高中数学 新课程

学习指导

5 必修

北师大版

与北师大版普通高中课程标准
实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室 编

大象出版社

高中数学 新课程

学习指导

5 必修

北师大版

与北师大版普通高中课程标准实验教科书配套

河南省基础教育教学研究室 编

大象出版社

欢迎登录大象教育资源网

大象出版社是我省唯一一家专业教育出版机构，也是我省唯一一家全国优秀出版社。大象教育资源网是大象出版社为全省师生提供的数字化时代产品服务平台。旨在为教师、学生、家长提供便捷、互动、多层次的立体服务。

登录“大象教育资源网”，您可获得：

1.海量的试题资源

海量的优质试卷、专业的试题搜索引擎，使教师的课堂教学和学业评价更方便。

2.便捷的电子化服务

为节省学生的学习成本，大象版教学辅导类图书的参考答案将逐步上网公布。同时，为实现教学辅导的多层次、全方位，网站还会加大网络产品开发力度，满足读者的不同需求。

3.强大的驻站专家阵容

网站将陆续邀请一批省内外特高级教师进站，加强网站内容建设，为教师、学生提供高质量、高品位的服务。

4.丰富的网上网下活动

专家视频讲座，使学生的学习变得更轻松；驻站专家深入教学一线作有针对性的专题报告，名师与学生零距离接触，面对面解决疑难问题。

5.权威的中高考指导

利用网络快捷、便利的优势，对学生的中考和高考复习作动态指导。

6.周到的个性化服务

驻站专家会及时为学生和教师答疑解惑。学习的困惑，教学的困扰，都会在这里得到专家的点拨。

7.及时的考试信息

网站会为教师、学生、家长搜集整理最新的中高考信息，并提供详细的政策解读。

8.家庭教育服务

专家解读家庭教育细节，为孩子量身定做成长方案，和家长共同关注孩子的健康成长。

欢迎您登录大象教育资源网一展风采

网址：www.daxiang.cn

编写说明

从2008年秋季开始，河南省全面进入普通高中新课程改革。为了新课程实验在我省的顺利实施，为了更好地服务于高中教学，河南省基础教育教学研究室和大象出版社在深入调研、充分论证的基础上，对传统品牌教辅“高中学习指导”进行重新定位，重新组织开发了“高中新课程学习指导”丛书。这套丛书已于2008年秋季开始在全省推广使用。

遵循推进课改、利于教学的原则，树立以学生发展为本的教育理念，由省内外教研专家和高中一线名师倾力打造的“高中新课程学习指导”具有以下特色：**基础性**——体现基础教育教学改革的精神，为学生的终身发展奠定基础；**选择性**——提供个性化、多样化的学习资源，为促进学生全面而有个性的发展创造广阔的自主学习空间；**适用性**——为河南省高中学生量身定做；**创新性**——站在课改前沿，依据新课程理念，培养学生创新精神。

“高中新课程学习指导”按课时编写，设置的主要栏目有：

自主探究学习　学生是学习的主体，通过自主学习、探究学习，不断提高学习能力。

名师要点解析　名师解析学习中的重点、难点、盲点和易错点。

课堂基础自测　课堂是学习的主战场，通过基础练习，巩固课堂所学知识。

综合能力拓展　发散思维、凝聚要点，培养学生的综合能力。

每单元(章)设置的主要栏目有：

知识要点归纳　对本单元(章)知识的整合和提炼，帮助学生巩固学习要点。

高考同步链接　为学生打开高考的一面窗，让他们走进高考、感悟高考。

单元(本章)综合测试　通过综合性的训练，促进对本单元(章)知识的全面掌握。

(上述各栏目的设置，个别学科因为教材特点略有不同)

为方便同学们对所学知识进行自我检验，在各单元(章)讲解和训练之后还设置了“**阶段评价测试**”；在全书最后附有“**习题详解点拨**”，对所有习题提供详尽的答案和解题思路。

本套丛书包括思想政治、语文、数学、英语、物理、化学、历史、地理、生物九个学科，涉及在我省实验的各种教材版本。

参加本册编写的作者是杜瑜、冯瑞先、陈刚、王国平、王东红、温瑞丽、王继禹同志，参加2010年版修订工作的作者是王雷义、焦金安同志，最后由骆传枢、张海营、刘志凤同志统稿。

对使用中发现的错谬缺漏之处，恳请广大师生批评指正。

河南省基础教育教学研究室

大象出版社出版的高中《实验报告册》紧扣配套教材，包括物理、化学、生物三个学科，各册内容主要由三大部分构成：实验规则、各个具体实验内容、实验习题参考答案。

这套书有以下特色：

一、高效。打破了以往教师先讲解，学生再模拟操作的低效实验模式，在探究式的实验中，可以培养学生主动实验的兴趣，提高其实践能力，并加强交流与合作。

二、合理。真正做到了引导学习，让学生知道在实验中应该做什么、怎样做，并积极、主动地参与进去。同时，注重培养学生的实验探究意识。

三、科学。在实验的环节设置上，除了基本的探究过程以外，还增设了“实验指导”、“实验预习”、“问题思考”等环节，帮助学生更好地准备实验和巩固实验。可以说这套《实验报告册》能够引导学生自主完成相关实验，并很好地掌握实验。

