

Hal Hellman
哈爾·赫爾曼 著

范偉 譯



數學恩仇錄

數學史上的十大爭端

Great Feuds in
Mathematics
Ten of the Liveliest Disputes Ever

最理性的學科，最不理性的數學！

如果你認為數學家本人就該像公式、符號一樣冷靜客觀，那可真是大錯特在嫉妒和野心的驅使下，數學家的戰爭有如肥皂劇般高潮迭起、實境演

這是一場「青蛙和老鼠的戰爭」——愛因斯

洪萬生教授（國立台灣師範大學數學系教授）
蔡炳坤校長（台北市立建國高級中學校長）

推薦人

Great Feuds in Mathematics: Ten of the Liveliest Disputes Ever

Copyright © 2006 by Hal Hellman.

All rights reserved.

Complex Chinese translation rights © 2009 by Goodness Publishing House

萬象考 007

數學恩仇錄：數學史上的十大爭端

作者：哈爾·赫爾曼 (Hal Hellman)

譯者：范偉

發行人：楊榮川

總編輯：龐君豪

企劃主編：歐陽瑩

責任編輯：吳尚潔

特約編輯：李易蓉

封面繪圖：滿腦袋

出版者：博雅書屋有限公司

地址：106台北市大安區和平東路二段339號4樓

電話：(02)2705-5066

傳真：(02)2706-6100

劃撥帳號：01068953

戶名：五南圖書出版股份有限公司

網址：<http://www.wunan.com.tw>

電子郵件：wunan@wunan.com.tw

版權代理：英國安德魯納伯格聯合國際有限公司

法律顧問：元貞聯合法律事務所 張澤平律師

出版日期：2009年6月初版一刷

定價：新臺幣350元

選題：彼岸學術出版策劃室 (汪宇)

國家圖書館出版品預行編目資料

數學恩仇錄：數學史上的十大爭端／哈爾·赫爾曼 (Hal Hellman) 著, 范偉譯 -- 初版, -- 臺

北市：博雅書屋, 2009.06

面：公分, -- (萬象考：7)

參考書目：面

譯自：Great feuds in mathematics : ten of the liveliest disputes ever

ISBN 978-986-6614-27-9 (平裝)

1.數學 2.歷史

310.9

98005171

萬象考
007

數學恩仇錄

數學史上的十大爭端

Great Feuds in Mathematics : Ten of the Liveliest Disputes Ever

哈爾・赫爾曼 (Hal Hellman) 著
范偉 譯

從科技爭議看數學知識成長的意義

洪萬生（台灣師範大學數學系教授）

數學史上是否曾經發生革命？在數學史家社群中，有關這一問題之討論可以說是眾說紛紜，莫衷一是。這或許也是本書作者一開始對於是否接受此一書寫委託時，一直猶豫不決的主要原因之一。

是的，如果數學史不斷地見證數學知識的永恆確定性，從而有關它的爭議（controversy）無關真理，那麼，數學的恩仇錄大概只好訴諸於「數學家也有一般人的七情六欲」之說法了。

事實上，這也是一般人的看法。無怪乎作者一開始對數學的認識，也難以超越。不過，作者逐步蒐集文獻，並且向數學史家如道本周（Joseph W. Dauben）等請教，最後，他為我們訴說了十個相當有趣的故事，為某些突破性的數學發展之滄桑，作了極有歷史洞識之註腳，非常值得我們一起來分享。譬如說吧，作者在他的〈緒論〉中，就引述了一個魯本·赫希（Reuben Hersh）的有關數學知識風貌的比喻：「數學就像一個出色的餐廳，在前面的用餐區，顧客們享用著乾淨且精心烹製的數學菜餚」，然而，在火熱的廚房中，數學家卻在看起來雜亂無章的環境中，烹調他們的「新知識」。「這種氣氛包含了火爆的脾氣、紊亂不安、失敗與成功。而我們所關注的正是這個餐

館的後半部——廚房。」

換句話說，過程（process）是掌握知識本質的一個不可缺少的環節。也因此，科技爭議（scientific controversy）所涉及的知識之認知面向，就值得科學史／數學史家的大加關注了。這是因為目前的數學與科學教學，都由教師提供「正確的」知識，由於是精心烹調的成品，所以，學習者都難以窺探它們如何製造，從而他們通過溯源的「理解」（understanding），也就大受限制了。

