锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

三角函数

丛书主编 司马文[redacted]

丛书副主编 冯小秋 钟志健

本册主编 吴淑群

品牌连续热销8年

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

锦囊妙解

创新导学专题

高中数学

三角函数

丛书主编　司马文　曹瑞彬

丛书副主编　冯小秋

执行主编　江　海

本册主编　吴淑群

编　　者　万强华　孙志明　许学龙　曹建峰　毛金才　李庆春　周志祥
朱燕卫　金尤国　胡志彬　丁锁勤　钱　勇　吴志山　何福林
沈桂彬　李小慧　朱时来　王春和　周拥军　王新祝　李家亮
丁　勇　肖亚东　吴淑群　张季锋　李金光

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

图书在版编目(CIP)数据

锦囊妙解创新导学专题. 高中数学. 三角函数/司马文,曹瑞彬丛书主编;吴淑群本册主编. —北京:机械工业出版社,2010.10 (2010.11 重印)
ISBN 978-7-111-31906-1

Ⅰ. ①锦… Ⅱ. ①司… ②曹… ③吴… Ⅲ. ①数学课—高中—教学参考资料
Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 178887 号
机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:石晓芬 责任编辑:贾 雪
责任印制:乔 宇
三河市宏达印刷有限公司印刷
2010 年 11 月第 1 版 · 第 2 次印刷
169mm×228mm · 9 印张 · 222 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-31906-1
定价:13.00 元

电话服务
社服务中心:(010)88361066
销 售 一 部:(010)68326294
销 售 二 部:(010)88379649
读者服务部:(010)68993821

网络服务
门户网:http://www.cmpbook.com
教材网:http://www.cmpedu.com

前 言

锦囊妙解丛书面世多年，备受广大读者厚爱，在此深表感谢。为了对得起广大读者的信任，对得起自己的职业良心，我们密切关注课程改革的新动向，在原有基础上，精益求精，反复修订，使得锦囊妙解丛书与时俱进、永葆青春。目前奉献给读者的《锦囊妙解创新导学专题》丛书，力求凸显创新素质的培养，力求知识讲解创新、选择试题创新、剖析思路创新，从而力求让学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，全面提升学生的创新素质，在学习、应试中得心应手、应付裕如。

本丛书以每个知识点为讲解元素，结合“课标解读”、“知识清单”、“易错清单”、“点击高（中）考”、“模拟演练”等栏目设计，突出教材中的重点和难点，并将高（中）考例题的常考点、易错点进行横竖梳理，多侧面、多层次、全方位加以涵盖，使分散的知识点凝聚成团，形成纵横知识网络，有利于学生的记忆、理解、掌握、类比、拓展和迁移，并转化为实际解题能力。

本丛书取材广泛，视野开阔，吸取了众多参考书的长处及全国各地教学科研的新思路、新经验和新成果，选例新颖典型，难度贴近高（中）考实际。讲解完备，就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然而细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解，从而达到举一反三、触类旁通的功效。

本丛书以“新课程标准”为纲，以“考试说明”与近年考卷中体现的高（中）考命题思路为导向，起点低、落点准，重点难点诠释明了，高（中）考关键热点突出，专题集中，能很好地培养学生思维的严谨性、解题的灵活性、表达的规范性。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。让学生掌握“捕鱼之术”，其实就是创新教育的主要目标。本丛书策划者、编写者以此为共识，精诚合作，千锤百炼，希望本丛书不但能帮助你学到知识，掌握知识，而且能掌握其学习方法，养成创新意识，增强创新能力，那将能让你终身受益。

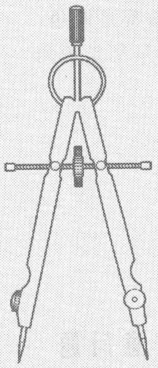
司马文

曹瑞彬

目 录

第1讲 任意角和弧度制

课标解读



【知识与技能】

理解任意角、弧度制的概念，知道角的分类，掌握与α终边相同的角的表示，能熟练进行角度与弧度的换算.