四、新颖。在实验环节中，设计了很多新的亮点，比如：选择实验器材时，给学生一个表格，表格中列有与实验有关和无关的器材，要求学生自己选择合适的器材，这样，在做实验的同时也对学生能力进行了考查。

五、贴心。实验之后的“问题思考”，选取的都是高考的热点问题，是参考新课改地区的高考题精心编制的，为学生掌握实验的重点提供切实的服务。

全书内容丰富、全面，贴近高考，美观实用。

序号	书　　名	配套教材	估价（元）
1	高中物理实验报告册（新课标必修 1）	人教版	6.00
2	高中物理实验报告册（新课标必修 2）	人教版	6.00
3	高中化学实验报告册（新课标必修 1）	人教版	6.50
4	高中化学实验报告册（新课标必修 2）	人教版	8.00
5	高中生物实验报告册（新课标必修 1）	人教版	6.00
6	高中生物实验报告册（新课标必修 2）	人教版	5.50
7	高中生物实验报告册（新课标必修 3）	人教版	7.50

高中《实验报告册》

目　录

第一章　数　　列

§1　数列

1.1　数列的概念

自主探究学习

1. 数列定义：________________叫作数列；数列的一般形式：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记作________. 数列中的每个数都叫作这个数列的________，记作________. 在数列第1个位置的项叫第1项（或________），在第2个位置的项叫第2项……在第n个位置的项叫第n项（也叫________），记作________.

2. 数列分类：按数列项数是有限还是无限可分为________和________.

3. 通项公式的定义：如果数列$\{a_n\}$的第n项与n之间的关系可以用一个公式表示，那么这个公式就叫作这个数列的通项公式，公式为________.

名师要点解析

【要点导学】

1. 数列的数是按一定次序排列的，因此，如果组成两个数列的数相同而排列次序不同，那么它们就是不同的数列；定义中并没有规定数列中的数必须不同，所以同一个数在数列中可以重复出现. 因此，数列的特征是确定性、有序性、可重复性，这与集合的确定性、无序性、互异性特征是有区别的.

2. 对于数列的通项公式要掌握：

(1) 数列通项公式的作用：从映射、函数的观点来看，数列也可以看作是一个定义域为正整数集$\mathbf{N}_+$（或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$）的函数，当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值，数列的通项公式就是相应函数的解析式. 因此，若求出了数列的通项公式，就可以：①求数列中任意一项；②检验某数是不是该数列中的一项.

(2) 不是每个数列都有通项公式，例如：1，1.4，1.41，1.414，…

(3) 根据数列的前几项，写出数列的一个通项公式，这是一个难点，在学习中要注意观察数列中各项与其序号的变化情况，分解所给数列的前几项，看看这几项的分解中哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中变化部分与序号的联系，从而归纳出构成数列的规律，写出通项公式.

3. 注意培养综合运用观察、归纳、猜想、证明等方法的能力：

综合运用观察、归纳、猜想、证明等方法研究数学，是一种非常重要的学习能力. 事实上，在问题探索求解中，常常是先从观察入手，发现问题的特点，形成解决问题的初步思路；然后用归纳方法进行试探，提出猜想；最后采用证明方法（或举反例）来检验所提出的猜想. 应该指出，能够充分进行上述研究方法训练的素材在高中数学里并非很多，而在本节甚至本章里却多次提供了这种训练机会，因而在学习中应该充分利用，不要轻易放过.

【经典例题】

【例1】 观察图1－1所示的钢管堆放示意图，探究：

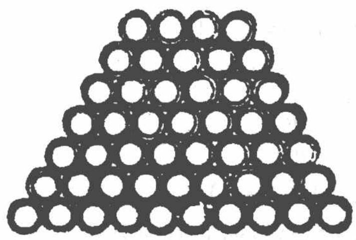

图1－1

(1) 上、下层之间的关系；

(2) 每一层的钢管数.

【分析】 仔细观察上、下层之间的关系，每一层的钢管数与其层数之间的关系，寻找对应的变化规

律，就可以建立数学模型.

【解】用 a_n 表示钢管数，n 表示层数.

(1)经观察，发现自上而下每一层的钢管数都比上一层钢管数多1，

即 $a_1=4, a_2=5=4+1=a_1+1$，

$a_3=6=5+1=a_2+1$，

…

依此类推：$a_n=a_{n-1}+1(2\leqslant n\leqslant 7)$.

