高考密码系列丛书
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU

2009年度优秀助学读物
2009年度十大民营出版策划机构

密码原创

# 2011高中总复习

# 高考密码

丛书策划／十年高考教育研究院　丛书主编／任志鸿

MIMAGAOKAOMIMAGAOKAOMIMAGAOKAOMIMAGAOKAOMIMAGAOKAOMIMAGAOKAOMIMAGAOKAOM

## 理科数学

配人教A版



云南出版集团公司
云南教育出版社

打造中国高考第一原创品牌
2011

高考密码系列丛书

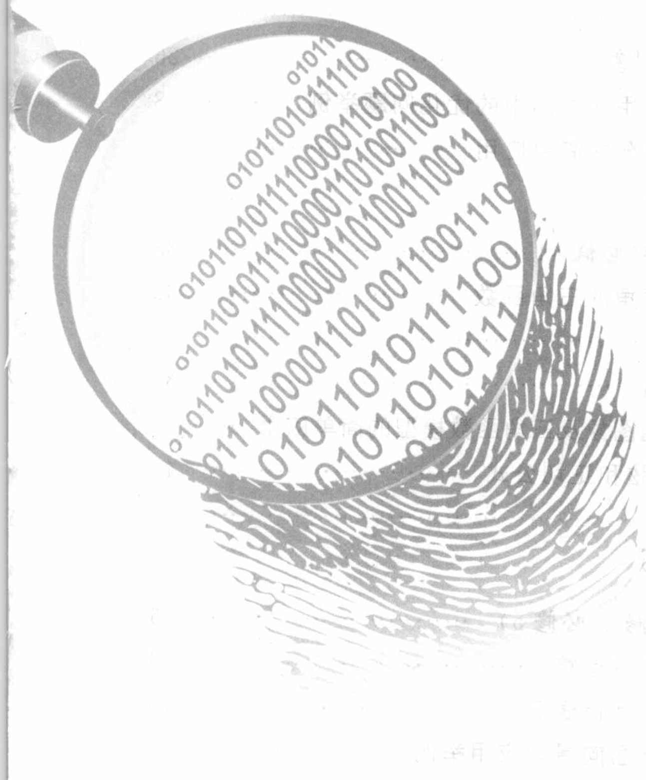
GAOKAOMIMAXILIECONGSHU

原创 密码

# 2011高中总复习

# 高考密码

丛书策划／十年高考教育研究院　丛书主编／任志鸿




主　编：王　方

副主编：宋克金　李新星　管目军

编　委：袁海燕　赵先举　孙小明

胡大波　苗立国　朱万忠

陶振亚　付祖勇　吴红军

田春燕　郑成新　杨志军


## 理科数学

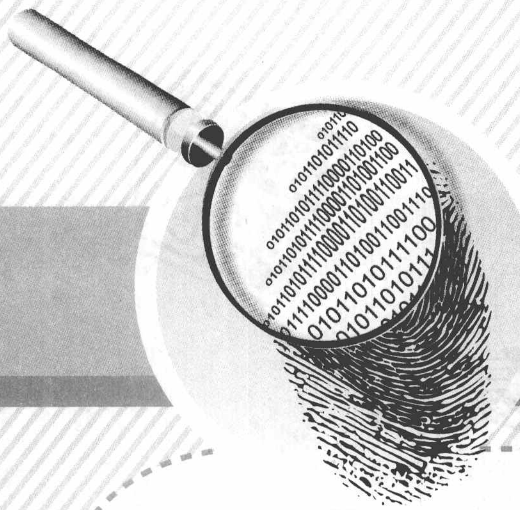
配人教A版


云南出版集团公司

云南教育出版社


打造中国高考第一原创品牌

2011



# Contents 目录

高考密码系列丛书

GAO KAO MI MA XI LIE CONG SHU


**第一章　集合与函数(必修1)** …… 1

第一节　集　合 …… 1

第二节　函数及其表示 …… 4

第三节　函数的单调性与奇偶性 …… 6

第四节　二次函数 …… 8

第五节　指数与指数函数 …… 10

第六节　对数与对数函数 …… 12

第七节　幂函数 …… 15

第八节　函数的图象及其变换 …… 17

第九节　函数与方程 …… 20

第十节　函数模型及其应用 …… 22

· 章末提升检测(一)(活页试题)

**第二章　导数及其应用(选修2—2)** …… 26

第一节　变化率与导数、导数的计算 …… 26

第二节　导数在研究函数中的应用和生活中的优化问题举例 …… 28

第三节　微积分基本定理与定积分的简单应用 …… 30

· 章末提升检测(二)(活页试题)

**第三章　三角函数与三角恒等变换(必修4)** …… 33

第一节　任意角的弧度制及任意角的三角函数 …… 33

第二节　三角函数的诱导公式 …… 35

第三节　三角函数的图象与性质 …… 37

第四节　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象及三角函数模型的简单应用 …… 39

第五节　两角和与差的正弦、余弦和正切公式 …… 42

第六节　简单的三角恒等变换 …… 44

· 章末提升检测(三)(活页试题)

**第四章　平面向量与解三角形(必修4、必修5)** …… 46

第一节　平面向量的概念及其线性运算 …… 46

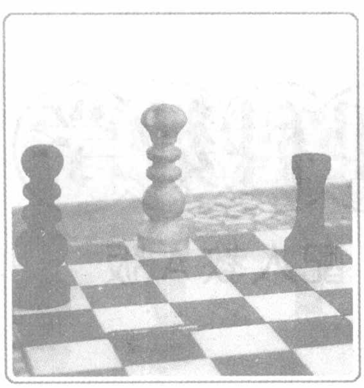
第二节　平面向量的基本定理及坐标表示 …… 49

第三节　平面向量的数量积及平面向量的应用举例 …… 51

第四节　正弦定理和余弦定理 …… 54

第五节　解三角形应用举例 …… 56

· 章末提升检测(四)(活页试题)

# Contents 高考密码

GAO KAO MI MA


**第五章　数列(必修5)** …… 59

第一节　数列的概念与简单表示法 …… 59

第二节　等差数列及其前 $n$ 项和 …… 61

第三节　等比数列及其前 $n$ 项和 …… 63

第四节　数列求和 …… 65

第五节　数列的综合应用 …… 67

·章末提升检测(五)(活页试题)

