的提出 ………………………………………………………………（1）
1.2　非线性方程的求解方法 …………………………………………………（2）
1.2.1　图形放大法 ……………………………………………………………（2）
1.2.2　简单迭代法 ……………………………………………………………（4）
1.2.3　迭代失败的改进：加速迭代收敛方法 ………………………………（5）
1.3　方程组的求解方法 ………………………………………………………（6）
1.3.1　线性方程组的求解 ……………………………………………………（6）
1.3.2　非线性方程组的迭代解法 ……………………………………………（7）
1.4　MATLAB 函数直接求解法 ……………………………………………（8）
1.4.1　solve（）函数 …………………………………………………………（8）
1.4.2　fsolve（）函数 …………………………………………………………（10）
1.4.3　roots（p）…………………………………………………………（11）
1.4.4　其他函数 ………………………………………………………………（11）
1.5　案例详解：山崖高度 ……………………………………………………（12）
实验题 ……………………………………………………………………………（14）

第二章　微分方程模型 ………………………………………………………（16）
2.1　问题的提出 ………………………………………………………………（16）
2.2　微分方程模型的建立 ……………………………………………………（17）
2.2.1　运用已知物理定律 ……………………………………………………（17）
2.2.2　利用平衡与增长式 ……………………………………………………（17）
2.2.3　微元法 …………………………………………………………………（18）

2.2.4 分析法 …… (19)
2.3 微分方程模型的求解 …… (19)
2.3.1 欧拉方法 …… (20)
2.3.2 误差和阶 …… (23)
2.3.3 龙格-库塔方法 …… (24)
2.4 微分方程(组)的 MATLAB 求解 …… (25)
2.4.1 解析解 …… (25)
2.4.2 数值解 …… (26)
2.5 案例详解：人口模型 …… (28)
2.5.1 问题的提出 …… (28)
2.5.2 模型一：Malthus 模型 …… (28)
2.5.3 模型二：阻滞增长模型（Logistic 模型） …… (30)
实验题 …… (32)

第二篇 数理统计建模

第三章 插值方法 …… (34)
3.1 问题的提出 …… (34)
3.1.1 函数查表问题 …… (34)
3.1.2 数控机床加工零件 …… (35)
3.2 插值方法 …… (36)
3.2.1 分段线性插值和多项式插值 …… (36)
3.2.2 三次样条插值 …… (36)
3.3 用 MATLAB 进行插值计算 …… (38)
3.3.1 一维插值 …… (38)
3.3.2 高维插值 …… (40)
3.4 案例详解：估计水塔的水流量 …… (42)
3.4.1 问题的提出 …… (42)
3.4.2 模型假设 …… (43)
3.4.3 符号约定及说明 …… (43)
3.4.4 问题分析与建模 …… (43)
实验题 …… (49)

第四章　曲线拟合与回归分析 …… (52)
4.1　曲线拟合 …… (52)
4.1.1　线性最小二乘法拟合 …… (52)
4.1.2　多项式拟合的 MATLAB 命令 …… (53)
4.1.3　非线性最小二乘拟合 …… (55)
4.2　回归分析 …… (57)
4.2.1　一元线性回归 …… (57)
4.2.2　多元非线性回归 …… (59)
4.2.3　非线性回归 …… (60)
实验题 …… (61)

第五章　方差分析与假设检验 …… (63)
5.1　单因素方差分析 …… (63)
5.1.1　引例 …… (63)
5.1.2　方差分析原理 …… (64)
5.1.3　单因子方差分析的 MATLAB 实现 …… (68)
5.2　多因素方差分析 …… (68)
5.2.1　多因素方差分析原理 …… (68)
5.2.2　双因子方差分析的 MATLAB 实现 …… (70)
5.3　假设检验 …… (71)
5.3.1　引例 …… (72)
5.3.2　单总体均值的假设检验 …… (72)
5.3.3　假设检验的 MATLAB 实现 …… (72)
实验题 …… (75)

第六章　计算机模拟 …… (77)
6.1　蒙特卡罗方法 …… (77)
6.1.1　蒲丰投针实验 …… (78)
6.1.2　追逐问题 …… (79)
6.2　伪随机数 …… (81)
6.3　计算机模拟方法 …… (83)
6.3.1　模拟的概念 …… (83)
6.3.2　离散型模拟 …… (83)