我在此無意凸顯皮亞傑（Jean Piaget）所謂的「發生認識論」（genetic epistemology）之重要性。不過，歷史上的科技爭議所以值得關注，乃是因為它可以啟發我們思考知識成長（或發展）及其「非後見之明」的過程，並進一步想像另類的可能性。如此看來，所謂的爭議絕對不只是引發人與人之間的「恩仇」而已，更多的時候，由於爭議者彼此擁有的典範之不可通約（incommensurability of paradigm），遂出現知識實踐層次上的各說各話，而在最終成就了科學史的豐富多元圖像。

現在，就讓我們瀏覽本書的十個爭端。

有關三次方程式的公式求解爭議（本書第一章），一般的西方數學通史著述都納為主題之一，尤其打算涵蓋方程式理論的發展史時，更是不容錯過。事實上，這是一個一再「傳頌」的故事，有些史家甚至還指出它如何「見證」十六世紀義大利科學研究的贊助機制。不過，無論當時科學的贊助（patronage）實質內容如何，研究成果的優先權之重要性，卻始終如一。

這種關乎優先權的爭議，當然推動了科學的進展。本書第二、三章所提供的，是十七世紀的故事，主角轉換成為笛卡兒與費馬（兩位都是法國人）、牛頓（英國人）與萊布尼茲（德國人）。後者的爭議涉及微積分發明之優先權論戰，也是數學史上耳熟能詳的經典故事之一，至於前者，則較少人知，在一般的數學史著述中，它也很少受到青睞。不過，正如曾深入研究費馬的數學史家馬霍尼（Michael Mahoney）所評論：「歷史上很少有科學爭論能揭示參與者這麼多的個性，也很少有科學爭論，能揭示個人因素對理性論述影響到這個程度。」事實上，費馬與笛卡兒有關解析幾何與光學的爭論，極少涉及優先權，反倒較多地關乎方法論層面的議題，而這當然是被後世譽為近代哲學之父的笛卡兒，所無法承受的批判，因為他的成名作正是《方法論》——其中「附錄」《幾何學》也就是他發明的座標幾何。這場爭議的最後得勝者是笛卡兒，然而，他獲益極其有限。相反地，費馬這位失敗者卻被激發鬥志，提出了十分重要的「最短時間原理」，奠定了幾何光學之基礎，並且對數論、機率論以及微積分，都做出了巨大的貢獻。

在前述的科學爭議中，捲入這個是非圈的非法國人扮演了微不足道的角色。然而，在有關誰先發明微積分的優先權之爭議中，被動員的數學家與科學家就上升到「國家級」的規模了，於是，所謂的民族主義，似乎在科學史上有了第一次的操兵機會。其結果是英國贏得了面子，裡子卻輸得精光！根據數學史的研究成果，在牛頓去世的一七二七年到一八四三年發明四元數的漢彌頓（William R. Hamilton）現身之前，英國在一百多年之間未曾孕育出偉大的數學家，究其原因，英國數學家堅持不向歐陸學習萊布尼茲式的微積分（包括符號及其應用），實在難辭其咎！事實上，牛

頓先發明了微積分，但相對於萊布尼茲，卻較晚發表。相反地，萊布尼茲較晚發明，卻較早發表。兩人的彼此獨立發明，是科學史上多元發現（multiple discoveries）的最佳例證之一。撫今憶往，要是慣於「廉價消費」民族主義的知識份子有一絲絲靈長類的智慧，很多歷史的公案大概都會改寫才是。

現在，讓我們將歷史場景，拉到也介入微積分優先權論戰的瑞士數學家家族伯努利兄弟上（第四章）。這個家族的「數學基因」令人驚異，因為他們在三代之間，一共出了八位著名的數學家。但不幸地，他們也都表現了罕見的親人之間的互相痛恨，至於其原因則並非為了王位或遺產繼承，而是爭論譬如誰先解決了最速下降曲線問題，堪稱是歷史上的一大異數。無怪乎本書作者以「史上排名第一的鬭牆之爭」，來形容這種不可思議的「個人恩怨」。這種相當惡質的競爭，當然帶動了微積分及其應用的大幅進展，不過，「代價」看起來實在太大，顯然不值得推崇。