**第六章　不等式(必修5)** …… 70

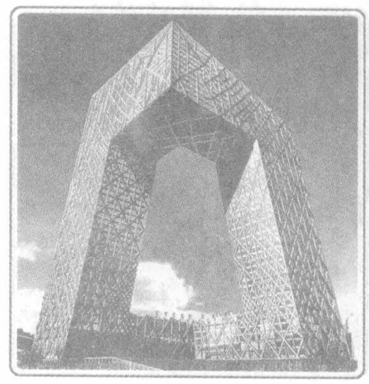
第一节　不等关系与不等式 …… 70

第二节　一元二次不等式及其解法 …… 72

第三节　二元一次不等式(组)和简单的线性规划 …… 74

第四节　基本不等式：$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ …… 76

·章末提升检测(六)(活页试题)


**第七章　立体几何初步(必修2、选修2－1)** …… 79

第一节　空间几何体的结构特征及其三视图和直观图 …… 79

第二节　空间几何体的表面积与体积 …… 82

第三节　空间点、直线、平面之间的位置关系 …… 84

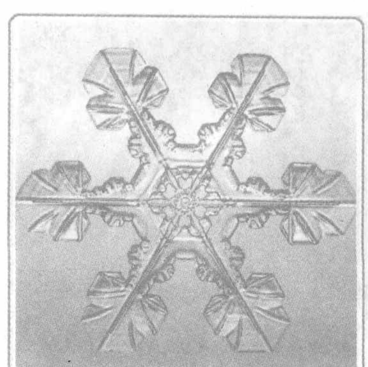
第四节　直线、平面平行的判定及其性质 …… 86

第五节　直线、平面垂直的判定及其性质 …… 88

第六节　空间向量及其运算 …… 91

第七节　立体几何中的向量方法 …… 93

·章末提升检测(七)(活页试题)


**第八章　平面解析几何(必修2、选修2－1)** …… 96

第一节　直线的倾斜角与斜率 …… 96

第二节　直线的方程 …… 98

第三节　直线的交点坐标与距离公式 …… 100

第四节　圆的方程 …… 102

第五节　直线、圆的位置关系 …… 104

第六节　曲线与方程 …… 107

第七节　椭　圆 …… 108

第八节　双曲线 …… 111

第九节　抛物线 …… 113

第十节　直线与圆锥曲线的综合应用 …… 115

# 高考密码 Contents

GAO KAO MI MA


·章末提升检测(八)(活页试题)

**第九章 常用逻辑用语、推理与证明(选修 2—1、选修 2—2)** ………… 118

第一节 命题及其关系、充分条件与必要条件 ………… 118

第二节 简单的逻辑联结词、全称量词与存在量词 ………… 120

第三节 合情推理与演绎推理 ………… 123

第四节 直接证明与间接证明 ………… 125

第五节 数学归纳法 ………… 127

·章末提升检测(九)(活页试题)

**第十章 算法初步、数系的扩充与复数的引入(必修 3、选修 2—2)** …… 130

第一节 算法与程序框图 ………… 130

第二节 基本算法语句与算法案例 ………… 133

第三节 复数的概念及其运算 ………… 136

·章末提升检测(十)(活页试题)

**第十一章 统计与统计案例(必修 3、选修 2—3)** ………… 139

第一节 随机抽样 ………… 139

第二节 用样本估计总体 ………… 141

第三节 变量间的相关关系 ………… 144

第四节 统计案例 ………… 146

·章末提升检测(十一)(活页试题)

**第十二章 计数原理、概率、随机变量及其分布(必修 3、选修 2—3)** … 150

第一节 分类加法计数原理与分步乘法计数原理 ………… 150

第二节 排列与组合 ………… 152

第三节 二项式定理 ………… 154

第四节 随机事件的概率 ………… 156

第五节 古典概型 ………… 158

第六节 几何概型 ………… 160

第七节 离散型随机变量及其分布列、期望与方差 ………… 162

第八节 二项分布及其应用 ………… 165

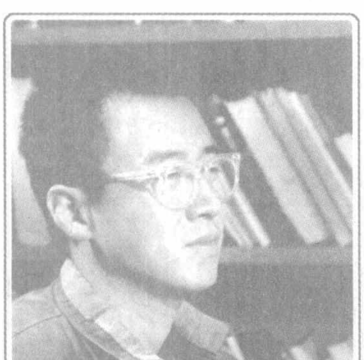
第九节 正态分布 ………… 167

·章末提升检测(十二)(活页试题)

**选修 4—1 几何证明选讲** ………… 169

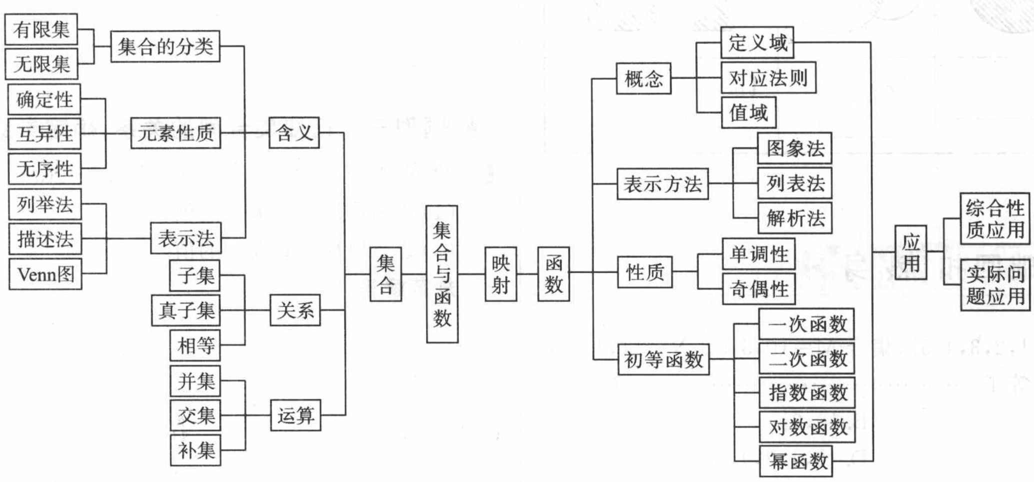
**选修 4—4 坐标系与参数方程** ………… 175

**选修 4—5 不等式选讲** ………… 181

# 第一章 集合与函数

## 知识体系构建




# 第一节 集合

## 考纲目标锁定

**1. 集合的含义与表示**

(1)了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系.