6.3.3 连续型模拟 …… (84)
6.4 具体案例求解 …… (84)
6.4.1 排队问题 …… (84)
6.4.2 存储问题 …… (86)
实验题 …… (88)

第七章 SPSS 的基本应用 …… (89)
7.1 统计分析软件包——SPSS …… (89)
7.2 SPSS 的基本操作 …… (90)
7.2.1 建立数据文件 …… (90)
7.2.2 数据文件整理 …… (92)
7.2.3 数据文件描述统计分析 …… (96)
7.2.4 保存结果文件 …… (100)
7.2.5 导出分析结果 …… (100)
7.3 SPSS 的相关应用 …… (101)
7.3.1 聚类分析 …… (101)
7.3.2 判别分析 …… (105)
实验题 …… (110)

第三篇 运筹优化建模

第八章 线性规划 …… (112)
8.1 问题的提出 …… (112)
8.2 线性规划问题的一般形式 …… (114)
8.3 线性规划问题解的相关概念 …… (115)
8.4 线性规划问题的求解算法和软件 …… (116)
8.5 线性规划灵敏度分析 …… (116)
8.6 线性规划问题 Lingo 求解过程及结果分析 …… (117)
8.7 整数线性规划 …… (119)
8.7.1 整数线性规划的表达形式 …… (119)
8.7.2 整数线性规划问题的求解方法 …… (120)
实验题 …… (120)

第九章 非线性规划 …………………………………………………… (122)
9.1 问题的提出 …………………………………………………… (122)
9.2 非线性规划问题的一般形式 ………………………………… (123)
9.3 非线性规划问题解的相关概念 ……………………………… (124)
9.4 非线性规划问题的求解算法和软件 ………………………… (124)
9.5 非线性规划问题 Lingo 求解过程及结果分析 ……………… (125)
9.6 非线性规划的特例 ………………………………………… (128)
实验题 …………………………………………………………… (129)

第十章 目标规划 ………………………………………………… (130)
10.1 目标规划问题的提出 ……………………………………… (130)
10.2 目标规划模型的一般形式 ………………………………… (132)
10.3 目标规划问题的求解算法和软件 ………………………… (132)
10.4 目标规划 LINGO 求解过程及结果分析 …………………… (133)
实验题 …………………………………………………………… (137)

第十一章 LINGO 软件基本用法介绍 …………………………… (139)
11.1 概述 ………………………………………………………… (139)
11.2 LINGO 工具的基本用法 …………………………………… (139)
11.3 用 LINGO 编程语言建立模型 ……………………………… (141)
11.4 建立 LINGO 优化模型需要注意的几个基本问题 ………… (143)
11.5 LINGO 软件的参数设置 …………………………………… (143)
11.6 LINGO 常用的运算符和函数 ……………………………… (144)
11.6.1 LINGO 的常用运算符 …………………………………… (144)
11.6.2 LINGO 中常用函数 ……………………………………… (145)

第四篇 网络图论建模

第十二章 图的基本概念与算法初步 …………………………… (147)
12.1 问题的提出 ………………………………………………… (148)
12.1.1 Konisberg 七桥问题 …………………………………… (148)
12.1.2 古典过河问题 …………………………………………… (149)
12.2 图的概念和术语 …………………………………………… (150)

12.2.1 图 …………………………………………………………………… (150)
12.2.2 顶点与边的几个术语 ……………………………………………… (150)
12.2.3 路和连通性 ………………………………………………………… (151)
12.2.4 网络或赋权图 ……………………………………………………… (151)
12.3 图的矩阵表示方法 …………………………………………………… (151)
12.3.1 邻接矩阵 …………………………………………………………… (151)
12.3.2 关联矩阵 …………………………………………………………… (153)
12.3.3 边矩阵、边权矩阵 ………………………………………………… (153)
12.4 常见的应用网络图模型 ……………………………………………… (153)
12.4.1 田径赛的时间安排问题 …………………………………………… (153)
12.4.2 最佳灾情巡视路线问题 …………………………………………… (155)
12.4.3 运输问题 …………………………………………………………… (156)
12.5 算法 …………………………………………………………………… (157)
12.5.1 算法 ………………………………………………………………… (157)
12.5.2 算法分析 …………………………………………………………… (158)
实验题 …………………………………………………………………… (160)

