全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

Calculus

微积分 [经管类]

第二版

主编 徐兵

副主编 邱忠文 李连富 杜藏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

全国教育科学“十一五”规划课题研究成果

微积分［经管类］

Weijifen

第二版

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是全国教育科学"十一五"规划课题研究成果之一，由南开大学滨海学院、北京航空航天大学北海学院、天津大学仁爱学院、大连理工大学城市学院等十几所院校根据目前独立学院教学现状，结合多年在独立学院的教学经验联合修订而成。本书主要内容有：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分学，无穷级数，常微分方程和差分方程。书中每节配有 A、B 两套习题，并附有习题答案。

本书体现教学改革及教学内容的优化，针对独立学院的办学特色及教学需求，适当降低理论深度，突出将数学知识实用化的分析和运算方法，着重基本技能的训练而不过分追求技巧，突出基本训练的题目，兼顾知识学习与能力培养，有利于学生的可持续发展，并体现新的教学理念。

本书可作为独立学院经管类专业的大学数学教材，也可供有关人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

微积分：经管类/徐兵主编. —2 版. —北京：高等教育出版社，2010. 8
ISBN 978-7-04-030191-5

Ⅰ. ① 微… Ⅱ. ① 徐… Ⅲ. ① 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 125762 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	中原出版传媒投资控股集团 北京汇林印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
		版　　次	2008 年 6 月第 1 版
开　　本	787×960　1/16		2010 年 8 月第 2 版
印　　张	22.75	印　　次	2010 年 9 月第 2 次印刷
字　　数	420 000	定　　价	32.10 元

物料号　30191-00

第二版前言

依据培养应用型人才的要求，使教材在系统性、严密性方面更加有利于学生知识与能力的增长、有利于学生的可持续发展、尽可能体现新的教学理念，本书第二版保留了第一版的特色：注意解决系统性与适用性的关系、逻辑性与简洁性的关系、传统与潮流的关系、数学语言与通俗表述的关系。本教材强化了概念与实例引入，强化了几何解说，强调解决问题的思想方法，同时弱化了技巧、构造性证明以及纯数学定义。本书基本概念、基本理论表述准确，内容深入浅出，便于教师教、学生学。第二版在第一版基础上做了较大变动：重新编写了第一章、第二章、第六章第七节；极限与导数部分稍微增加了难度，使全书更加协调；对全书习题(B)重新进行了选配，以历年研究生入学考试试题为主，难度系数基本保持在0.4～0.8，既能让学生开阔视野，扩展深入学习的空间，也为教师习题课选题提供了方便；第二版《微积分》改为单册(即不分上、下册)。

第二版系列教材《高等数学(理工类)》、《微积分(经管类)》两书由北京航空航天大学北海学院教授徐兵主编；《线性代数(理工类)》、《线性代数(经管类)》由南开大学滨海学院教授肖马成主编；《概率论与数理统计(理工类)》、《概率论与数理统计(经管类)》由南开大学滨海学院教授周概容主编。

参加本书第二版改编的有：徐兵、邱忠文、杜藏、杨则燊、贺明峰、王千、曾绍标、杨凤翔、徐锬。其他参与编写的还有邓轶婧、杜莹、黎虹、牛玉玲、沈丽英、张欣、江青枝、吴伟、张学润、牛艳秋等。

由于编者水平有限，书中难免有欠妥之处，衷心希望读者批评指正。

作者

2010年3月于北京

目　　录

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象.函数关系是对变量之间的确定性关系的一种刻画,极限是研究函数的有效工具,连续性是函数的主要性质之一.本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上,进一步研究函数、极限与连续等概念及一些性质.

第一节　函数及其特性

一、点集与邻域

本书总是在实数集 **R** 上讨论问题,实数与数轴上的点可以形成一一对应关系,因此数集又称为点集.

区间是实数集 **R** 中的常用的一类子集,包括:

闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$;

开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$;

半开区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$, $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$;

无穷区间 $(a,+\infty)=\{x\,|\,a<x<+\infty\}$, $[a,+\infty)=\{x\,|\,a\leqslant x<+\infty\}$;

$(-\infty,a)=\{x\,|\,-\infty<x<a\}$, $(-\infty,a]=\{x\,|\,-\infty<x\leqslant a\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}$(实数集 **R**).上述区间中的 a,b 分别称为区间的左端点与右端点.