(2)能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.

**2. 集合间的基本关系**

(1)理解集合之间包含与相等的含义,能识别给定集合的子集.

(2)在具体情境中,了解全集与空集的含义.

**3. 集合的基本运算**

(1)理解两个集合的并集与交集的含义,会求两个简单集合的并集与交集.

(2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义,会求给定子集的补集.

(3)能使用 Venn 图表达集合的关系及运算.

## 知识要点梳理

**1. 元素与集合**

(1)集合中元素的三个特性:________、________、________.

(2)集合中元素与集合的关系.

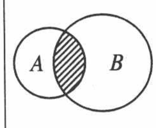
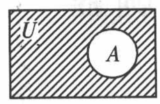
| 文字语言 | 符号语言 |
|---|---|
| 属于 | |
| 不属于 | |

**2. 集合间的基本关系**

| 关系 \ 表示 | 文字语言 | 符号语言 |
|---|---|---|
| 相等 | 集合 $A$ 与集合 $B$ 中的所有元素都相同 | ______ 或 $A=B$ |
| 子集 | 集合 $A$ 中任意一元素均为集合 $B$ 中的元素 | ______(或______) |
| 真子集 | 集合 $A$ 中任意一元素均为集合 $B$ 中的元素,且集合 $B$ 中至少有一元素不是集合 $A$ 中的元素 | ______(或______) |
| 空集 | 空集是任何集合的子集,是任何______的真子集 | $\varnothing\subseteq A$,$\varnothing\subsetneq B(B\neq\varnothing)$ |

**思考感悟**>>> 怎样理解空集与集合$\{0\}$和$\{\varnothing\}$之间的关系？

**3. 集合的基本运算**

| | 集合的并集 | 集合的交集 | 集合的补集 |
|---|---|---|---|
| 符号表示 | $A\cup B$ | $A\cap B$ | 若全集为$U$，则集合$A$的补集为______ |
| 图形表示 |  |  |  |
| 意义 | $\{x\mid$__________$\}$ | $\{x\mid$______ ______$\}$ | $\complement_U A=\{x\mid$______ ______$\}$ |

## 基础回扣热身
JICHUHUIKOURESHEN

1. 设集合$U=\{0,1,2,3,4,5\}$，集合$M=\{0,3,5\}$，$N=\{1,4,5\}$，则$M\cap(\complement_U N)$等于 ……………………………… (　　)
   A. $\{5\}$　　B. $\{0,3\}$
   C. $\{0,2,3,5\}$　　D. $\{0,1,3,4,5\}$
2. 下列结论正确的是 ………………………………………… (　　)
   A. $0\notin \mathbf{N}$　　B. $1\subseteq\{x^2-x=0\}$
   C. $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$　　D. $\varnothing\in\{0\}$
3. $A=\{x\mid(x-1)^2<3x-7\}$，则$A\cap\mathbf{Z}$的元素个数为________.
4. (密码原创)设集合$U$为全集，$A$、$B$是其两个子集，下列四个命题
   ①$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cap B=A$　②$A\subseteq B\Leftrightarrow A\cup B=B$　③$A\subseteq B\Leftrightarrow \complement_U B\subseteq\complement_U A$　④$A=B\Leftrightarrow A\cap B=A\cup B$
   其中正确命题的序号是________.
5. 设$A=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y+m\geqslant0\}$，若$A\cap B=A$，则实数$m$的取值范围是________.

## 精典例题示范
JINGDIANLITISHIFAN

### 题型一　集合间关系的判定

【例1】已知集合$M=\{x\mid x=m+\frac{1}{6},m\in\mathbf{Z}\}$，

$N=\{x\mid x=\frac{n}{2}-\frac{1}{3},n\in\mathbf{Z}\}$，

$P=\{x\mid x=\frac{p}{2}+\frac{1}{6},p\in\mathbf{Z}\}$，

则$M$、$N$、$P$满足关系 …………………………… (　　)

A. $M=N\subsetneqq P$
B. $M\subsetneqq N=P$
C. $M\subsetneqq N\subsetneqq P$
D. $N\subsetneqq P\subsetneqq M$

规范解答：________

### 题型二　集合的运算

【例2】设全集是实数集$\mathbf{R}$，$A=\{x\mid 2x^2-7x+3\leqslant0\}$，$B=\{x\mid x^2+a<0\}$.
(1)当$a=-4$时，求$A\cap B$和$A\cup B$；
(2)若$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=B$，求实数$a$的取值范围.
规范解答：

### 题型三　已知集合间的关系，确定参数的取值

【例3】设$A=\{x\mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，
(1)若$A\cap B=B$，求$a$的值；
(2)若$A\cup B=B$，求$a$的值.
规范解答：

### 题型四　新型集合的概念与运算

【例4】(12分)非空集合$G$关于运算$\oplus$满足：(1)对任意的$a$，$b\in G$，都有$a\oplus b\in G$，(2)存在$e\in G$，使得对一切$a\in G$都有$a\oplus e=e\oplus a=a$，则称$G$关于运算$\oplus$为"融洽集".现给出下列集合和运算：
①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$为整数的加法；
②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$为整数的乘法；
③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$为平面向量的加法；
④$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$为多项式的加法；
⑤$G=\{$虚数$\}$，$\oplus$为复数的乘法.
其中$G$关于运算$\oplus$为"融洽集"的有哪些？并说明理由.

**思路点拨**：充分理解"融洽集"的概念要求，而后将①②③④⑤逐一验证是否符合条件即可.

**规范解答**：①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$为整数的加法.

∵任意两个非负整数的和仍为非负整数，且存在$e=0$，使得对一切$a\in G$，都有$a\oplus0=0\oplus a=a$，

∴①符合$G$关于运算$\oplus$为"融洽集"；………… 2分

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$为整数的乘法.

∵任意两个偶数的乘积仍是偶数，但不存在偶数$e\in G$，使得对一切$a\in G$，都有$a\oplus e=e\oplus a=a$成立，

∴②不符合$G$关于运算$\oplus$为"融洽集"；………… 4分

③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$为平面向量的加法.