到了十九世紀，數學雖然愈來愈往抽象化面向發展，然而，它與自然科學之連結，甚至於在方法論方面是否具有共通之處，在英國成為赫胥黎與數學家之間的爭議要點。赫胥黎在一八七〇年代，科學聲望如日中天（他對達爾文演化論的捍衛，贏得了「達爾文的鬥牛犬」之封號），他的演講和著作強烈地警惕英國政府，必須在教育過程中強調科學訓練的重要性，因此，他對英國現代科學及其教育之鼓吹，可以說居功甚偉。不過，顯然源自無知與輕率，他認為「數學家只考慮物體的兩種性質：數量與範圍。所有他想要的歸納，都已經在很多年以前形成和完備了。他現在除了推論和證明之外，無事可作。」對於這樣一個出自科學名流的論調，數學家社群當然必須伺機

反擊，而他們找到的合適人選，就是著名的數學家西爾維斯特。至於西爾維斯特所採取的策略，則是指出觀察、猜想、歸納、試驗、推理等一般認為自然科學的知識活動，也與數學研究方法密切相關。可惜，赫胥黎從未回應西爾維斯特的批評，不過，到了晚年，他倒是修正了有關數學知識本質的偏頗看法。

在第六—九章這四章中，本書所討論之爭議，都離不開康托爾所創立的集合論，因此，讀者在閱讀時，千萬注意此一順序才好。第六章中有關克羅內克與康托爾的爭議，當然也是數學史上極著名的個案，值得我們好好地理解它的前因後果，尤其是它高度相關了後面幾章的論述。事實上，本章爭議起因於意義 (meaning) vs. 邏輯 (logic) 的張力，亦即一個邏輯上可以站得住腳的證明，可能在其特定的數學哲學主張下顯得毫無意義，而這正是康托爾的無窮集合及其超限算術 (transfinite arithmetic) 所面臨的「困境」。克羅內克所以無法接受，正是由於他的哲學立場不容許這種無窮集合的概念，於是，他對於康托爾的集合論當然也就不假顏色了。至於其結果，當然就是學術地位不對等的康托爾付出慘重的代價！不過，有些數學史家倒是注意到：克羅內克和康托爾之間的鬥爭，根本不是傳統與創新的數學形式之間的衝突，而是新典範之間的競爭。其實，這一場爭議顯然是由於數學本體論的分歧所引發。

克羅內克是數學基礎學派中所謂的主觀主義之先驅，他對於數學物件 (mathematical entities) 的存在之主張膾炙人口：「自然數是上帝造的，其他都是人造的。」既然是人造的，當然要求必須建構 (constructive) 得到，因此，也就無法允許表徵「真實無限」(actual infinity) 的集合論之正

當性了。

這種涉及哲學立場的數學知識之意義或正當性 (legitimacy)，在第七章波賴爾和策梅洛的論戰中，也再度上演。康托爾在處理他的連續統假設 (continuum hypothesis) 時，必須依賴良序原理 (well ordering principle)。為了證明後者，策梅洛提出選擇公理 (axiom of choice)。由於這個公理涉及無窮多的選擇，因此，隨即引發爭議的風暴，有贊成也有反對，但反對者居多。「最大的爭議集中在法國的數學家之間，其中，最主要的反對者是埃米爾·波賴爾。」波賴爾反對的理由，可想而知是他「堅決反對缺乏建構性的方法」。不過，正如史家的後見之明所指出：「這整段歷史插曲中最具反諷意味的是：對這個公理最強烈的反對，正是來自法國分析家小組——貝爾、波賴爾和勒貝格，而他卻在無意中非常頻繁地用到它，他們的工作部份地說明了數學不可缺少它。」

在第八、九章中，作者主要說明數學基礎的三大學派彼此之間的論戰。先是第八章中，龐加萊（又是法國人！）與羅素針對數學的邏輯基礎之爭議，焦點當然是羅素所主張的邏輯主義 (logicism)，企圖將數學化約為邏輯。然後，是第九章的希爾伯特與布勞威爾針對形式主義 (formalism) vs. 直覺主義 (intuitionism) 之爭！

在一八九一年克羅內克去世之後，龐加萊就成為康托爾超限算術的主要反對者，而羅素的邏輯大廈則建立在康托爾集合論的基礎上，因此，龐加萊 vs. 羅素當然一點也不令人意外。最後，邏輯主義功敗垂成，不只存在有一些數學概念無法利用邏輯來定義（因此化約主義 [reductionism] 無法證成），同時，正如龐加萊所指摘：「在邏輯中，我只看到了束縛創造者的鐐銬。它對簡潔沒有