邻域也是高等数学中的常用概念.以 x_0 为中点的任何开区间都称为点 a 的

邻域. 设δ为任一正数，则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$. 点a称为邻域的中心，δ称为邻域的半径. 因此

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

而实数集$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$为在点a的δ邻域内去掉中心点a的实数集，它由两个区间$(a-\delta,a)$与$(a,a+\delta)$组成，常称之点a的去心邻域，记为$\mathring{U}(a,\delta)$.

如果不需要指明邻域的半径，上述邻域可分别写为$U(a)$与$\mathring{U}(a)$.

二、函数的概念

在自然现象和科学技术中常常遇到各种各样的量. 有的量在某过程中保持一定的数值，称为常量，通常用$a,b,c,\cdots$表示；有的量在该过程中发生变化，称为变量，通常用字母$x,y,z,\cdots$表示.

例如从北京出发到天津的城际列车，在旅客登车的过程中，列车与天津站的距离为常量；列车上乘客的人数为变量. 而列车行驶的过程中，该列车与天津站的距离为变量；列车上乘客的人数为常量. 这表明变量与常量是相对于某一过程而言的.

下面先给出关于两个变量关系的例子：

例 1　某城市近几年作了多次人口普查，统计结果如下：

年度	1998	2000	2002	2004	2008
人口数(万)	120	122	125	148	150

由统计表可以看出各普查年度与该城市人口数量之间的关系.

例 2　某城市一气象站温度自动记录仪绘出了某天该地区 24 小时的气温变化图，如图 1.1 所示.

图 1.1 显示出该城市当天各时刻与气温之间的关系.

例 3　边长为x的正方形的面积S与边长x有如下关系：

$$S=x^2.$$

上述三个例子表达的是不同情形下两个变量间的对应关系，常称之为函数关系，抽去上述各例的实际意义，我们给出下述定义：

定义 1　设x和y是两个变量，非空数集$D\subset\mathbf{R}$. 如果对于任何$x\in D$，按照一定的对应规则f，变量y有确定的值与之对应，则称y

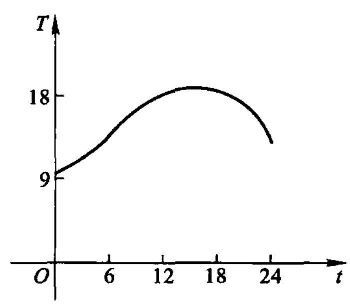

图 1.1

是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 称数集 D 为这个函数的定义域，常记为 $D_f=D$；称 x 为自变量，y 又称为因变量.

若 $x_0\in D_f$，相对应的 y 的值记为 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$. 当 x 取遍 D 内所有值，相应的函数值 y 的全体称为该函数的值域，记为 $V_f=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}$.

对应规则与定义域是函数定义的两个要素. 对应规则与定义域相同的任意两个函数都是同一个函数.

由函数的定义可知，例 1 表示了某城市人口数是年度的函数；例 2 表示了城市某天的天气温度是时间的函数；例 3 表示了正方形面积是正方形边长的函数. 三个例子的对应规则不同，这三个函数的表示法依次称为表格法、图示法、解析法.

如果在定义域的不同范围中，对应规则用不同的解析式表示，则称这类函数为分段函数.

例 4　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0\end{cases}$$

称为符号函数.

例 5　函数 $y=[x]$，符号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，称之为取整函数，其图形如图 1.2 所示. 也可以表示为

$[x]=k,\ k\leqslant x<k+1$，其中 k 为任意整数.

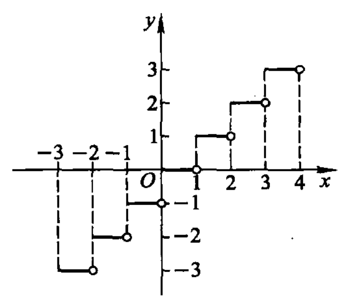

图 1.2

在实际问题中，函数的定义域由实际意义确定. 在不考虑实际意义的情形下，函数的定义域是使函数表达式有意义的自变量的全体取值组成的点集.

例 6　设 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x-x^2}}{x}$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

解　为使 $f(x)$ 有意义，其分母 $x\neq0$，开偶次方根的 $2+x-x^2\geqslant0$，可解得 $-1\leqslant x<0,0<x\leqslant2$，即 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,0)\cup(0,2]$.