【过程与方法】

明确数学概念的严谨性和科学性，感受分类研究的数学思想，培养学生理性的思维习惯.

【情感、态度与价值观】

通过本节课的教学，启示学生认清基本概念的来龙去脉，体会知识之间的有机联系.

【教学重点】

任意角的概念、弧度的意义、弧度与角度的换算.

【教学难点】

(1)终边相同的角的表示；

(2)弧度的意义.

知识清单

知识点1

角的概念

角可以看作平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形.

任意角的分类：

(1)正角、负角和零角

按逆时针方向旋转形成的角叫正角；

按顺时针方向旋转形成的角叫负角；

若一条射线未作任何旋转，称它为零角.

(2)象限角、轴线角

如果角的顶点和坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，那么，角的终边在第几象限，称这个角是第几象限角；

如果角的终边在坐标轴上，应认为这个角不属于任何象限，也称这个角为轴线角.

注意问题

角的概念推广后，研究角时，不仅要考虑角的大小，也要考虑方向(正、负).

例1 下列各命题错误的是________.

(1)终边相同的角一定相等　　(2)第一象限角都是锐角

(3)若 $\alpha\in[0°,90°]$，则 α 是第一象限角　　(4)小于 $90°$ 的角都是锐角

【解析】本题主要考查任意角的概念，可利用定义直接判断.

对于(1)，$30°$ 和 $390°$ 是终边相同的角，但它们并不相等；

对于(2)，$390°$ 是第一象限角，但它不是锐角；

对于(3)，$\alpha=90°$ 时不是第一象限角；

对于(4)，$-30°$ 是小于 $90°$ 的角，但它不是锐角.

【答案】(1)、(2)、(3)、(4).

点评 判断一个命题错误，通常只要举出一个反例即可.

知识点2

终边相同的角的集合

一般地，所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

即：任一与角 α 终边相同的角，都可以表示成角 α 与整数个周角的和.

注意问题

(1)k 是整数，α 是任意角；

(2)α 与 $k\cdot360°$ 之间是"+"号，$k\cdot360°-\alpha(k\in\mathbf{Z})$ 表示与 $-\alpha$ 终边相同的角；

(3)终边相同的角有无数个，但彼此不一定相等，它们相差 $360°$ 的整数倍，而相等的角终边一定相同.

例2 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与 $-480°$ 角终边相同的角，并判断它是第几象限角.

【解析】 本题考查终边相同的角的概念.

【答案】 $-480°=240°-2\times360°$,

所以，与 $-480°$ 角终边相同的角是 $240°$，它是第三象限角.

点评 本题可从 $-480°$ 开始，每次"脱掉一个周角"，目标在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找一个与角 α 终边相同的角 β，由 β 所在象限即可判定 α 所在象限.

巩固: (1)写出与 $60°$ 角终边相同的角的集合 S;

(2)把 S 中适合不等式 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素 β 写出来.

【解析】 (1) $S=\{\beta|\beta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$.

(2) S 中适合 $-360°\leqslant\beta\leqslant720°$ 的元素是

$60°-1\times360°=-300°$,

$60°+0\times360°=60°$,

$60°+1\times360°=420°$.

点评 (2)中的 $k=0,\pm1$，实质是解不等式 $-360°\leqslant60°+k\cdot360°\leqslant720°(k\in\mathbf{Z})$ 的结果，一般可以通过观察得到这个结果.

拓展延伸1 (1)终边落在 x 轴非负半轴上角的集合为____________;

(2)终边落在 x 轴非正半轴上角的集合为____________;

(3)终边落在 x 轴上角的集合为____________;

(4)终边落在 y 轴上角的集合为____________;

(5)终边落在直线 $y=x$ 上角的集合为____________;

(6)终边与角 $-60°$ 终边关于 x 轴对称的角的集合为____________.