第十三章 树与最小生成树 ……………………………………………… (162)
13.1 问题的提出 …………………………………………………………… (162)
13.2 树图与最小生成树 …………………………………………………… (162)
13.2.1 树图 ………………………………………………………………… (162)
13.2.2 图的生成树 ………………………………………………………… (163)
13.2.3 最小生成树 ………………………………………………………… (164)
13.3 最小生成树的算法 …………………………………………………… (164)
13.3.1 最小生成树的 MST 性质 ………………………………………… (164)
13.3.2 最小生成树的 Prim 算法 ………………………………………… (165)
13.3.3 最小生成树的 Kruskal 算法 ……………………………………… (166)
13.4 求解案例 ……………………………………………………………… (169)
13.4.1 Prim 算法求解 …………………………………………………… (169)
13.4.2 Kruskal 算法求解 ………………………………………………… (170)
13.4.3 Kruskal 与 Prim 算法比较 ……………………………………… (172)
实验题 …………………………………………………………………… (172)

第十四章　最短路径及算法 ······ (174)
14.1　问题的提出 ······ (174)
14.2　最短路径问题和算法的类型 ······ (175)
14.3　从一顶点到其余各顶点的最短路径算法 ······ (176)
14.3.1　Dijkstra 算法的思想 ······ (176)
14.3.2　Dijkstra 算法 ······ (176)
14.3.3　Dijkstra 算法求解 ······ (178)
14.3.4　Dijkstra 最短路径算法的特点和适应范围 ······ (180)
14.4　任意两顶点间的最短路径算法 ······ (180)
14.4.1　Floyd 算法的思想 ······ (181)
14.4.2　Floyd 算法 ······ (181)
14.4.3　Floyd 算法求解 ······ (183)
14.4.4　Dijkstra 算法与 Floyd 算法比较 ······ (184)
14.5　可化为最短路径问题的多阶段决策问题 ······ (185)
14.5.1　问题的提出 ······ (185)
14.5.2　模型建立 ······ (185)
实验题 ······ (186)

第五篇　数学建模与竞赛

第十五章　数学建模竞赛概况 ······ (188)
15.1　数学建模与数学建模竞赛 ······ (188)
15.1.1　数学建模 ······ (188)
15.1.2　大学生数学建模竞赛 ······ (190)
15.2　数学建模竞赛论文的撰写 ······ (192)

第十六章　数学建模综合案例 ······ (194)
16.1　电力市场的输电阻塞管理 ······ (194)
16.1.1　优秀论文 ······ (194)
16.1.2　评阅要点 ······ (207)
16.2　Cell Phone and Energy Saving ······ (209)

参考文献 ······ (232)

第一篇 方程模型

自然科学、工程技术以及社会经济领域中的许多问题常常归结为建立方程（组）并求解。比如研究大型的土建结构、机械结构、输电网络、管道网络，研究经济规划、人口增长、种群繁殖等问题时，简单的分析可以直接归结为线性或非线性方程组，复杂一些要用到（偏）微分方程。

第一章 方程（组）模型

方程对于学过初等数学的人来说是比较熟悉的，方程是把研究的问题中的因变量和自变量之间的关系找出来，列出包含一个自变量或几个自变量的一个或者多个方程式，然后求取方程（组）的解。若干世纪以来，工程师和科学家花了大量的时间用于求解方程（组），数学家研究各种各样的方程求解方法。大家早在初等数学课里就已熟悉解线性方程组，线性方程组的理论也在线性代数课里学习过，但是那里的知识远不能满足解决实际问题的需要，大型的线性/非线性方程组通常需要数值方法求解。随着计算机技术的发展，也使我们求解方程变得容易了。