(2)自上而下：

第1层钢管数为4，即：$1\leftrightarrow 4=1+3$；

第2层钢管数为5，即：$2\leftrightarrow 5=2+3$；

第3层钢管数为6，即：$3\leftrightarrow 6=3+3$；

第4层钢管数为7，即：$4\leftrightarrow 7=4+3$；

第5层钢管数为8，即：$5\leftrightarrow 8=5+3$；

第6层钢管数为9，即：$6\leftrightarrow 9=6+3$；

第7层钢管数为10，即：$7\leftrightarrow 10=7+3$.

由此可得出每一层的钢管数为一数列，即：

$a_n=n+3(1\leqslant n\leqslant 7)$.

【点拨】运用每一层的钢管数与其层数之间的对应规律建立了数列模型，运用这一关系，会很快捷地求出每一层的钢管数. 这会给我们的统计与计算带来很多方便. 每一项序号与这一项的对应关系可看成是一个序号到另一个数集的对应关系.

【例2】写出下列数列的一个通项公式，使它的前4项分别是下列各数：

(1)1，3，7，15；

(2)$-1,1,-1,1$；

(3)$\frac{1}{3},\frac{4}{5},\frac{9}{7},\frac{16}{9}$；

(4)0，2，0，2.

【分析】注意观察 a_n 与 n 的变化特征，寻找 a_n 与 n 的对应关系 $a_n=f(n)$.

【解】(1)$a_n=2^n-1$；

(2)$a_n=(-1)^n$；

(3)$a_n=\frac{n^2}{2n+1}$；

(4)$a_n=1+(-1)^n$.

【点拨】写出数列的通项公式：

(1)关键是寻找 a_n 与 n 的对应关系 $a_n=f(n)$；

(2)符号用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 来调节；

(3)分式的分子、分母可以分别找通项，但要充分借助分子与分母的关系；

(4)并不是每一个数列都有通项公式，即使有通项公式，通项公式也未必是唯一的；

(5)对于形如 $a,b,a,b,\cdots$ 的数列，其通项公式均可写成 $a_n=\frac{a+b}{2}+(-1)^{n+1}\frac{a-b}{2}$.

【例3】(1)已知数列 $\{a_n\}$ 适合：$a_1=1, a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$，写出前5项及数列的通项公式；

(2)用上面的数列 $\{a_n\}$，通过等式 $b_n=a_n-a_{n+1}$ 构造新数列 $\{b_n\}$，写出 b_n，并写出 $\{b_n\}$ 的前5项.

【分析】注意分析 a_n 与 n 之间的函数关系特征.

【解】(1)$a_1=1, a_2=\frac{2}{3}, a_3=\frac{2}{4}, a_4=\frac{2}{5}, a_5=\frac{2}{6},\cdots$

则 $a_n=\frac{2}{n+1}$；

(2)$b_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$，

$b_1=\frac{1}{3}, b_2=\frac{1}{6}, b_3=\frac{1}{10}, b_4=\frac{1}{15}, b_5=\frac{1}{21}$.

课堂基础自测

1. 下列是数列1，0，2，0，3，…的通项公式的是　【　　】

A. $a_n=\frac{n-(-1)^n n}{2}$

B. $a_n=\frac{(n+1)[1-(-1)^n]}{4}$

C. $a_n=\begin{cases}n, n\text{ 为奇数}\\0, n\text{ 为偶数}\end{cases}$

D. $a_n=\frac{(n-1)[1-(-1)^n]}{4}$

2. 某数列第1项为1，并且对所有 $n\geqslant 2(n\in\mathbf{N}_+)$，数列的前 n 项之积为 n^2，则这个数列的通项公式是　【　　】

A. $a_n=2n-1$

B. $a_n=n^2$

C. $a_n=\frac{n^2}{(n-1)^2}$

D. $a_n=\frac{(n+1)^2}{n^2}$

3. 打一口深20米的井，打到1米深处时需要40分钟，从1米深处打到2米深处需要50分钟，以后每打深1米都要比打前1米多用10分钟，则打最后1米时要用________小时.

4. 根据数列前 5 项，写出它的一个通项公式：

(1) $\frac{2^2-1}{2},\frac{3^2-1}{3},\frac{4^2-1}{4},\frac{5^2-1}{5},\frac{6^2-1}{6}$;

(2) $-\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},-\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},-\frac{1}{5\times6}$;

(3) 1, 3, 3, 5, 5;

(4) 2, −6, 12, −20, 30.

5. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=2,a_{17}=66$，通项公式是项数 n 的一次函数.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)88 是不是数列$\{a_n\}$中的项？

综合能力拓展

6. 已知数列 1,4,7,10,…,$3n+7$，则这个数列的一个通项公式为________.