【解析】 对于(1)，在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，终边落在 x 轴非负半轴上的角为 $0°$，与 $0°$ 终边相同的角即为所求.类似可解(2)，将(1)、(2)求并集得(3)的答案，类似可解(4)、(5)，对于(6)，先找一个适合题意的角，然后由终边相同的角的集合就可将所求角表示出来.

【答案】 (1) $S=\{\beta|\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

(2) $S=\{\beta|\beta=180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

(3) $S=\{\beta|\beta=k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=180°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=2k\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\beta|\beta=(2k+1)\cdot180°,k\in\mathbf{Z}\}$

$=\{\beta|\beta=n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$

(4) $S=\{\beta|\beta=90°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$

(5) $S=\{\beta|\beta=45°+n\cdot180°,n\in\mathbf{Z}\}$

(6) $S=\{\beta|\beta=60°+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$

点评 应熟悉轴线角的集合表示如(1)～(4);

(6)中的对称问题是角与角终边常见的一种特殊关系，常用的有以下几种：

β 与 α 终边关于 x 轴对称，则 $\beta=-\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

β 与 α 终边关于 y 轴对称，则 $\beta=180°-\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

β 与 α 终边关于原点对称，则 $\beta=180°+\alpha+k\cdot360°(k\in\mathbf{Z})$

β 与 α 终边在同一直线上，则 $\beta=\alpha+k\cdot180°(k\in\mathbf{Z})$

拓展延伸2 (1)写出第一象限角的集合 M.

(2)写出 $y=\pm x(x\geqslant0)$ 所夹区域内的角的集合.

【解析】(1)在 $0°$ 到 $360°$ 内第一象限角可表示为 $0°<\alpha<90°$;

与 $0°$, $90°$ 终边相同的角分别为 $0°+k\cdot360°$, $90°+k\cdot360°$, $(k\in\mathbf{Z})$;

第一象限角的集合就是夹在这两个终边相同的角中间的角的集合,表示为:

$M=\{\beta|k\cdot360°<\beta<90°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

类似可得,第二、三、四象限角的集合可分别表示为:

$P=\{\beta|90°+k\cdot360°<\beta<180°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$;

$N=\{\beta|180°+k\cdot360°<\beta<270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$;

$Q=\{\beta|270°+k\cdot360°<\beta<360°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

区间角应按逆时针方向由小到大书写,但集合的表示方法不唯一,如第四象限角也可表示为:$Q=\{\beta|-90°+k\cdot360°<\beta<k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$

(2)当 α 终边落在 $y=x(x\geqslant0)$ 上时,

角的集合为 $\{\alpha|\alpha=45°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$;

当 α 终边落在 $y=-x(x\geqslant0)$ 上时,

角的集合为 $\{\alpha|\alpha=-45°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$;

所以,按逆时针方向旋转有集合:$S=\{\alpha|-45°+k\cdot360°<\alpha<45°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}\}$.

知识点 3

确定角的范围或在给定范围内确定角

例3 若角 α 是第三象限角,问 2α 是哪个象限的角? $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角?

【解析】先写出角 α 的范围,$180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$,在不等式两边同乘以2,可得角 2α 的范围,在不等式两边同除以2,可得角 $\frac{\alpha}{2}$ 的范围.

2α的范围包括终边落在y轴非负半轴上的情形,容易遗漏

【答案】(1)$\because\alpha$ 是第三象限角,

$\therefore 180°+k\cdot360°<\alpha<270°+k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore 360°+2k\cdot360°<2\alpha<540°+2k\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

$\therefore 2\alpha$ 是第一或第二象限角以及终边落在 y 轴非负半轴上的角.

(2)$90°+k\cdot180°<\frac{\alpha}{2}<135°+k\cdot180°, k\in\mathbf{Z}$

$k=2n(n\in\mathbf{Z})$ 时,$90°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<135°+n\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$,

注意对k分类讨论

$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第二象限角;

$k=2n+1(n\in\mathbf{Z})$ 时,$270°+n\cdot360°<\frac{\alpha}{2}<315°+n\cdot360°, k\in\mathbf{Z}$

$\therefore\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角;

综上,$\frac{\alpha}{2}$ 是第二或第四象限角.