本章我们就是要学习求解线性方程组、非线性方程（组）的方法，以及利用数学软件 MATLAB 对方程和方程组进行求解。

1.1 问题的提出

汽车刹车模型：汽车司机在行驶过程中发现前方出现突发事件，会紧急刹车，人们把从司机决定刹车到车完全停止这段时间内汽车行驶的距离，称为刹车距离。常识告诉我们，车速越快，刹车距离越长。那么，刹车距离和车速之间是什么关系呢？

（1）假设刹车距离 S 等于反应距离 S_1 与制动距离 S_2 之和。

$$S = S_1 + S_2 \tag{1.1}$$

（2）反应距离 S_1 与车速 v 成正比，k_1 为反应时间。

$$S_1 = k_1 v \tag{1.2}$$

(3) 设刹车时使用最大制动力 F，且 F 与车的质量 m 成正比。那么，F 做的功等于汽车动能的改变，汽车做匀减速运动，a 为常数。

$$FS_2 = \frac{1}{2}mv^2,\ F = ma$$

得：$S_2 = k_2 v^2$ (1.3)

将式(1.1)(1.2)代入(1.3)得到

$$S = k_1 v + k_2 v^2 \tag{1.4}$$

式（1.4）建立了刹车距离与车速之间的数学模型，是一个非线性方程，但系数未定。系数 k_1 和 k_2 虽然有一定的物理意义，但难以从机理上确定。k_1 和 k_2 取决于司机个人状况和汽车的物理特征和性能，对于不同的人或不同的车取值不同。本例可以通过若干次的试验数据，利用后面介绍的数据拟合的方法，求得某司机驾驶某辆车时的 k_1 和 k_2（此值并不具有一般性）。然后就可以计算在指定的任何车速时的刹车距离。

1.2 非线性方程的求解方法

对于非线性方程 $f(x)=0$ 的解，我们通常采用这样的几种方法：因式分解法、图形放大法、数值迭代逼近法。

因式分解法：这个方法的关键在分解因式，包括对多项式函数、三角函数和指数函数等的分解。但对于无法进行分解的函数则无能为力。这是我们最熟悉、常用的一种方法，在初等数学中已经学过，这里不再赘述。

图形放大法：由于计算机的广泛应用，可以非常方便地作出函数 $f(x)$ 的图形（曲线），找出曲线与 x 轴的交点的横坐标值，就可求出 $f(x)=0$ 的近似根。这些值尽管不精确，但是直观，方程有多少个根、在什么范围，一目了然。并且可以借助于计算机使用图形局部放大功能，将根定位得更加准确。

数值方法：利用图形的方法或连续函数的零点存在性定理，可以推知 $f(x)$ 在某一区间内有根，我们就可以用数值方法来求方程的根，这就是迭代逼近法。

迭代逼近法分为区间的迭代和点的迭代。

区间迭代又分为二分法和黄金分割法；点的迭代又分为简单迭代法、牛顿法等。迭代失败后又可以采用加速迭代收敛方法。

1.2.1 图形放大法

用图形放大法求解方程 $f(x)=0$ 的步骤：

（1）建立坐标系，作曲线 $f(x)$；

（2）观察 $f(x)$ 与 x 轴的交点；

（3）将其中的一个交点进行局部放大；

（4）该交点的横坐标值就是方程的一个根；

（5）对所有的交点进行相同的处理，就得到方程的所有解。

例 1.1　求方程 $3x-e^x=0$ 所有的根及大致分布范围，欲寻求其中的一个实根，并且达到一定的精度。

解：（1）画出 $f(x)=3x-e^x$ 的图形；

```
x = -5: 0.01: 5;
y = 3 * x - exp(x);
plot(x,y)
grid on;% 画坐标格
```

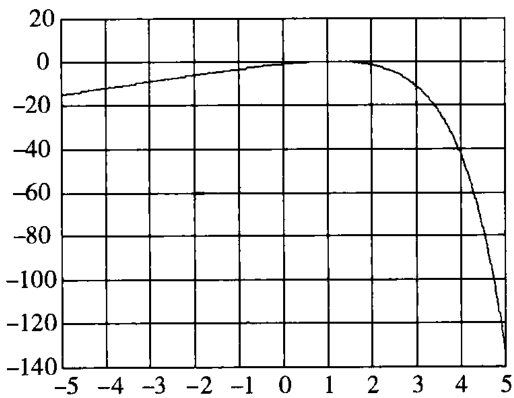


图 1.1　函数 $f(x)$ 的图形

我们可以看出方程只在 0 ~ +2 范围有实根。

（2）逐次缩小范围得到较精确的根。

```
x = 0.6: 0.01: 0.65;
y = 3 * x - exp (x);
plot (x, y)
grid on;% 画坐标格
```