7. 已知 $a_n=\log_{n+1}(n+2)(n\in\mathbf{N}_+)$，观察下列运算：

$$a_1\cdot a_2=\log_2 3\cdot\log_3 4=\frac{\lg3}{\lg2}\cdot\frac{\lg4}{\lg3}=2.$$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot a_6$$
$$=\log_2 3\cdot\log_3 4\cdot\cdots\cdot\log_6 7\cdot\log_7 8$$
$$=\frac{\lg3}{\lg2}\cdot\frac{\lg4}{\lg3}\cdot\cdots\cdot\frac{\lg7}{\lg6}\cdot\frac{\lg8}{\lg7}=3.$$

…

定义使 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_k$ 为整数的 $k(k\in\mathbf{N}_+)$叫作企盼数. 试确定当 $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_k=2008$ 时，企盼数 $k=$________.

8. 已知 $a_1=2,a_{n+1}=2a_n$，写出前 5 项，并猜想 a_n.

1.2 数列的函数特性

自主探究学习

从函数的角度看,数列按项与项之间的单调关系可分为:

(1)如果从第2项起,每一项都大于它前面的一项,即 $a_{n+1}>a_n$,那么这个数列叫作________;

(2)如果从第2项起,每一项都小于它前面的一项,即 $a_{n+1}<a_n$,那么这个数列叫作________;

(3)如果这个数列的各项都相等,那么这个数列叫作________.

名师要点解析

【要点导学】

1. 数列是一种特殊的函数,自变量是项数 n,对应的函数值是 a_n;由于 $n\in\mathbf{N}_+$,所以数列是一种特殊的离散函数.

2. 判断函数的单调性,只需要比较 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系.若根据 a_n 与 a_{n-1} 的大小关系来判断,应注意"$n\geqslant2$".

3. 对于函数,我们可以根据函数解析式画出其对应的图像;数列是特殊的函数,因此,数列也可以根据其通项公式画出其对应图像.画图时一定要注意它的"离散性($n\in\mathbf{N}_+$)"特征,不能用平滑曲线把这些孤立的点连起来.

【例1】 数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_n=\dfrac{n^2+n-1}{3}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)写出 a_{10},a_{n+1},a_{n^2};

(2)$79\dfrac{2}{3}$ 是不是数列中的项?若是,是第几项?

【分析】 结合数列通项公式的函数特征,注意 a_n 是关于 n 的函数,$n=1,2,3,\cdots$

【解】 (1)$\because\quad a_n=\dfrac{n^2+n-1}{3}(n\in\mathbf{N}_+)$,

$\therefore\quad a_{10}=\dfrac{10^2+10-1}{3}=\dfrac{109}{3}$,

$a_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2+(n+1)-1}{3}=\dfrac{n^2+3n+1}{3}$,

$a_{n^2}=\dfrac{(n^2)^2+n^2-1}{3}=\dfrac{n^4+n^2-1}{3}$.

(2)令 $79\dfrac{2}{3}=\dfrac{n^2+n-1}{3}$,

解方程得 $n=15$ 或 $n=-16$,

$\because\quad n\in\mathbf{N}_+$,

$\therefore\quad n=15$,即 $79\dfrac{2}{3}$ 为该数列的第15项.

【点拨】 本题考查数列通项的定义及数列的函数特性,会判断数列项的归属.注意 n 是自变量,a_n 随 n 的变化而变化:$a_n=f(n)$,$a_{n+1}=f(n+1)$,$\cdots$.

【例2】 已知 $a_n=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}(n\in\mathbf{N}_+)$,问:数列 $\{a_n\}$ 是否有最大项?如果有,求出这个数列的最大项;如果没有,请说明理由.

【分析】 先考虑数列 $\{a_n\}$ 的单调性,然后利用单调性求其最值.

【解】 $a_{n+1}-a_n$

$=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}(n+2)-\left(\dfrac{9}{10}\right)^n(n+1)$

$=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}\left[(n+2)-\left(\dfrac{10}{9}\right)(n+1)\right]$

$=\left(\dfrac{9}{10}\right)^{n+1}\dfrac{8-n}{9}$.

令 $a_{n+1}-a_n>0$,得 $n<8$,而 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n\leqslant7$;

令 $a_{n+1}-a_n=0$,得 $n=8$;

令 $a_{n+1}-a_n<0$,得 $n>8$,而 $n\in\mathbf{N}_+$,所以 $n\geqslant9$.

则数列 $\{a_n\}$ 的单调性是

$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_7<a_8$,

且 $a_8=a_9>a_{10}>a_{11}>a_{12}>\cdots$

故数列 $\{a_n\}$ 存在最大项,且最大项为:

$a_8=a_9=\dfrac{9^9}{10^8}$.

【点拨】 求数列的最大、最小值要判断它的单调性.要注意使 a_n 取最值的 n 的值必须是正整数.另外,本题中由于 $a_n>0$,所以还可以利用 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 与1比较,从而判断 a_{n+1} 与 a_n 的大小关系.