点评 已知角 α 所在象限,求 $\frac{\alpha}{n}$ 所在象限时,

方法一:分类讨论,即对 $\frac{k}{n}$ 进行讨论;

方法二：等分象限法：已知 α 是第 $m(m=1,2,3,4)$ 象限角，求 $\frac{\alpha}{n}$ 是第几象限角时，可以先将象限分成 n 等份，然后从 x 轴正方向上方第一个区域起，按逆时针方向依次标上 1,2,3,4;1,2,3,4;…，直至填充所有区域，其中出现数字 m 的区域即为 $\frac{\alpha}{n}$ 的范围.

变题 (1)若角 α 是第二象限角，则 $180°+\alpha$ 是第________象限角；

(2)若角 α 是第二象限角，则 $\frac{\alpha}{3}$ 是第________象限角.

【答案】(1)四；

(2)一、二或四.

例4 已知集合 $A=\{x|k\cdot 360°<x<180°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$；

集合 $B=\{x|k\cdot 360°+30°<x<210°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $A\cap B=$______，$A\cup B=$______.

【解析】在直角坐标系内分别作出集合 A、B 中的角所对应的终边区域，并求出它们的交集与并集所对应的区域，再写出对应的集合.

【答案】$A\cap B=\{x|30°+k\cdot 360°<x<180°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

$A\cup B=\{x|k\cdot 360°<x<210°+k\cdot 360°,k\in\mathbf{Z}\}$

点评 充分利用数形结合的思想方法.

知识点 4

弧度角的含义

$l=2r$的圆心角为多少弧度?

把长度等于半径长的弧所对的圆心角叫 1 弧度的角，用符号 rad 表示，读作弧度.

用弧度作单位来度量角的制度叫弧度制.

①正角的弧度数是一个正数，

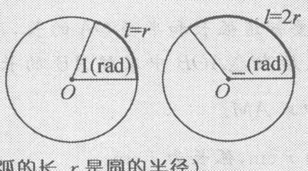
负角的弧度数是一个负数，

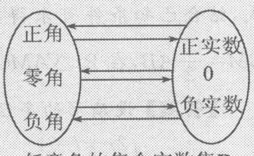
零角的弧度数是 0.

②角 α 的弧度数的绝对值 $|\alpha|=\frac{l}{r}$

(其中 l 是以角 α 作为圆心角时所对弧的长，r 是圆的半径).

③弧度制下，角的集合与实数集之间建立起一一对应关系.





任意角的集合实数集**R**

知识点 5

角度与弧度的换算

$180°=\pi \text{rad}$,

$1°=\frac{\pi}{180}\text{rad}\approx 0.01745\text{rad}$,

$1\text{rad}=(\frac{180}{\pi})$度$\approx 57.30°$

注意问题

(1)今后用弧度制表示角时，"弧度"二字或符号"rad"可以省略不写，而只写这个角的弧度数，但用角度制表示角时，"度"即"°"不能省去；

(2)用弧度制表示角时，常常把弧度数写成多少 π 的形式，如无特别要求，不必把 π 写成小数；

(3)记熟特殊角的度数与弧度数的对应表：

度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

例5 (1)$22°30'=$______ rad；　(2) $\frac{3}{5}\pi$ rad$=$______°；(3)3 rad≈______°.

【解析】利用换算公式.

【答案】(1) $\because 22°30'=(22\frac{1}{2})°$ $\therefore 22°30'=\frac{\pi}{180}\text{rad}\times 22\frac{1}{2}=\frac{1}{8}\pi$ rad；

(2)$\frac{3}{5}\pi$ rad$=\frac{3}{5}\pi\times(\frac{180}{\pi})°=\frac{3}{5}\times 180°=108°$；

(3)3 rad$=(\frac{180}{\pi})°\times 3\approx 171.90°$.