幫助——而且差得很遠。如果在說明 1 是一個數時，需要 27 個函數，那麼，要證明一個實數有關的定理，需要多少個函數呢？」

正如第八章一樣的論戰之起因，有關形式主義與直覺主義的爭議（第九章），也源自數學哲學的基本立場之迥異。根據希爾伯特的比喻，形式主義下的數學知識活動可以類比為西洋棋遊戲，其中各棋子的名字只是提示性的，至於西洋棋的走法，則完全取決於慣例和遊戲規則。因此，形式主義顯然主張數學不過是一種沒有意義的符號遊戲。譬如，一八九一年，希爾伯特曾經主張：「在所有的幾何陳述中，用桌子、椅子、啤酒杯這些詞來代替點、線、面應該是可能的。」後來，他在一八九九年發表《幾何學基礎》，當然出自他希望為歐氏幾何學建立一個更加穩固的基礎，同時也消除數學對直覺的依賴。而這顯然是他與布勞威爾的直覺主義衝突的主要導火線。事實上，希爾伯特因為支持康托爾的關係，已經捲入衝突。他還認為克羅內克的執著威脅了數學的進展，因為數學與高度主觀的直覺基礎結合，並通過逐步建構，其前景將大受限制。希爾伯特剛好相反，他只要邏輯表達與一致性。此外，他強烈主張克羅內克極力反對的無理數，不應該排除在數字的世界之外，因為沒有它們，分析學領域將淪為不毛之地。

由於分析學很多定理除了與無理數有關之外，還必須依賴邏輯學中的排中律，才能加以證明。而與希爾伯特同為《數學年鑑》編輯委員的布勞威爾，基於直覺主義的認識論立場，竟然反對排中律的使用，兩人的嚴重衝突，當然就不可避免了。

面對這場無解的衝突，希爾伯特顯然被迫遊說《數學年鑑》的編輯同仁，將布勞威爾除名，

因為他擔心一旦早死，布勞威爾將掌控這個當時全世界最有威望的數學期刊。從此一件事來看，希爾伯特固然自詡為救世主，希望拯救數學基礎的危機於水火之中，然而，布勞威爾其實也不遑多讓，儘管他在拓樸學方面做出了不朽貢獻，根據數學家兼數學史家范德瓦爾登（van der Waerden）的採訪，布勞威爾後來「不再確信他在拓樸學中的成果，因為從直覺主義的觀點來說，它們不是正確的。他以前所做的、最偉大的成就和他的錯誤，他都按照他的哲學來判斷。他是一個很奇怪的人，瘋狂地愛著他的哲學。」

當然，在希爾伯特這一方面，排除布勞威爾也算不是一種勝利，因為哥德爾在一九三〇——一九三一年所發表的不完備定理，就一舉摧毀了形式主義者「終將知道」的一致性與完備性的美夢！

數學的基礎在哪裡？或者它有可能並不存在？所有這些可能永遠沒有答案！不過，數學哲學的立場絕對影響數學教學的策略，因為數學是被發現的或被發明的，顯然都依序連結到絕對主義／柏拉圖主義，以及易誤論／建構主義。這是本書最後一章的主題，卻也被近幾年來將數學教育改革誇大成為「數學戰爭」（math war）的學者所忽略！作者在歷史上的數學恩仇錄之終章安排此一題材，似乎意在指出：實踐是檢驗真理或意識型態的最佳手段！如此看來，前面九個故事，煽情也罷、悲壯也罷、恩怨也罷，在時間的沈澱下，都可以在本書找到最好的依托！

數學爭議可以讀出認知的意義與價值，這是本書閱讀的最佳切入點，也是我推薦本書的主要理由。

我讀《數學恩仇錄》

深刻領略了數學理性與感性的豐富樂章

蔡炳坤（臺北市立建國高級中學校長），寫於二〇〇九年四月十二日

我，從小就喜歡數學。並不是對數學特別有天才，也不是碰到特別好的數學老師，而是因為只要上課聽懂了（這句話很重要，數學的學習重在理解），就可以在大大小小的考試中得高分，不必像其他科目必須背誦許多東西，記得當年參加高中聯考的時候，幾乎考滿分。印象中，從小學到國中，每次作文題目「我最喜歡的科目」，我都毫不猶豫地寫「數學」。後來進了師專以後，注意力轉移到了音樂方面，也就慢慢與數學疏遠了。直到四年前，我的孩子高中畢業選擇「數學系」當第一志願，我才又開始接觸與數學相關的議題或書籍。我的學校——建中，又是全國高中數學學科中心學校，有機會經常與傑出的大學數學教授、優秀的高中數學老師們討論相關課題，多少也薰染了一些數學的專業氛圍。