【例3】 已知函数 $f(x)=2^x-2^{-x}$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $f(\log_2 a_n)=-2n$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)证明数列 $\{a_n\}$ 是递减数列.

【分析】 利用函数关系式,建立关于 a_n 的方程,求得 a_n 与 n 的关系,然后判断数列的单调性.

【解】 (1)$\because\quad f(x)=2^x-2^{-x}$,$f(\log_2 a_n)=-2n$,

$\therefore\quad 2^{\log_2 a_n}-2^{-\log_2 a_n}=-2n$.

则 $\quad a_n-\dfrac{1}{a_n}=-2n$.

$\therefore\quad a_n^2+2na_n-1=0.$

解得　$a_n=-n\pm\sqrt{n^2+1}.$

$\because\quad a_n>0,$

$\therefore\quad a_n=\sqrt{n^2+1}-n.$

(2)由(1),得

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)}{\sqrt{n^2+1}-n}$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<1.$$

又$\because\quad a_n>0,\therefore\quad a_{n+1}<a_n.$

故数列$\{a_n\}$是递减数列.

【点拨】利用函数与方程思想是解决本题的关键,其中$a_n>0$容易被忽视,解题中应挖掘出这一条件,根据限制条件做到合理取舍.第(2)题中的转化技巧实质上是分子与分母同时“有理化”.

课堂基础自测

1. 数列的通项公式$a_n=f(n)$,作为函数,它的定义域是　　【　　】

A. 非负整数

B. 正整数集

C. 正整数集或它的有限子集

D. 以上均不是

2. 函数$f(n)=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$,当自变量依次取正整数1,2,3,…,n,…时,对应的函数值以数列形式表示为　　【　　】

A. $-1,1,-1,1$

B. $-1,-1,1,1,-1,-1,1,1$

C. $-1,-1,1,1,-1,-1,\cdots,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

D. $-1,-1,1,1,-1,-1,\cdots,(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},\cdots$

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\dfrac{n-\sqrt{98}}{n-\sqrt{99}}(n\in\mathbf{N}_+)$,则这个数列的前30项中,最大项和最小项分别是　　【　　】

A. a_{10},a_9　　B. a_1,a_9

C. a_1,a_{30}　　D. a_9,a_{30}

4. 若数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-10n(n=1,2,3,\cdots)$,则数列$\{na_n\}$中数值最小的项是第________项.

5. 数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,\left(0\leqslant a_n<\dfrac{1}{2}\right)\\ 2a_n-1,\left(\dfrac{1}{2}\leqslant a_n<1\right)\end{cases}$若$a_1=\dfrac{6}{7}$,则$a_2=$________,$a_{24}=$________.

6. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$,求证数列$\{a_n\}$为递减数列.

7. 若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n^2+13n$,画出它在x轴上方的图像,请根据图像求出a_n的最大值;并在同一坐标系中画出函数$f(x)=-2x^2+13x$的图像,根据图像求出$f(x)$的最大值,并与a_n的最大值进行比较.

综合能力拓展

8. 数列$\{a_n\}$中，$a_n=n^2+2\lambda n$，满足$a_1>a_2$，当$n\geq 2$时，$a_{n+1}>a_n$，则实数λ的取值范围是__________________.

9. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{1}{4}n^2-\frac{17}{12}n+\frac{13}{6}(n\in\mathbf{N}_+)$.

(1)是否存在等于$\frac{1}{2}$的项？为什么？

(2)此数列是否有相等的连续两项？若有，它们分别是哪两项？若没有，说明理由.

(3)此数列是否有值最小的项？为什么？

10. 已知$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N}_+)$，并记$f(n)=S_{2n+1}-S_{n+1}$.

(1)证明$f(n+1)>f(n)$；

(2)试确定实数m的取值范围，使得对于一切大于1的自然数n，$f(n)>[\log_m(m-1)]^2-\frac{11}{20}(\log_{m-1}m)^2$恒成立.

§2 等差数列

2.1 等差数列

自主探究学习

1. 等差数列定义：一般地，如果一个数列从第2项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫________，这个常数叫作等差数列的________，它通常用字母d表示.

2. 等差数列的通项公式：__________________.

3. 等差数列的单调性：$d>0$为________数列；$d=0$为________数列；$d<0$为________数列.

4. 等差中项的概念：如果a,A,b成等差数列，那么A叫作a与b的________. a,A,b成等差数列$\Leftrightarrow$________.

名师要点解析

【要点导学】

1. 等差数列定义$a_{n+1}-a_n=d$(d为常数，$n\in\mathbf{N}_+$)，这是证明一个数列是等差数列的依据，要防止仅由前若干项，如$a_3-a_2=a_2-a_1=d$(常数)，就说$\{a_n\}$是等差数列这样的错误.