点评 进行角度与弧度的换算时，抓住关系：$180°=\pi$ rad.

知识点 6

弧长公式与扇形面积公式

弧长公式：$l=|\alpha|\cdot r$

扇形面积公式：$S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|\cdot r^2$

其中 α 是圆心角的弧度数，r 为圆的半径，l 为圆心角 α 所对弧长.

注意问题

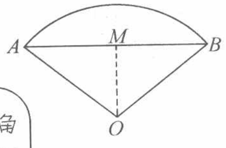
使用弧度制下的弧长公式、扇形面积公式有许多优越性，但是已知角若是以“度”为单位，则必须先把它化为弧度后再利用公式计算.

例6 一个扇形 OAB 的面积是 1 平方厘米，它的周长是 4 厘米，求 $\angle AOB$ 和弦 AB 的长.

【解析】欲求 $\angle AOB$，需要知道弧长和半径 OA 的长，用弧度制下的弧长公式和扇形面积公式，结合已知条件可求得，然后在 $\triangle AOB$ 中求弦 AB 的长. 作 $OM\perp AB$ 交 AB 于 M，则 $AM=BM=\frac{1}{2}AB$，在 $\text{Rt}\triangle AMO$ 中求 AM.

【答案】设扇形的半径为 r cm，弧长为 l cm.

由题意 $\begin{cases}2r+l=4\\ \frac{1}{2}rl=1\end{cases}$　解之得 $\begin{cases}r=1\\ l=2\end{cases}$



故 $\angle AOB=\frac{l}{r}=2$ rad；

过 O 作 $OM\perp AB$ 交 AB 于 M.

则 $AM=BM=\frac{1}{2}AB$.

在 $\text{Rt}\triangle AMO$ 中，$AM=\sin 1$，$\therefore AB=2\sin 1$

综上可得：$\angle AOB=2$ rad. 弦 AB 的长为 $2\sin 1$ 厘米.

运用公式 $|\alpha|=\frac{l}{r}$ 求圆心角时，结果为弧度数的绝对值，本题未涉及方向，故只需取正数。

点评 弧度制下的弧长公式、扇形面积公式比角度制下的相应公式形式简捷. 确定扇形的条件有两个，一般给出扇形半径、弧长和圆心角中的两个，可灵活运用扇形弧长公式、面积公式列方程组解决.

变题 已知一扇形的周长为 $c(c>0)$，当扇形的弧长为何值时，它有最大面积？并求出面积的最大值.

【解析】本题思路是根据扇形面积公式把面积表示成弧长的函数关系，转化为二次函数最值问题.

【答案】设扇形的半径为 R，弧长为 l，面积为 S.

$\because c=2R+l$，$\therefore R=\dfrac{c-l}{2}\ (l<c)$

则 $S=\dfrac{1}{2}Rl=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{c-l}{2}\cdot l=\dfrac{1}{4}(cl-l^2)$

$=-\dfrac{1}{4}(l^2-cl)=-\dfrac{1}{4}(l-\dfrac{c}{2})^2+\dfrac{c^2}{16}$

$\therefore$ 当 $l=\dfrac{c}{2}$ 时，$S_{\max}=\dfrac{c^2}{16}$

答：当扇形的弧长为 $\dfrac{c}{2}$ 时，扇形有最大面积，扇形面积的最大值是 $\dfrac{c^2}{16}$.

点评 (1)根据扇形有最大面积时的弧长，可以进一步求出此时圆心角的弧度数.

(2)解决扇形中的有关最值问题，往往运用函数思想、转化思想，化为二次函数的最值问题.

知识点 7
弧度制的应用

例7 用弧度制表示下列角的集合：

(1)终边落在 y 轴非负半轴上的角的集合为________________；

(2)终边落在第一、三象限的角的集合为________________.