三、函数的几种特性

1. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$，如果都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称 $y=f(x)$ 在区间 I 上是单调增加

(或减少)的函数.单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

如果函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加,则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是上升的,如图 1.3 所示.如果函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调减少,则该函数的图形在区间 I 上沿 Ox 轴正向是下降的,如图 1.4 所示.

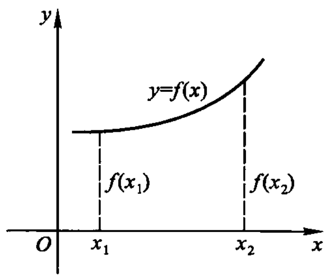

图 1.3

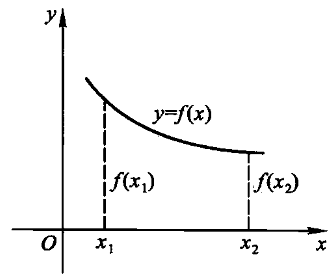

图 1.4

例如函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内为单调减少,在$(0,+\infty)$内为单调增加.

2. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$在点集 I 上有定义,如果存在正常数 M,对于任意的 $x\in I$,都有$|f(x)|\leqslant M$,则称 $y=f(x)$在 I 上有界.

例如函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界,这是因为总有$|\sin x|\leqslant 1$,但是 $y=x^2$ 在$(-\infty,+\infty)$内无界.

3. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f.如果存在正常数 T,对于任意 $x\in D_f$,都有$(x+T)\in D_f$,且 $f(x+T)=f(x)$,则称 $y=f(x)$为周期函数,T 称为周期.

通常所说的周期是指最小正周期.

例如 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的函数,$y=\tan x$ 是以 π 为周期的函数.$y=C$(C 为常量)也是周期函数,它没有最小周期.

4. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$的定义域 D_f 关于原点对称,即对任意 $x\in D_f$,都有$-x\in D_f$,如果对于任意 $x\in D_f$,都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称 $y=f(x)$为偶函数.如果对于任意 $x\in D_f$,都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $y=f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于 Oy 轴对称;奇函数的图形关于原点对称.

例如,$y=x^2$ 为偶函数,$y=x^3$ 为奇函数.$y=C$(C 为常量)为偶函数.$y=0$ 是唯一既为偶函数,也为奇函数的函数.

四、反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 V_f. 如果任取 $y\in V_f$，存在唯一的 $x\in D_f$ 与之对应，且满足 $f(x)=y$，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数 $x=\varphi(y)$，称之为 $y=f(x)$ 的反函数.

常称 $y=f(x)$ 为直接函数.

习惯上将自变量用 x 表示，将因变量用 y 表示，因此上述 $y=f(x)$ 的反函数写为 $y=\varphi(x)$.

直接函数与反函数满足 $f[\varphi(x)]=y$，$y\in V_f$；$\varphi[f(x)]=x$，$x\in D_f$.

在同一个平面直角坐标系中，直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

例 7　设 $y=1+\ln(x-2)$，求其反函数.

解　由 $y=1+\ln(x-2)$ 可解得 $x=e^{y-1}+2$. 因此

$$y=e^{x-1}+2$$

为所求反函数.

习题 1－1

(A)

一、求下列函数的定义域：

1. $f(x)=\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x^2-1}$.　　2. $g(x)=\dfrac{\ln(1-x)+\sqrt{x+2}}{x}$.

3. $h(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$.　　4. $y(x)=\sqrt{16-x^2}\ln\sin x$.

二、讨论下列函数的有界性、周期性及奇偶性：

1. $f(x)=\sin 3x$.　　2. $g(x)=|\sin x|$.

3. $h(x)=\tan x$.　　4. $y(x)=\ln(2+\cos x)$.

三、求下列函数的反函数：

1. $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.　　2. $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

3. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-1, \\ -x^2, & -1\leqslant x\leqslant 0, \\ \ln(1+x), & 0<x\leqslant e. \end{cases}$

(B)

一、1. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=($ $)$.

A. 0　B. 1　C. $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　D. $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

二、1. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

三、1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上 $f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=kf(x+2)$，其中 k 为常数，写出 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上的表达式.

第二节　初等函数

一、基本初等函数

中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数统称为基本初等函数.

1. 幂函数　$y=x^{a}$，a 为常数

常见幂函数及其图形如图 1.5 所示.