2. 等差数列的通项公式可整理成$a_n=dn+(a_1-d)$，形如"$a_n=pn+q$ (p,q是常数)"，可见，当$d\neq 0$时，等差数列的每一项a_n是关于项数n的一次函数式；它的图像是在同一条直线上，n为自然数的点的集合. 于是可以利用一次函数的性质来认识等差数列. 例如，根据一次函数的图像是一条直线和直线由两个点唯一确定的性质，就容易理解为什么两项可以确定一个等差数列.

3. 等差数列的性质：

(1)在等差数列$\{a_n\}$中，从第2项起，每一项是它相邻两项的等差中项；因此，判断一个数列是不是等差数列，还可由$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$即$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$来判断.

(2)在等差数列$\{a_n\}$中，相隔等距离的项组成的数列也是等差数列，如：$a_1,a_3,a_5,a_7,\cdots$；$a_3,a_8,a_{13},a_{18},\cdots$，它们的公差分别为$2d,5d$.

(3)在等差数列$\{a_n\}$中，对任意$m,n\in\mathbf{N}_+$，$a_n=a_m+(n-m)d$. 因为$a_n=a_1+(n-1)d$，$a_m=a_1+(m-1)d$，所以$a_n-a_m=(n-m)d$，所以$a_n=a_m+(n-m)d$.

(4)在等差数列$\{a_n\}$中,若$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$且$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$,即$m+n=p+q\Rightarrow a_m+a_n=a_p+a_q(m,n,p,q\in\mathbf{N}_+)$.因为$a_m-a_p=(m-p)d,a_q-a_n=(q-n)d,m-p=q-n$,所以$a_m-a_p=a_q-a_n$.所以$a_m+a_n=a_p+a_q$.

但通常,由$a_m+a_n=a_p+a_q$推不出$m+n=p+q$;$a_m+a_n=a_{m+n}$也是不成立的.

【经典例题】

【例1】在某报《自测健康状况》的报道中,自测血压结果与相应年龄的统计数据如下表.观察表中数据的特点,用适当的数填入表中空白处.

年龄(岁)	30	35	40	45	50	55	60	65
收缩压(毫米水银柱)	110	115	120	125	130	135	(__)	145
舒张压(毫米水银柱)	70	73	75	78	80	83	(__)	88

【分析】从题目所给数据规律可以看到:收缩压是等差数列;舒张压的数据变化也很有规律,随着年龄的变化,舒张压间隔增加了3毫米、2毫米……照此规律,60岁时的收缩压和舒张压分别为140,85.

【答案】140　85

【点拨】本题以实际问题为背景,考查了如何把实际生活中的问题转化为数学问题的能力.它不需要技能、技巧及繁杂的计算,但需要有一定的数学意识,能有效地把数学过程转化为数学思维活动.

【例2】在等差数列$\{a_n\}$中,若$a_1+a_6=9,a_4=7$,求a_3,a_9.

【分析】要求一个数列的某一项,通常情况下是先求其通项公式,而要求通项公式,必须知道这个数列中的至少一项和公差,或者知道这个数列的任意两项(知道任意两项就知道公差).本题中,只已知数列中的一项和一个双项关系式,可想到从这个双项关系式入手.

【解】$\because$　$\{a_n\}$是等差数列,

$\therefore$　$a_1+a_6=a_4+a_3=9$.

$\therefore$　$a_3=9-a_4=9-7=2$.

$\therefore$　$d=a_4-a_3=7-2=5$.

$\therefore$　$a_9=a_4+(9-4)d=7+5\times5=32$.

$\therefore$　$a_3=2,a_9=32$.

【点拨】本题解题中运用了等差数列的性质:在等差数列$\{a_n\}$中,若$m,n,p,q\in\mathbf{N}_+$且$m+n=p+q$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

【例3】设数列$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$满足:$b_n=a_n-a_{n+2},c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}(n=1,2,3,\cdots)$.

(1)证明:若$\{a_n\}$为等差数列,则$\{c_n\}$也为等差数列,且$b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$;

(2)反之,若$\{c_n\}$为等差数列且$b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,$\{a_n\}$是否也为等差数列呢?

【分析】充分结合等差数列的定义和相关性质来进行判断.

(1)**【证明】**设数列$\{a_n\}$是公差为d_1的等差数列,则:

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}-a_{n+3})-(a_n-a_{n+2})=(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+3}-a_{n+2})=d_1-d_1=0$,

$\therefore$　$b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$成立.

又　$c_{n+1}-c_n=(a_{n+1}-a_n)+2(a_{n+2}-a_{n+1})+3(a_{n+3}-a_{n+2})=6d_1$(常数)$(n=1,2,3,\cdots)$,

$\therefore$　数列$\{c_n\}$为等差数列.