【解析】对于(1)，在 $0\sim2\pi$ 范围内，终边落在 y 轴非负半轴上的角为 $\dfrac{\pi}{2}$，与 $\dfrac{\pi}{2}$ 终边相同的角即为所求.

对于(2)，先写出第一象限的角的集合，再写出第三象限的角的集合，最后求两集合的并集.

【答案】(1) $\left\{\alpha\,|\,\alpha=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$；

(2)第一象限的角的集合为 $A=\left\{\alpha\,|\,2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

第三象限的角的集合为 $B=\left\{\alpha\,|\,\pi+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

故所求集合为

$S=A\cup B$

$=\left\{\alpha\,|\,2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\,|\,\pi+2k\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha\,|\,2k\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\,|\,(2k+1)\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}$

$=\left\{\alpha\,|\,n\pi<\alpha<\dfrac{\pi}{2}+n\pi,n\in\mathbf{Z}\right\}$

点评 (1)弧度制下与角 α 终边相同的角(连同角 α 在内)的集合可表示为:

$$S=\{\beta \mid \beta=\alpha+2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$$

(2)对第(2)题要学会把并集的结论简化.

例8 将下列各角化成 $2k\pi+\alpha$ $(k\in \mathbf{Z}, 0\leqslant\alpha<2\pi)$ 的形式,并指出是第几象限角.

(1) $\frac{19}{3}\pi$;　　(2) $-315°$.

【解析】(1) $\frac{19}{3}\pi=6\pi+\frac{\pi}{3}$, $\frac{19}{3}\pi$ 与 $\frac{\pi}{3}$ 的终边相同,故 $\frac{19}{3}\pi$ 是第一象限角;

(2) $-315°=-\frac{7\pi}{4}=-2\pi+\frac{\pi}{4}$, $-315°$ 与 $\frac{\pi}{4}$ 的终边相同,是第一象限角.

点评 在表示角的集合时,一定要使用统一的单位.只能用弧度制与角度制中的一种,不可混用,绝对不能出现 $k\cdot 360°+\frac{\pi}{3}$ 或者 $2k\pi-60°$ 一类的写法.

易错清单

易错点:

研究角时不根据旋转方向确定正负角

例 将表的分针拨快 10 分钟,则分针转过的角是________.

【答案】 $-\frac{\pi}{3}$

【提醒】注意分针是按顺时针方向转动,转过的角度是负角.

点击高考

1. (2005·全国)已知 α 是第三象限角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 所在象限是　　(　　)

A. 第一或第二象限　　B. 第二或第三象限

C. 第一或第三象限　　D. 第二或第四象限

【解析】本题主要考查如何确定角的范围,属于基础知识的考查.

【答案】D.

2. (全国高考)集合 $M=\{x \mid x=45°+k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$, $N=\{x \mid x=90°+k\cdot 45°, k\in \mathbf{Z}\}$,则　　(　　)

A. $M=N$　　B. $M\supseteq N$　　C. $M\subseteq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

【解析】本题考查角的集合意义, M 中, $x=k\cdot 90°+45°=(2k+1)\cdot 45°$, $2k+1$ 是奇数; N 中, $x=(k+2)\cdot 45°$, $k+2$ 是整数.

也可这样理解, $M=\{x \mid x=45°+k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}\}$ 中, $45°$ 是集合中的一个角且每隔 $90°$ 就出现

一个符合题意的角，$N=\{x|x=90°+k\cdot 45°,k\in \mathbf{Z}\}$中，90°是集合中的一个角且每隔45°就出现一个符合题意的角.

【答案】C.

3.（北京）若角α是第四象限角，则$\pi-\alpha$是（　　）

A. 第一象限角　　B. 第二象限角　　C. 第三象限角　　D. 第四象限角

【解析】本题主要考查象限角及有关象限角的范围.