2. 指数函数　$y=a^{x}(a>0,a\neq 1)$

其图形如图 1.6 所示.

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，曲线过点 $(0,1)$，$y>0$.

当 $0<a<1$ 时，$y=a^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为单调减少.

当 $a>1$ 时，$y=a^{x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加.

3. 对数函数　$y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$

其图形如图 1.7 所示.

定义域为 $(0,+\infty)$，曲线过点 $(1,0)$.

当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

4. 三角函数

正弦函数　$y=\sin x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，周期是 2π，奇函数. 如图 1.8(a)所示.

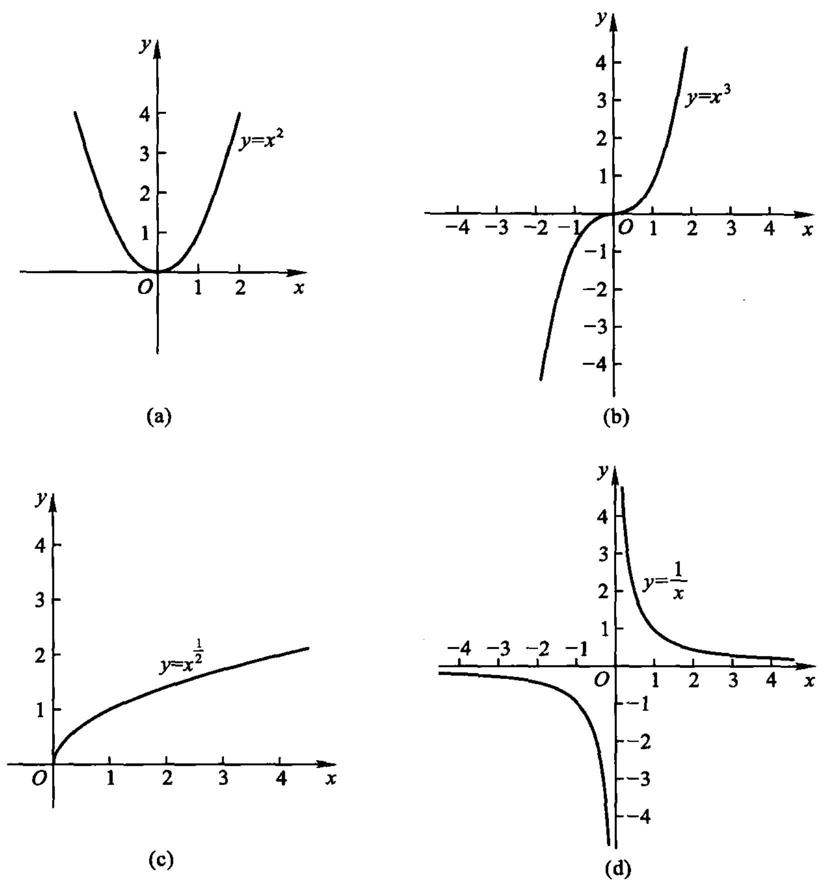

图 1.5

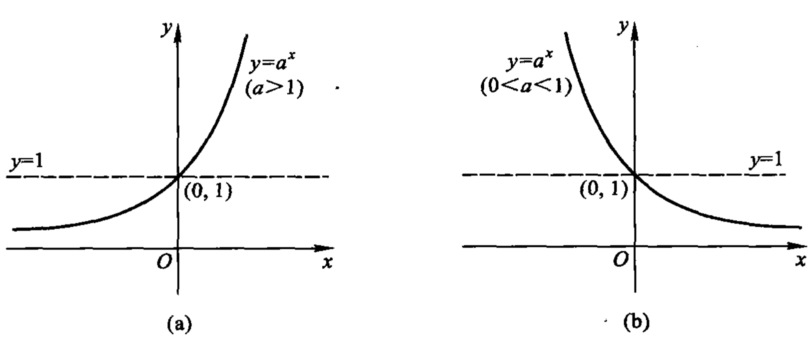

图 1.6

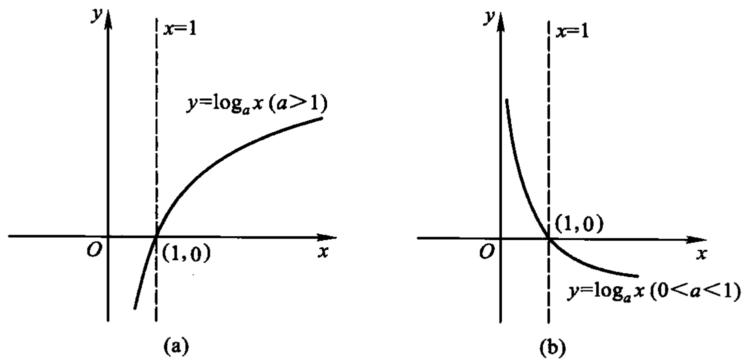

图 1.7

余弦函数　$y=\cos x$，定义域是$(-\infty,+\infty)$，周期是 2π，偶函数. 如图 1.8(b)所示.

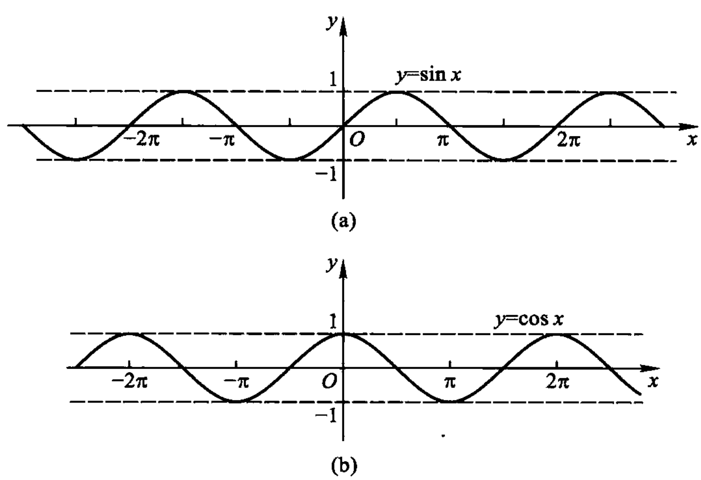

图 1.8

正切函数　$y=\tan x$，定义域是 $k\pi-\frac{\pi}{2}<x<k\pi+\frac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，周期是 π，奇函数. 如图 1.9(a)所示.