日前接到博雅書屋的編輯部門邀我撰寫本書導讀的訊息，的確有所猶豫，我主修的領域是教育，並非數學，如何能夠勝任這項專業的工作，但當開始試著閱讀時，竟然流暢地停不下來，愛

不釋手於每個事件的情節中。總的來說，從本書譯名開始，就注定了她「成功」的吸引力，主標題《數學恩仇錄》(*Great Feuds in Mathematics*)可以比擬名作家大仲馬所著《基度山恩仇記》(*Le Comte De Monte-Cristo*) (一部膾炙人口，描寫善有善報、正義伸張的小說)，到副標題《數學史上的十大爭端》(*Ten of the Liveliest Disputes Ever*)，其實就是十個深富哲理與人情世故的有趣故事(篇篇讀來淋漓痛快，讓人廢寢忘食)，雖然當中有諸多難解的數學公式、深奧的解題方法或艱澀的專有名詞，我未必都看得懂，但並不影響故事情節高潮迭起的巧妙鋪陳，更多的是人性好惡的探索、學術倫理與價值觀的衝突、激情過後的深刻省思等等，趣味中帶著淚水，科學中蘊含人文哲理。我雖自不量力，但非常樂意地帶領青少年莘莘學子們，一起領略數學理性與感性的豐富樂章。

作者哈爾·赫爾曼選擇十六世紀中葉作為本書選材的起點，首先登場的便是赫爾塔利亞和吉羅拉莫·卡爾達諾(第一章)，這兩位義大利數學家誰才是求解二次和四次代數方程式的原創者的爭議？又究竟卡爾達諾曾經對赫爾塔利亞做出什麼樣的承諾，自此一再遭受「背信棄義」的嚴重指控？凡此種種都在一五四五年《大技術》一書出版後引爆開來，這本書，直到現在，仍被眾多學者認為是文藝復興時期的科學傑作之一，可與維薩里的《人體構造》、哥白尼的《天體運行論》相提並論。令人驚訝的是，直到一五七六年，兩人差一年相繼去世的三十餘年間，「授權」與「剽竊」之爭從未間斷，公說公有理，婆說婆有理，雖未對簿公堂，但在數學界所掀起的軒然大波，果真是「罄竹難書」，對這兩位數學家而言，或有「既生瑜，何生亮」的遺憾情結，但就整個數學界的發展來說，也未必全然的負面，作者寫下了這樣的註腳：「當赫爾塔利亞和卡爾達諾兩人

鷸蚌相爭時，毫無疑問地，數學是那個得利的漁翁。」讀過精采的原創之爭，想必您心有戚戚，在智慧財產權尚未充分彰顯的那個年代，數學家不得不對自己的創見有所保留，在展現某些問題的解法時，卻對所用的方法保密，以免被他人據為己有。有人可以終其一生為捍衛原創而戰鬥，姑且不論真相如何（似已成羅生門），但其維護自身權益，不計毀譽、奮戰到底的意志，倒是值得今之學界仍多少存在的抄襲現象，引以為鑑。

接下來的這個故事更精采了（第二章）。眾所周知「我思，故我在」出自法國哲學家勒內·笛卡兒的名言，他在一六三七年所發表的《方法論》中以「一種系統化的懷疑」哲學思考寫道：「不能確知是對的事，不要接受。這就是說，在判斷時謹慎地避免倉促和偏見，只接受那些截然清晰地印在腦中不容置疑的東西。」這本書是好幾個學科領域的里程碑論著，涉及哲學、科學史，以及數學思想。有人把她與牛頓的《原理》一書相媲美，並認為她為十七世紀數學的偉大復興做出了卓越貢獻。人們多半因為這本書，普遍地把統一代數和幾何，甚至是創立解析幾何的榮譽歸於笛卡兒。的確，「笛卡兒座標系統」就是以他的名字命名的。然而，笛卡兒在《方法論》三篇文章中的兩篇（折射光學與幾何），卻成了與同是法國人的業餘數學家皮埃爾·費馬爭論的焦點。說到「費馬最後定理」(Fermat's Last Theorem)，也是無人不知、無人不曉的重大發現。著名的數學史學家貝爾(E. T. Bell)在二十世紀初所撰寫的著作中，稱費馬為「業餘數學家之王」(是由於他具有法官和議員的全職工作)。貝爾深信，費馬比他同時代的大多數專業數學家更有成就。十七世紀是傑出數學家活躍的世紀，而貝爾認為費馬是十七世紀數學家中最多產的明星。在近二十年的數