$\because \alpha$是第四象限角，

$\therefore -\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<2k\pi,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore -2k\pi<-\alpha<\frac{\pi}{2}-2k\pi,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore \pi-2k\pi<\pi-\alpha<\frac{3\pi}{2}-2k\pi,k\in \mathbf{Z}$,

$\therefore \pi-\alpha$是第三象限角.

也可以从对称角度去理解：$-\alpha$与α终边关于x轴对称，得$-\alpha$是第一象限角，$\pi-\alpha$与$-\alpha$终边关于原点对称，得$\pi-\alpha$是第三象限角.

【答案】C.

模拟演练

1. 一钟表的分针长10 cm，经过35分钟，分针的端点所转过的长为（　　）

A. 70cm　　B. $\frac{7}{6}$cm　　C. $(-\frac{25\pi}{3}-4\sqrt{3})$cm　　D. $\frac{35\pi}{3}$cm

2. 设集合$A=\{x|x=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{x|x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$，则集合$A$与$B$之间的关系为（　　）

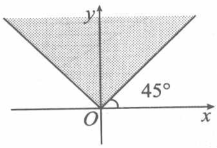
A. $A\subsetneqq B$　　B. $A\supsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. $A\cap B=\varnothing$

3. 与$-135°$终边相同的角的集合是____________.

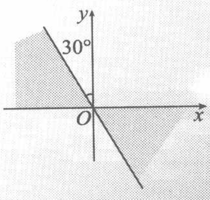
4. 把$\frac{2\pi}{3}$化为度的结果是__________；把$-315°$化为弧度的结果是__________.

5. 把$-1230°$化成$2k\pi+\alpha$（$k\in \mathbf{Z},0\leqslant\alpha<2\pi$）的形式为__________.

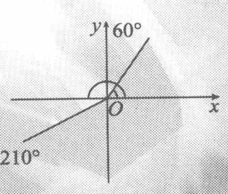
6. 写出终边在下列图中阴影区域的角的集合(包括边界)



(1)



(2)



(3)

7. 已知扇形OAB的圆心角α为120°，半径长为6，

(1)求$\overset{\frown}{AB}$的弧长；

(2)求弓形OAB的面积.

8. (1)已知 $S=\{\beta|k\cdot 360°-60°<\beta<k\cdot 360°+60°,k\in \mathbf{Z}\}$，$P=\{a|k\cdot 180°+30°<a<k\cdot 180+150°,k\in \mathbf{Z}\}$，求 $S\cap P$；

(2)已知 $A=\{\alpha|2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi,k\in \mathbf{Z}\}$，$B=\{\alpha|-4<\alpha<4\}$，求 $A\cap B$.

本章测试参考答案

1. D　　2. C

3. $\{\alpha|\alpha=-135°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

4. $120°$；　$-\dfrac{7\pi}{4}$

5. $-8\pi+\dfrac{7\pi}{6}$

6. (1)$S=\{\beta|45°+k\cdot 360°\leqslant\beta\leqslant 135°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

(2) $S=\{\beta|120°+k\cdot 180°\leqslant\beta\leqslant 180°+k\cdot 180°,k\in \mathbf{Z}\}$

(3)$S=\{\beta|-150°+k\cdot 360°\leqslant\beta\leqslant 60°+k\cdot 360°,k\in \mathbf{Z}\}$

7. (1)$\because \alpha=120°=\dfrac{2\pi}{3}\text{rad},r=6$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}$的弧长为 $l=\dfrac{2\pi}{3}\times 6=4\pi$.

(2)$\because S_{扇形OAB}=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\times 4\pi\times 6=12\pi$，

$S_{\triangle ABO}=\dfrac{1}{2}r^2\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times 6^2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$，

$\therefore S_{弓形OAB}=S_{扇形OAB}-S_{\triangle ABO}=12\pi-9\sqrt{3}$.