余切函数　$y=\cot x$，定义域是 $k\pi<x<(k+1)\pi, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，周期是 π，奇函数. 如图 1.9(b)所示.

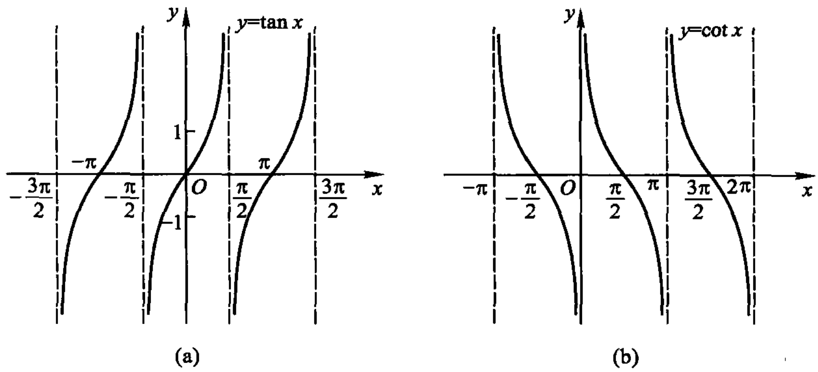

图 1.9

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$,定义域是$\left\{x\,|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$,周期是 2π.

余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$,定义域是$\{x\,|\,x\neq k\pi\}$,周期是 2π.

5. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,奇函数,单调增加函数.

反余弦函数 $y=\arccos x$,定义域是$[-1,1]$,值域是$[0,\pi]$,单调减少函数.

反正切函数 $y=\arctan x$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,奇函数,单调增加函数.

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域是$(-\infty,+\infty)$,值域是$(0,\pi)$,单调减少函数.

反三角函数图形如图 1.10 所示.

二、复合函数

设 $y=\ln u$,若 $u=x^2+1$,则可以得 $y=\ln(x^2+1)$. 通常称 $y=\ln(x^2+1)$是由函数 $y=\ln u$ 及 $u=x^2+1$ 复合而成的复合函数.

定义 1 设有函数 $y=f(u)$及 $u=\varphi(x)$. 如果 $V_\varphi\cap D_f\neq\varnothing$(空集),则 y 可以通过 u 构成 x 的函数,称此函数是由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,记作