∵任意两个向量之和仍为向量，且存在$\mathbf{e}=\mathbf{0}$，使得对一切$\mathbf{a}\in G$，都有$\mathbf{a}\oplus\mathbf{0}=\mathbf{0}\oplus\mathbf{a}=\mathbf{a}$，

∴③符合$G$关于运算$\oplus$为"融洽集".………… 7分

④$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$为多项式的加法.

∵任意两个二次三项式的和不一定是二次三项式，

∴④不符合 $G$ 关于运算$\oplus$为"融洽集"；……… 9 分

⑤$G=\{$虚数$\}$，$\oplus$为复数的乘法.

∵任意两个虚数的乘积不一定是虚数，

∴⑤不符合 $G$ 关于运算$\oplus$为"融洽集". ……… 11 分

综上所述，其中 $G$ 关于运算$\oplus$为"融洽集"的有①③.

……………………………………………… 12 分

**点评**：新型集合的概念与运算问题是近几年新课标高考的热点问题.在给出新的运算法则的前提下，充分利用已知求解是关键.集合命题中与运算法则相关的问题，是对映射构建下的集合与集合、元素与元素间的运算相关性及封闭性的研究.

**变式演练** (密码改编)设$\oplus$是 $\mathbf{R}$ 上的一个运算，$A$ 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，若对任意 $a,b\in A$，有 $a\oplus b\in A$，则称 $A$ 对运算$\oplus$封闭.对于数集：自然数集、整数集、有理数集、无理数集中对加法、减法、乘法和除法(除数不为 0)四则运算都封闭的数集的个数是 ……………………… (　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

## 方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

**1. 集合的含义与表示**

(1)集合的元素必须满足"三性"：确定性、互异性、无序性.要解决与集合有关的问题，一方面，要善于抓住集合元素的"三性"；另一方面，在解答完毕之时，不要忘记检验集合的元素是否满足这"三性".

(2)要注意准确理解符号描述法$\{x|p(x)\}$，其中"|"前为元素所具有的形式，"|"后为元素所具有的属性 $p(x)$.

(3)要注意下列几个集合：

①$\{x|f(x)>0\}$表示使不等式 $f(x)>0$ 成立的数集；

②$\{x|y=f(x)\}$表示函数 $y=f(x)$的定义域；

③$\{y|y=f(x)\}$表示函数 $y=f(x)$的值域；

④$\{x|f(x)=0\}$是方程 $f(x)=0$ 的解集；

⑤$\{(x,y)|F(x,y)=0\}$是曲线 $F(x,y)=0$ 上的点构成的集合.

**2. 集合间的关系**

(1)对于两个集合 $A$ 与 $B$，如果集合 $A$ 的任何一个元素都是集合 $B$ 的元素，那么集合 $A$ 叫做集合 $B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

(2)若 $A\subseteq B$，且 $B$ 中至少有一个元素不在集合 $A$ 中，则称 $A$ 为 $B$ 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$(或 $B\supsetneqq A$).

(3)集合$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$有 $2^n$ 个子集，有 $2^n-1$ 个真子集，有 $2^n-2$ 个非空真子集.

**3. 集合的运算**

(1)求集合的并、交、补是集合间的基本运算，运算结果仍然还是集合，区分交集与并集的关键是"且"与"或"，在处理有关交集与并集的问题时，常常从这两个字眼出发去揭示、挖掘题设条件，结合 Venn 图或数轴，进而用集合语言表示，增强运用数形结合思想方法的意识.

(2)几个重要结论：

①摩根法则：$\complement_U(A\cap B)=(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$.

②集合的交集、并集与子集的关系：$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

③容斥原理：$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$(其中 $\mathrm{card}(A)$表示有限集合 $A$ 的元素个数).

**4. 解决集合问题的关键点**

(1)明确集合的元素的意义，它是什么类型的对象(如数、点、方程、图形等).

(2)弄清集合由哪些元素组成，这就需要我们把抽象的问题具体化、形象化，也就是善于对集合的三种语言(文字、符号、图形)进行相互转化，同时还要善于将多个参数表示的符号描述法$\{x|P(x)\}$的集合化到最简形式.

(3)要善于运用数形结合、分类讨论、化归与转化等数学思想方法来解决集合的问题.

(4)集合问题多与函数、方程、不等式等知识综合在一起，要注意各类知识的融会贯通.

## 速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 已知集合 $M=\{x|\frac{x-1}{x-2}>0\}$，$N=\{x|\log_2x<1\}$，则 $M\cap N$ 等于 ……………………………………… (　　)

A. $\varnothing$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-\infty,1)$

2. 满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的集合 $M$ 的个数是 ……………………………… (　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 定义一种运算"$\oplus$"，对于任意正整数 $n$ 满足以下运算：(1)$1\oplus1=2$；(2)$(n+1)\oplus1=2+n\oplus1$，则 $n\oplus1$ 用含 $n$ 的代数式可表示为 ……………………………… (　　)

A. $2n-1$　　B. $n$　　C. $2^n-1$　　D. $2^{n-1}$

4. (密码原创)集合 $A=\{n\in\mathbf{N}|\frac{2\,008}{3n-1}\in\mathbf{N}\}$，则集合 $A$ 的子集的个数为______个.

5. (密码改编)已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2+m,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)|y=2x,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 $m$ 的取值范围是________.

6. 已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求 $a$ 的值.

# 第二节　函数及其表示

## 考纲目标锁定
KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域；了解映射的概念.

2. 在实际情境中，会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数.

3. 了解简单的分段函数，并能简单应用.

## 知识要点梳理
ZHISHIYAODIANSHULI

**1. 函数的基本概念**

(1)函数的定义.

设$A$、$B$是非空的______，如果按照某种确定的对应关系$f$，使对于集合$A$中的______数$x$，在集合$B$中都有________确定的数$f(x)$和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合$A$到集合$B$的一个函数，记作______.

(2)函数的三要素：_________、_________和_________.

(3)相等函数：如果两个函数的_________和__________完全一致，则这两个函数相等，这是判断两个函数相等的依据.

**2. 函数的表示法**

表示函数的常用方法有：________、________、________.

**思考感悟**>>> 若两个函数的定义域与值域相同，它们是否是相等函数？

**3. 映射的定义**

设$A$、$B$是两个______的集合，如果按某一个确定的对应关系$f$，使对于集合$A$中的______一个元素$x$，在集合$B$中都有______确定的元素$y$与之对应，这样的对应叫做从集合$A$到集合$B$的一个映射，记作______.