(2)**【解】**$\{a_n\}$也为等差数列,原因如下:

设数列$\{c_n\}$是公差为d_2的等差数列,且$b_n\leqslant b_{n+1}(n=1,2,3,\cdots)$,

$\because$　$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}$,　①

$\therefore$　$c_{n+2}=a_{n+2}+2a_{n+3}+3a_{n+4}$.　②

①-②得:$c_n-c_{n+2}=(a_n-a_{n+2})+2(a_{n+1}-a_{n+3})+3(a_{n+2}-a_{n+4})=b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}$,

$\because$　$c_n-c_{n+2}=(c_n-c_{n+1})+(c_{n+1}-c_{n+2})=-2d_2$,

$\therefore$　$b_n+2b_{n+1}+3b_{n+2}=-2d_2$.　③

从而有$b_{n+1}+2b_{n+2}+3b_{n+3}=-2d_2$.　④

④-③得:$(b_{n+1}-b_n)+2(b_{n+2}-b_{n+1})+3(b_{n+3}-b_{n+2})=0$.　⑤

$\because$　$(b_{n+1}-b_n)\geqslant0,b_{n+2}-b_{n+1}\geqslant0,b_{n+3}-b_{n+2}\geqslant0$,

$\therefore$　由⑤得:$b_{n+1}-b_n=0(n=1,2,3,\cdots)$.

由此,不妨设$b_n=d_3(n=1,2,3,\cdots)$,则$a_n-a_{n+2}=d_3$(常数).

故$c_n=a_n+2a_{n+1}+3a_{n+2}=4a_n+2a_{n+1}-3d_3$.　⑥

从而$c_{n+1}=4a_{n+1}+2a_{n+2}-3d_3=4a_{n+1}+2a_n-5d_3$.　⑦

⑦-⑥得:$c_{n+1}-c_n=2(a_{n+1}-a_n)-2d_3$,

故$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(c_{n+1}-c_n)+d_3=\frac{1}{2}d_2+d_3$(常数)$(n=1,2,3,\cdots)$.

$\therefore$数列$\{a_n\}$为等差数列.

【点拨】本题考查判断等差数列的方法.我们要把平时积累的方法巧妙应用,有些结论可以起到事

半功倍的效果.

课堂基础自测

1. 2 与 8 的等差中项是 【　　】

A. 4　B. ±4　C. 5　D. ±5

2. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_7+a_9=16$，$a_4=1$，则a_{12}的值是 【　　】

A. 15　B. 30　C. 31　D. 64

3. $\{a_n\}$是首项$a_1=1$，公差为$d=3$的等差数列，如果$a_n=2005$，则n等于 【　　】

A. 667　B. 668　C. 669　D. 670

4. 一个直角三角形的三条边成等差数列，则它的最短边与最长边的比为 【　　】

A. 4∶5　B. 5∶13　C. 3∶5　D. 12∶13

5. 设$\{a_n\}$为等差数列，则下列数列中，等差数列的个数为 【　　】

①$\{a_n^2\}$；②$\{pa_n\}$；③$\{pa_n+q\}$；④$\{na_n\}$.（p，q为非零常数）

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

6. 等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+3a_6+a_{11}=120$，则$2a_7-a_8=$________.

7. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}+1$（$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}_+$），则$a_5=$________.

8. (1)数列$\{a_n\}$中，$a_1=8$，$a_4=2$，且满足$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$（$n\in\mathbf{N}_+$），求数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2)数列$\{a_n\}$是首项为23，公差为整数的等差数列，且第6项为正，第7项为负. 求数列的公差.

综合能力拓展

9. 首项为-24的等差数列，从第10项起开始为正数，则公差的取值范围是 【　　】

A. $d>\frac{8}{3}$　　B. $d<3$

C. $\frac{8}{3}\leqslant d<3$　　D. $\frac{8}{3}<d\leqslant 3$

10. 已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列，则$|m-n|$等于 【　　】

A. 1　B. $\frac{3}{4}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{3}{8}$

11. 图1-2所示是一个等差数阵，其中每行每列都是等差数列，a_{ij}表示第i行第j列的数，则a_{66}的值是多少？

3	6	( )	( )	…	a_{1j}	…
6	10	( )	( )	…	a_{2j}	…
( )	( )	( )	( )	…	…	…
…	…	…	…	…	…	…
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	…	…	a_{ij}	…
…	…	…	…	…	…	…

图1-2

12. 如果一个数列的各项都是实数，且从第2项开始，每一项与它前一项的平方差是相同的常数，则称该数列为等方差数列，这个常数叫这个数列的公方差.

(1)设数列$\{a_n\}$是公方差为p的等方差数列，求a_n和$a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}_+)$的关系式；

(2)若数列$\{a_n\}$既是等方差数列，又是等差数列，证明该数列为常数列；

(3)设数列$\{a_n\}$是首项为2，公方差为2的等方差数列，若将$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$这种顺序的排列作为某种密码，求这种密码的个数.

2.2 等差数列的前n项和

自主探究学习

1. 数列的前n项和：数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$称为数列$\{a_n\}$的前n项和，记为________.