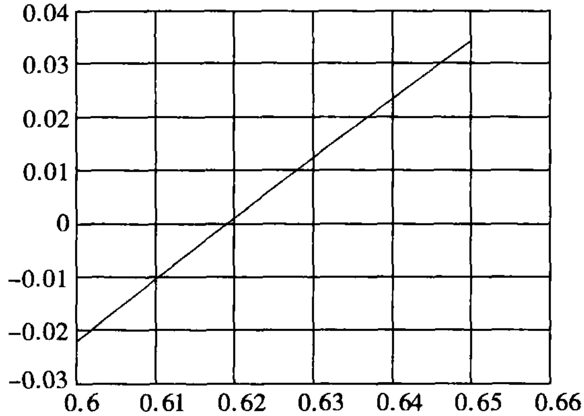


图 1.2　局部放大后 f（x）的图形

因此我们可以看出这个实根的值比 0.62 稍小。

1.2.2　简单迭代法

对方程 $f(x)=0$ 求解迭代算法步骤：

（1）对方程经过简单变形得到 $x=\varphi(x)$（不是唯一的）；

（2）设置 x_0 为迭代初值，迭代过程为 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$，$n=0$，1，2，…；

（3）当两次迭代结果之差小于某个设定的误差值时，我们认为迭代结果是收敛的，可得到结果的近似值 $x=x_{n+1}$。

例 1.2　求方程 $3x-e^x=0$ 的非负实根。

解：由于函数 $3x-e^x$ 连续，并且在 $x=0$ 和 $x=1$ 处函数值符号相反，可以判断函数在区间（0，1）必有零点，即方程 $3x-e^x=0$ 在（0，1）内必然存在根。

（1）先将函数变形为 $x=e^x/3$；

（2）设置迭代初值为 0，编程进行迭代。

```
n=1; x=0;
y=exp(x)/3;
z=abs(y-x);
while z>10^(-5)
x=y;
y=exp(x)/3;
z=abs(y-x);
n=n+1;
```

```
end
n, y
```

计算结果为：

n =21; y =0.6190

从该结果可以看出，迭代21次后两次迭代的结果误差值满足小于10^{-5}的条件，结果收敛，迭代结果为0.6190。结果比例1.1求出的值精确。

例1.3　用迭代方法求解方程$x^3-x^2-x-1=0$

解：（1）对方程变形为$x=\varphi(x)$，有不同的形式，比如

$$x=x^3-x^2+1; \tag{1.5}$$

$$x=\sqrt[3]{x^2+x+1}; \tag{1.6}$$

$$x=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}; \tag{1.7}$$

（2）设定初始值为1，编程迭代求解

```
x=1; y=1; z=1;
for k=1: 25
x=x^3-x^2-1;
y=(y^2+y+1)^(1/3);
z=1+1/z+1/z^2;
end
x, y, z
```

计算结果是：

x = -Inf; y =1.8393; z=1.8393

在程序中，函数x，y，z分别对应方程（1.5）、（1.6）、（1.7），从结果可以看出方程（1.5）不收敛，结果趋于负无穷大，方程（1.6）（1.7）收敛，结果为1.8393。而且，还可证明（b）比（c）收敛速度快。

注：这段程序和例1.2有所不同，这里是设定了固定的迭代次数。为什么？

1.2.3　迭代失败的改进：加速迭代收敛方法

例1.3中方程（1.5）的迭代是失败的（即迭代不收敛），如何解决？

当我们遇到迭代失败时，可以采用以下的简单方法解决。

我们考虑不直接用$\varphi(x)$迭代，而用$\varphi(x)$和x的加权平均$h(x)=\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)x$进行迭代，$\lambda$为参数。

即：$x_{n+1}=h(x_n)$