**思考感悟**>>> 映射和函数有什么区别？

## 基础回扣热身
JICHUHUIKOURESHEN

1. 下列各组函数中，表示同一函数的是 ……………… (　　)

A. $y=x$与$y=\sqrt{x^2}$　　B. $y=(\sqrt{x})^2$与$y=\sqrt[3]{x^3}$

C. $y=x-1$与$y=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　D. $y=x^0$与$y=\dfrac{1}{x^0}$

2. 设$f:A\to B$是集合$A$到集合$B$的映射，则下列命题为真的个数是 ……………………………………… (　　)

①$A$中的每个元素在$B$中一定有元素与之对应；②$B$中的每个元素在$A$中一定有元素与之对应；③$A$中的每个元素在$B$中与之对应的元素必不相同.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

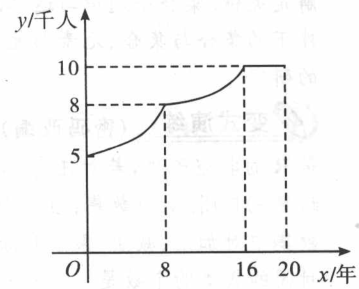
3. 在同一坐标系中，函数$f(x)$的图象与直线$x=1$的交点个数为 ………………………………………………… (　　)

A. 1　　B. 0或1

C. 2　　D. 可能有无数多个

4. (密码原创)已知$f(0)=1$，$f(a-b)=f(a)-b(2a-b+1)$，则$f(x)=$________.

5. 某城镇近20年常住人口$y$(千人)与时间$x$(年)之间的函数关系如右图.




在下述四种说法中，错误说法的选项是 … (　　)

A. 前16年的常住人口是逐渐增加的

B. 第16年后常住人口实现零增长

C. 前8年的人口增长率大于1

D. 第8年到第16年的人口增长率小于1

6. 若$f(x)=\begin{cases}2e^{x-1}, & x<2\\ \log_3(2x-1), & x\geqslant 2\end{cases}$，则$f(f(2))$的值为________.

## 精典例题示范
JINGDIANLITISHIFAN

### 题型一　求已知函数的定义域

【例1】求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{1}{2-|x|}+\sqrt{x^2-1}$；

(2)$y=\sqrt{25-x^2}+\lg\cos x$.

**规范解答：**

### 题型二　求已知函数的值域

【例2】求下列函数的值域：

(1)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

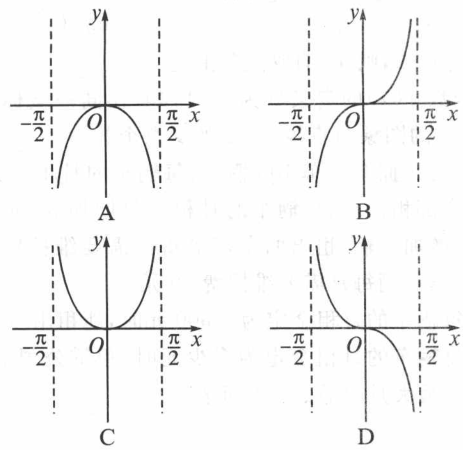
(2)$y=x-\sqrt{1-2x}$；

(3)$y=x+\dfrac{4}{x}$.

**规范解答：**

### 题型三 函数的图象问题

【例3】函数 $y=\ln\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象是 …… ( )




规范解答:________

### 题型四 分段函数

【例4】(12 分)甲、乙两地相距 150 千米,某货车从甲地运送货物到乙地,以每小时 50 千米的速度行驶,到达乙地后将货物卸下用了 1 小时,然后以每小时 60 千米的速度返回甲地.从货车离开甲地起到货车返回甲地为止,设货车离开甲地的时间和距离分别为 $x$ 小时和 $y$ 千米,试写出 $y$ 与 $x$ 的函数关系式.

**思路点拨:**根据已知条件列出等式,这个含有 $x$、$y$ 的方程就是所求的函数,这是一个分段函数,要注意距离与时间的变化关系.

**规范解答:**由题意,可知货车从甲地前往乙地用了 3 小时,而从乙地返回甲地用了 2.5 小时. ………… 2 分

(1)当货车从甲地前往乙地时,由题意,可知 $y=50x$ $(0\leqslant x\leqslant 3)$; ………… 5 分

(2)当货车卸货时,$y=150(3<x<4)$; ………… 8 分

(3)当货车从乙地返回甲地时,由题意,知 $y=150-60(x-4)(4\leqslant x\leqslant 6.5)$. ………… 11 分

所以 $y=\begin{cases}50x,0\leqslant x\leqslant 3\\150,3<x<4\\390-60x,4\leqslant x\leqslant 6.5\end{cases}$ . ………… 12 分

**点评:**这是一个实际应用问题,解决这类问题的关键是理解题意,找出数量关系,选择适当的数学模型进行解决.特别注意每种情况下 $x$ 的取值范围.

**变式演练**(密码改编)

已知 $f(x)=\begin{cases}x+2,x\leqslant -1\\2x,-1<x<2\\\frac{x^2}{2},x\geqslant 2\end{cases}$ 且 $f(a)=3$,求 $a$ 的值.

## 方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

**1. 有关函数定义域的问题一般可分为四类**

(1)已知函数的解析式求定义域,当解析式比较复杂时,通常根据各种条件列不等式求解.

(2)由 $y=f(x)$ 的定义域,求复合函数 $f[g(x)]$ 的定义域,这时 $g(x)$ 的值域就是 $f(x)$ 的定义域,由 $g(x)$ 的值域解出的 $x$ 的取值范围,即是 $f[g(x)]$ 的定义域.

(3)若函数的解析式表示的是实际问题,则函数的定义域除考虑解析式本身有意义外,还应使实际问题有意义.

(4)已知函数的定义域求参数的值域范围,这时要充分利用函数的性质.

**2. 求函数值域的常用方法**

(1)配方法.

转化为形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 类的二次函数求值域问题,均可用配方法,而后面的函数要注意 $f(x)$ 的范围.

(2)换元法.

运用代数或三角代换,将所给函数转化成值域容易确定的另一函数,从而求得原函数的值域的方法为换元法.形如:$y=ax+b\pm\sqrt{cx+d}$($a$、$b$、$c$、$d$ 均为常数,且 $ac\neq 0$)的函数常用此法求值域.