8. (1)对于集合 P，$k=2n$ 时，$P=\{a|n\cdot 360°+30°<a<n\cdot 360°+150°,n\in \mathbf{Z}\}$；

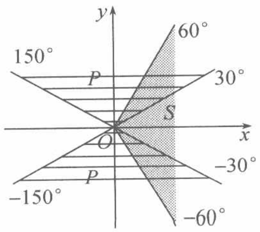
$k=2n+1$ 时，

$P=\{a|n\cdot 360°+210°<a<n\cdot 360°+330°,n\in \mathbf{Z}\}$

$=\{a|n\cdot 360°-150°<a<n\cdot 360°-30°,n\in \mathbf{Z}\}$；

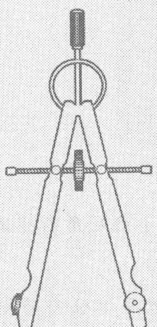
由图易知：$S\cap P=\{a|k\cdot 360°+30°<a<k\cdot 360°+60°,k\in \mathbf{Z}\}\cup\{a|k\cdot 360°-60°<a<k\cdot 360°-30°,k\in \mathbf{Z}\}$.

(2)$A\cap B=(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.



第2讲 任意角的三角函数

课标解读



【知识与技能】

使学生理解三角函数的定义，三角函数线、函数值在各象限的符号，掌握同角三角函数关系式及其应用.

【过程与方法】

培养学生利用数形结合的方法理解定义、逻辑推理及化归的能力.

【情感、态度与价值观】

通过本节课的教学，启示学生养成认真分析，积极运用逻辑推理和化归思想进行思维的良好习惯.

【教学重点】

让学生理解并掌握三角函数的定义及同角三角函数关系式.

【教学难点】

(1)三角函数的定义理解；

(2)同角三角函数关系式及其应用.

知识清单

知识点 1

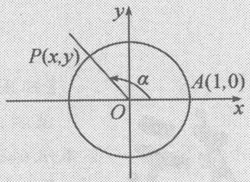
三角函数的定义

1. 利用单位圆来定义任意角的三角函数. 如图,设 α 是一个任意角,它的终边与单位圆交于点 $P(x,y)$,那么:

(1) y 叫做 α 的正弦(sine),记作 $\sin\alpha$,即 $\sin\alpha=y$;

(2) x 叫做 α 的余弦(cossine),记作 $\cos\alpha$,即 $\cos\alpha=x$;

(3) $\dfrac{y}{x}$ 叫做 α 的正切(tangent),记作 $\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}(x\neq0)$.



由图可以看出当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时,α 的终边在 y 轴上,终边上任意点的横坐标 x 都等于 0,所以 $\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$ 无意义,除此之外,对于确定的角 α,上述三个值都是唯一确定的实数. 正弦函数、余弦函数、正切函数都是以角为变量,以单位圆上点的坐标或坐标的比值为函数值的函数,我们将这种函数统称为三角函数.

2. 一般地,设角 α 的终边上任意一点的坐标为 $P(x,y)$,它与原点的距离为 r,则角 α 的三角函数为:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}(x\neq0)$$

注意问题

由于角的集合与数集之间可以建立一一对应关系,三角函数可以看成是以实数为自变量的函数.

任意角 α 的三角函数值只与 α 的大小有关,与点 P 在终边上的位置无关.

例1 利用三角函数的定义求 $\dfrac{2\pi}{3}$ 的正弦、余弦和正切值.

【解析】 利用三角函数在单位圆中的定义,求三角函数的关键在于确定角的终边与单位圆的交点 $P(x,y)$.

【答案】 在直角坐标系中,作 $\angle AOB=\dfrac{2\pi}{3}$,则可得 $\angle AOB$ 的终边与单位圆的交点坐标为点 $P\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$,所以

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2},\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}.$$

点评 掌握三角函数的定义是解本题的关键.

变题1 已知角 α 的终边经过点 $P(5,-12)$,求角 α 的正弦、余弦、正切值.

【解析】 题目中已给出终边上点的坐标,结合定义即可.

【答案】 因为 $x=5,y=-12$,