學爭端中，貝爾如此形容：「讓脾氣有些暴躁的笛卡兒和沈穩內斂的『Gascon』費馬並駕齊驅，看來極不自然。在關於費馬切線理論的爭議中，這個好戰的傢伙（笛卡兒）經常煩躁易怒，出語刻薄，而這位不動聲色的法官卻表現得真誠、謙恭。」讀過笛卡兒和費馬在數學理論上的爭辯，頗令人有文人相輕之慨，但話說回來，所謂的「真理」愈辯愈明，未到最後關頭，勝負難分，亦隨著時間的變化而被凸顯出來，作者對此寫下令人玩味的註腳：「一場曠日持久的爭鬥誕生了一個明顯的勝利者和失敗者。但具諷刺意味的是，勝利者（指笛卡兒）從爭鬥中受益微薄，而失敗者（指費馬）卻被爭鬥激發，提出了科學上一個重要的原理，為微積分的发展打下了重要的基礎。」的確是如此，笛卡兒漸漸遠離了數學，專注在哲學和形而上學的研究，在尊敬和讚譽聲中結束了榮耀的一生。而費馬則繼續鑽研數學，默默耕耘，並做出好幾項重大貢獻。

相較於前述兩位義大利數學家「原創」之爭、兩位法國數學家「理論」之爭，接下來要登場的是英德「微積分發明」之爭，主角分別是伊薩克·牛頓與威爾海姆·萊布尼茲（第三章），兩人從未謀面，但因為這兩人的追隨者富有侵略性的行為，使得這場爭端狂熱地持續了一個多世紀，難怪科學史家丹尼爾·布爾斯丁將他們的爭端命名為「世紀景觀」。牛頓的主要興趣在於用數學方法解決自然科學問題，「萬有引力理論」的提出就是明證，但萊布尼茲則像笛卡兒一樣，希望在哲學上有重大創建，認為數學可以為他開路。前者在英國被奉為偶像，並受封為爵士，一七〇三年被推舉為皇家學會的主席，並連年當選，直到一七二七年去世為止，且被授予國葬尊榮；後者的聲望在歐陸也是快速增長中，一六九九年法國科學院製作的外籍院士名單中，牛頓排名第七位，

而萊布尼茲則排在第一位，他在符號邏輯和微積分，還有好幾個其他領域，特別是宇宙論和地質學，都做了很重要的早期研究，只是到了晚年，微積分的爭議事件蒙上了巨大的陰影，凡事皆不順利，一七一六年在漢諾威去世時，只有生前的一位助手參加葬禮，令人不勝唏噓！究竟這兩位人類有史以來最傑出的天才之一，誰才是微積分的首創者呢？總的來說，在微積分發展上，牛頓約在一六六五—一六六六年，而萊布尼茲則在一六七三年以後，是由牛頓領先；至於微積分的發表上，萊布尼茲在一六八四—一六八六年，而牛頓則在一七〇四年以後，卻是由萊布尼茲領先。簡單地說，牛頓先發展了微積分，但沒有公諸於世，萊布尼茲先發表了微積分，而且他的方法更好用，也確實先投入運用。這項首創的榮譽應該歸誰呢？他們各自的國家都訴說著完全不同的故事。這場爭論並沒有因為兩人的去世而停歇，並導致了兩個重要的結果：一是兩派數學家之間的關係破裂了，一直持續到十九世紀；二是在萊布尼茲微積分的基礎上，歐陸的數學家在十八世紀取得了飛速的進步，大大超越英國的數學家。是以，作者寫下了如此簡短而有力的註腳：萊布尼茲輸了那場戰役，卻贏得了整場戰爭。您說，不是嗎？

哇！連著三大爭端讀下來，過癮極了！在接下來的故事中，有兄弟鬩牆者（第四章）、有觀點不同者（第五章），前者便是瑞士的伯努利兄弟，哥哥雅各透過自學鑽研數學，三十三歲已經成為巴塞爾大學的教授，萊布尼茲對他有相當高的評價。弟弟約翰原本學醫，但與雅各一樣，心在數學，所以私底下跟著哥哥學習數學。他們兩位是首先認識到微積分的重要性，並將其投入運用、向世界宣傳它的意義的數學家。然而，他們之間卻也為了誰的地位更崇高而發生了激烈的論爭，最後