(3)基本不等式法.

当函数是分式形式且分子分母不同次数时常用此法.

(4)单调性法.

通过确定函数在定义域内(或某个定义域的子集上)的单调性求出函数值域的方法为单调性法.考虑用单调性法求值域常见的形式有 $y=ax+b+\sqrt{dx+e}$($a$、$b$、$d$、$e$ 均为常数,且 $ad\neq 0$),看 $a$ 与 $d$ 是否同号,若同号用单调性求值域,若异号则用换元法求值域;还有的在利用重要不等式求值域失败(等号不满足)的情况下,可采用单调性求值域,但需熟悉下列结论:函数 $y=x+\frac{k}{x}(x>0,k>0)$,$x\in(0,\sqrt{k}]$,函数递减,$x\in[\sqrt{k},+\infty)$,函数递增.

(5)数形结合法.

利用函数所表示的几何意义,借助几何方法或图象来求函数的值域的方法为数形结合法.

**3. 求值域时应注意的问题**

(1)用换元法求解析式或函数值域时,换元后易漏掉考虑新元的取值范围.例如 $f[h(x)]=g(x)$ 求 $f(x)$ 的问题,往往设 $h(x)=t$,从中解出 $x$,代入 $g(x)$ 进行换元来解,一定要注意新元 $t$ 的范围.

(2)求函数值域时,不但要重视对应法则的作用,而且要特别注意定义域的制约作用.

(3)判别式法求值域对端点要进行检验.

(4)利用均值不等式求值域时,要注意必须满足已知条件和不等式一端是常数,等号能成立,还要注意符号.

如函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的值域为 $[2,+\infty)$ 对吗?

(5)熟练掌握求函数值域的几种常用方法,要注意这些方法分别适用于哪些类型的函数.

励志金言:大多数人想要改造这个世界,但却罕有人想改造自己。

积极的人在每一次忧患中都看到一个机会,而消极的人则在每个机会都看到某种忧患。

莫找借口失败,只找理由成功。(不为失败找理由,要为成功找方法)

**4. 分段函数**

若函数在定义域的不同子集上对应关系不同，可用几个解析式来表示函数，这种形式的函数叫分段函数，它是一类重要函数.

分段函数是一个函数，而不是几个函数，它的连续与间断完全由对应关系来确定. 对于分段函数，必须分段处理，时时刻刻注意定义域优先原则.

## 速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 函数 $y=\sqrt{x^2-2x-8}+\lg(x-1)$ 的定义域为 ……（　　）

A. $(-2,1)\cup(4,+\infty)$　　B. $[-2,1)\cup[4,+\infty)$

C. $(-\infty,-2]\cup[4,+\infty)$　　D. $[4,+\infty)$

2. 下列四个函数中，在 $(0,1)$ 上为增函数的是…………（　　）

A. $y=\sin x$　　B. $y=-\log_2 x$

C. $y=(\frac{1}{2})^x$　　D. $y=x^{-\frac{1}{2}}$

3. 已知 $g(x)=1-2x$，$f[g(x)]=\frac{1-x^2}{x^2}(x\neq0)$，则 $f(0)$ 等于 ……………………………………（　　）

A. 1　　B. 3　　C. 7　　D. 9

4. （2010·山东聊城）已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\frac{1}{2})^x & x\leqslant0\\ \log_2(x+2) & x>0\end{cases}$，若 $f(x_0)\geqslant2$，则 $x_0$ 的取值范围是________.

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,3]$，在同一坐标系下，函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点个数为________.

6. 某租赁公司拥有汽车 100 辆，当每辆车的月租金为 3 000 元时，可全部租出. 当每辆车的月租金每增加 50 元时，未租出的车会增加一辆. 租出的车每辆每月需要维护费 150 元，未租出的车每辆每月需要维护费 50 元.

(1) 当每辆车的月租金定为 3 600 元时，能租出多少辆车？

(2) 当每辆车的月租金定为多少元时，租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少元？

# 第三节　函数的单调性与奇偶性

## 考纲目标锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 结合具体函数，了解函数奇偶性的含义.
2. 理解函数的单调性、最大值、最小值及其几何意义.
3. 会运用函数图象理解和研究函数的性质.

## 知识要点梳理

ZHISHIYAODIANSHULI

**1. 函数的单调性**

(1) 单调函数的定义.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $I$，如果对于定义域 $I$ 内的某个区间 $D$ 上的任意两个自变量的值 $x_1,x_2$，当 $x_1<x_2$ 时，

①若__________，则 $f(x)$ 在______上是增函数；

②若__________，则 $f(x)$ 在______上是减函数.

(2) 单调区间的定义.

若函数 $f(x)$ 在区间 $D$ 上是______或______，则称函数 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，______叫做 $f(x)$ 的单调区间.

**2. 函数的奇偶性**

| 奇偶性 | 定义 | 图象特点 |
|---|---|---|
| 偶函数 | 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$，都有________，那么函数 $f(x)$ 是偶函数 | 关于______对称 |

续表

| 奇偶性 | 定义 | 图象特点 |
|---|---|---|
| 奇函数 | 如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 $x$，都有________，那么函数 $f(x)$ 是奇函数 | 关于______对称 |

**思考感悟** 函数的单调性和奇偶性与函数的定义域有什么关系？

**3. 函数的最值**

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $I$，如果存在实数 $M$ 满足：

(1) 对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$.

(2) 存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$. 那么，我们称 $M$ 是函数 $y=f(x)$ 的__________值.

**思考感悟** 函数的最值与值域有何关系？

**4. 基本初等函数的值域**

(1) 一次函数 $y=kx+b(k\neq0)$ 的值域为______.

(2) 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$

当 $a>0$ 时，值域为____________；

当 $a<0$ 时，值域为____________.

(3) 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的值域为____________.

(4)指数函数的值域为________________.

(5)对数函数的值域为________________.

(6)正、余弦函数的值域为________________.

(7)函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 的值域为________________.