2. 等差数列的前n项的求和公式：$S_n=$________$=$________. 两个公式都表明要求S_n必须已知n,a_1,d,a_n中至少三项.

名师要点解析

【要点导学】

1. 等差数列的前n项和公式：$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，这种方法称为“倒序相加法”，是数列求和的一种常用方法.

2. 在数列$\{a_n\}$中，前n项和S_n与通项公式a_n的关系，也是本节的一个重点，要认真掌握. 由定义可知：$S_n-S_{n-1}=a_1+(n-1)d=a_n$，所以有如下结论：

$$a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1)\\ S_n-S_{n-1}. & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

特别要注意的是：当$n\geqslant 1$时，S_n才有意义；当$n-1\geqslant 1$即$n\geqslant 2$时，S_{n-1}才有意义. 若a_1适合由$a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$得到的表达式，则$a_n$不必表达成分段形式，可统一为一个式子.

【经典例题】

【例1】已知数列$\{a_n\}$的前n项之和为：①$S_n=2n^2-n$，②$S_n=n^2+n+1$. 求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【分析】本题是已知S_n求a_n，可用

$$a_n=\begin{cases}S_1, & (n=1)\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2)\end{cases}\text{来计算.}$$

【解】①当$n=1$时，$a_1=S_1=1$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=2n^2-n-2(n-1)^2+(n-1)=4n-3$；

经检验，$n=1$时$a_1=1$也适合，∴ $a_n=4n-3$.

②当$n=1$时，$a_1=S_1=3$；

当$n\geqslant 2$时，$a_n=n^2+n+1-(n-1)^2-(n-1)-1=2n$；

$$\therefore\quad a_n=\begin{cases}3, & (n=1)\\ 2n. & (n\geqslant 2)\end{cases}$$

【点拨】本题容易出现以下错解:

①$a_n=2n^2-n-2(n-1)^2+(n-1)=4n-3$;

②$a_n=n^2+n+1-(n-1)^2-(n-1)-1=2n$.

错因:在对数列概念的理解上,仅注意了 $a_n=S_n-S_{n-1}$,没注意 $a_1=S_1$.

【例2】已知等差数列$\{a_n\}$中,$a_1=13$,且 $S_3=S_{11}$,那么 n 取何值时,S_n 取最大值?

【分析】可以利用 S_n 与 n 的二次函数关系求解,还可以利用等差数列的性质求解.

【解】设公差为 d,由 $S_3=S_{11}$ 得:

$3\times13+3\times\dfrac{2d}{2}=11\times13+11\times\dfrac{10d}{2}$,

得 $d=-2$,又 $a_1=13$,

$$\therefore\quad S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$$

$$=-n^2+14n=-(n-7)^2+49.$$

$\therefore$ 当 $n=7$ 时,S_n 取最大值.

【点拨】对等差数列前 n 项和的最值问题可利用 S_n 的性质,即:由 $S_n=\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n$,再运用二次函数配方法求出取得最值时 n 的值. 特别要注意“$n\in\mathbf{N}_+$”这一隐含条件.

课堂基础自测

1. 设$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}_+)$是等差数列,$S_n$ 是其前 n 项的和,且 $S_5<S_6$,$S_6=S_7>S_8$,则下列结论错误的是【　　】

A. $d<0$

B. $a_7=0$

C. $S_9>S_5$

D. S_6 与 S_7 均为 S_n 的最大值

2. 等差数列$\{a_n\}$的前 $m(m\in\mathbf{N}_+)$项的和为 30,前 $2m$ 项的和为 100,则它的前 $3m$ 项的和为【　　】

A. 130　　B. 170　　C. 210　　D. 260

3. 若一个等差数列前 3 项的和为 34,最后 3 项的和为 146,且所有项的和为 390,则这个数列有【　　】

A. 13 项　　B. 12 项　　C. 11 项　　D. 10 项

4. 设数列$\{a_n\}$是递增等差数列,前 3 项的和为 12,前 3 项的积为 48,则它的首项是【　　】

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. 6

5. 设 S_n 是等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{3}$,则 $\dfrac{S_6}{S_{12}}$ 等于【　　】

A. $\dfrac{3}{10}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{8}$　　D. $\dfrac{1}{9}$

6. 一个卷筒纸,其内圆直径为 4cm,外圆直径为 12cm,一共卷 60 层,若把各层都视为一个同心圆,π 取 3.14,则这个卷筒纸的长度约为(精确到个位)【　　】

A. 14m　　B. 15m　　C. 16m　　D. 17m

7. 等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n,T_n. 若 $\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{7n+1}{4n+27}(n\in\mathbf{N}_+)$,求$\dfrac{a_7}{b_7}$.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=7$,$a_5+a_7=26$,$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求 a_n 及 S_n;

(2)令 $b_n=a_n-14(n\in\mathbf{N}_+)$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n 的最小值.