## 基础回扣热身

JICHUHUIKOURESHEN

1. 函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$ 的单调递减区间为 …………（　　）

A. $(-\infty,-3]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[-3,-1]$

2. 如果奇函数 $f(x)$ 在区间 $[3,7]$ 上是增函数且最小值为 5，那么在区间 $[-7,-3]$ 上是 ……………………（　　）

A. 增函数且最小值为 $-5$　　B. 增函数且最大值为 $-5$

C. 减函数且最小值为 $-5$　　D. 减函数且最大值为 $-5$

3. 若函数 $f(x)=x^3(x\in\mathbf{R})$，则函数 $y=f(-x)$ 在其定义域上是 ……………………………………（　　）

A. 单调递减的偶函数　　B. 单调递减的奇函数

C. 单调递增的偶函数　　D. 单调递增的奇函数

4. **(密码原创)**已知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且满足 $f(\frac{1}{x})>f(2)$，则 $x$ 的取值区间是________.

5. **(2010・上海春季高考)**已知函数 $f(x)=ax^2+2x$ 是奇函数，则实数 $a=$________.

6. 求函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的单调区间.

## 精典例题示范

JINGDIANLITISHIFAN

### 题型一　函数的单调性及其应用

【例1】已知函数 $f(x)=\frac{1}{a}-\frac{1}{x}(a>0,x>0)$，

(1)求证：$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数；

(2)若 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上的值域是 $[\frac{1}{2},2]$，求 $a$ 的值.

规范解答：

### 题型二　函数奇偶性的判定

【例2】判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=|x|(x^2+1)$；(2) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$；(3) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$；(4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1}$；(5) $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

规范解答：

### 题型三　单调性与奇偶性在抽象函数中的应用

【例3】函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x|x\neq0\}$，且满足对于任意 $x_1、x_2\in D$，有 $f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

(1)求 $f(1)$ 的值；

(2)判断 $f(x)$ 的奇偶性并证明；

(3)如果 $f(4)=1$，$f(3x+1)+f(2x-6)\leqslant3$，且 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，求 $x$ 的取值范围.

规范解答：

### 题型四　函数性质的综合应用

【例4】(12 分)已知函数 $f(x)=x^2+\frac{a}{x}(x\neq0$，常数 $a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的奇偶性，并说明理由；

(2)若 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，求 $a$ 的取值范围.

**思路点拨：**(1)本题可首先据 $f(x)$ 的解析式作出判断，显然其奇偶性与 $a$ 的取值有关，再举反例进行说明.

(2)根据 $a$ 的取值情况分别进行解答.

**规范解答：**(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，

对任意 $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

∴ $f(x)$ 为偶函数. ………………………………… 2 分

当 $a\neq0$ 时，$f(x)=x^2+\frac{a}{x}(a\neq0,x\neq0)$，

取 $x=\pm1$，得 $f(-1)+f(1)=2\neq0$，$f(-1)-f(1)=-2a\neq0$，

∴ $f(-1)\neq-f(1)$，$f(-1)\neq f(1)$，………… 4 分

∴函数 $f(x)$ 既不是奇函数，也不是偶函数. …… 5 分

(2)方法一：设 $2\leqslant x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{a}{x_1}-x_2^2-\frac{a}{x_2}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}\cdot[x_1x_2(x_1+x_2)-a]$，…………………… 8 分

要使函数 $f(x)$ 在 $x\in[2,+\infty)$ 上为增函数，则需 $f(x_1)-f(x_2)<0$ 恒成立. ……………………… 10 分

又∵ $x_1+x_2>4$，

∴ $x_1x_2(x_1+x_2)>16$.

∴ $a$ 的取值范围是 $(-\infty,16]$. ……………… 12 分

方法二：当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，显然在 $[2,+\infty)$ 为增函数，

当 $a<0$ 时，反比例函数 $\frac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 为增函数.

∴ $f(x)=x^2+\frac{a}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 为增函数.

当 $a>0$ 时，同方法一.

**数学名家：**沃尔夫　1887 年生于德国，其父亲是汉诺威城的五金商人。沃尔夫曾在德国研究化学，并获得博士学位，后移居古巴。他用了近 20 年的时间，经过大量的试验，历尽艰辛，成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法，从而成为百万富翁。他是沃尔夫基金会的倡导者和主要捐献人。沃尔夫于 1981 年逝世。

**点评**：(1)判断函数的单调性的一般思路：对于选择、填空题若能画出图象，一般用数形结合法；而对于由基本初等函数通过加、减运算或复合而成的函数常转化为基本初等函数单调性的判断问题；对于解析式较复杂的用导数法或定义法.

(2)对于函数的奇偶性的判断，首先要看函数的定义域是否关于原点对称，其次再看 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

**变式演练** (密码改编)函数 $y=f(x)(x\neq0)$ 是奇函数，且当 $x\in(0,+\infty)$ 时是增函数，若 $f(1)=0$，求不等式 $f[x(x-\frac{1}{2})]<0$ 的解集.

## 速效提升训练
SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 下列函数中，在其定义域内既是奇函数又是减函数的是（　　）
   A. $y=-|x|(x\in\mathbf{R})$　　B. $y=-x^3-x(x\in\mathbf{R})$
   C. $y=(\frac{1}{2})^x(x\in\mathbf{R})$　　D. $y=-\frac{1}{x}(x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0)$
2. 若函数 $y=x^2-3x-4$ 的定义域为 $[0,m]$，值域为 $[-\frac{25}{4},-4]$，则 $m$ 的取值范围是 ……………………（　　）
   A. $(\frac{3}{2},3)$　　B. $[\frac{3}{2},3]$　　C. $(0,3]$　　D. $[\frac{3}{2},3)$
3. (2009·福建高考)下列函数 $f(x)$ 中，满足“对任意 $x_1$、$x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$”的是 ……（　　）
   A. $f(x)=\frac{1}{x}$　　B. $f(x)=(x-1)^2$
   C. $f(x)=e^x$　　D. $f(x)=\ln(x+1)$
4. (密码原创)已知奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 的图象都过点 $(1,2)$，$(3,-1)$，则 $f(g(3))\cdot g(f(3))$ 的值为________.
5. 下列命题：
   ①函数 $y=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数；
   ②函数 $y=\lg|x|$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减；
   ③函数 $y=|\lg x|$ 是偶函数；
   ④函数 $y=\sin|x|$ 是偶函数，也是周期函数.
   其中为真命题的是________(把所有真命题的序号填在横线上).
6. 如果偶函数 $f(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(\frac{1}{2})=0$，求不等式 $f(\log_a x)>0(a>0$，且 $a\neq1)$ 的解集.

# 第四节　二次函数

## 考纲目标锁定
KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 掌握二次函数的图象与性质.
2. 通过“三个二次”掌握函数、方程、不等式间的关系.

## 知识要点梳理
ZHISHIYAODIANSHULI

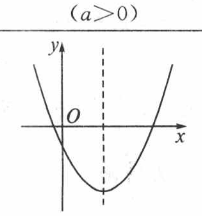
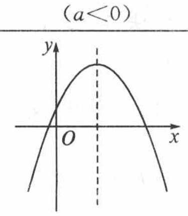
**1. 二次函数的三种表示形式**

(1)一般式：____________.

(2)顶点式：若二次函数的顶点坐标为 $(k,h)$，则其解析式为____________.

(3)两根式：若二次函数图象与 $x$ 轴的交点坐标为 $(x_1,0)$，$(x_2,0)$，则其解析式为____________.

**2. 二次函数的图象和性质**

| 解析式 | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ |
|---|---|---|
| 图象 |  |  |

续表

| 解析式 | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ | $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a<0)$ |
|---|---|---|
| 定义域 | **R** | **R** |
| 值域 | | |
| 增减性 | 在 $x\in(-\infty,-\frac{b}{2a}]$ 上单调递减<br>在________上单调递增 | 在________上单调递增<br>在 $x\in[-\frac{b}{2a},+\infty)$ 上单调递减 |
| 奇偶性 | $b=0$ 时为偶函数，$b\neq0$ 时为非奇非偶函数 | |
| 对称性 | 图象关于直线______成轴对称图形 | |

**思考感悟**>>> 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的 $a$、$b$、$c$ 与函数的图象有什么联系？



**魅力数学**：沃尔夫数学奖　1976 年 1 月，R. 沃尔夫及其家族捐献一千万美元成立了沃尔夫基金会。沃尔夫基金会有：数学、物理、化学、医学、农业五个奖(1981 年又增设艺术奖)。该奖的评奖标准不是单项而是终身奉献，获奖的数学大师不仅在某个数学分支上有极深的造诣和卓越的贡献，而且都博学多才，涉足多个分支，且均有建树，形成了自己的著名学派，他们是当代不同凡响的数学家。

## 基础回扣热身

JICHUHUIKOURESHEN

1. 函数 $y=x^2+bx+c$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，则 $b$ 的取值范围是…………………………………………………（  ）

A. $b\geqslant 0$ B. $b\leqslant 0$ C. $b>0$ D. $b<0$

2. 设全集 $I$ 为整数集 $\mathbf{Z}$，集合 $A=\{x|x^2-3x>0,x\in\mathbf{Z}\}$，则集合 $A$ 的补集为 ……………………………………………（  ）

A. $\{1,2\}$ B. $\{0,1,2\}$ C. $\{1,2,3\}$ D. $\{0,1,2,3\}$

3. **(密码原创)**已知 $f(x)=ax^2+2ax+4(0<a<3)$，若 $x_1<x_2$，$x_1+x_2=1-a$，则 ……………………………………（  ）

A. $f(x_1)>f(x_2)$

B. $f(x_1)<f(x_2)$

C. $f(x_1)=f(x_2)$

D. $f(x_1)$与 $f(x_2)$的大小无法确定

4. 若函数 $f(x)=\sqrt{2^{x^2-2ax-a}-1}$的定义域为 $\mathbf{R}$，则 $a$ 的取值范围是________.

5. 已知不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x|2<x<4\}$，则不等式 $cx^2+bx+a<0$ 的解集为________.

## 精典例题示范

JINGDIANLITISHIFAN

### 题型一 二次函数的值域或最值

【例1】求函数 $f(x)=x^2-2ax-1$ 在$[0,2]$上的值域.

**规范解答：**

### 题型二 二次函数的解析式

【例2】已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件$f(2-x)=f(2+x)$，其图象的顶点为 $A$，图象与 $x$ 轴的交点为 $B$、$C$，其中 $B$ 点的坐标为$(-1,0)$且$\triangle ABC$ 的面积为 18，试确定这个二次函数的解析式.

**规范解答：**

### 题型三 二次函数、二次方程和一元二次不等式

【例3】已知二次函数 $f(x)$的二次项系数为 $a$，且不等式$f(x)>-2x$ 的解集为$\{x|1<x<3\}$.

(1)若方程 $f(x)+6a=0$ 有两个相等的实根，求 $f(x)$的解析式；

(2)若 $f(x)$的最大值为正数，求 $a$ 的取值范围.

**规范解答：**

### 题型四 二次函数的综合问题

【例4】(12 分)设 $f(x)=3ax^2+2bx+c$，使 $a+b+c=0$，$f(0)>0$，$f(1)>0$，求证：

(1)$a>0$ 且 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$；

(2)方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两个实根.

**思路点拨：**(1)将题目中 $f(0)>0$，$f(1)>0$ 翻译为 $a$、$b$、$c$ 的关系式再进行求解.

(2)结合(1)中的不等关系，考虑顶点坐标的位置，从而确定根的情况.

**规范解答：**(1)$\because f(0)>0$，$f(1)>0$，

$\therefore c>0$，$3a+2b+c>0$.

由条件 $a+b+c=0$，消去 $b$，得

$a>c>0$；…………………………………………………… 2 分

由条件 $a+b+c=0$，消去 $c$，得 $2a+b>0$.

又$\because a+b<0$，

故 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$. ………………………………………… 5 分

(2)抛物线 $f(x)=3ax^2+2bx+c$ 的顶点坐标为$\left(-\dfrac{b}{3a},\dfrac{3ac-b^2}{3a}\right)$. ……………………………………………………………… 6 分

故 $-2<\dfrac{b}{a}<-1$ 的两边乘以 $-\dfrac{1}{3}$，得

$\dfrac{1}{3}<-\dfrac{b}{3a}<\dfrac{2}{3}$. ………………………………………… 8 分

又因为 $f(0)>0$，$f(1)>0$，

而 $f\left(-\dfrac{b}{3a}\right)=-\dfrac{a^2+c^2-ac}{3a}<0$， ………… 10 分

所以方程 $f(x)=0$ 在区间$\left(0,-\dfrac{b}{3a}\right)$与$\left(-\dfrac{b}{3a},1\right)$内分别有一实根，故方程 $f(x)=0$ 在$(0,1)$内有两个实根. …… ……………………………………………………………… 12 分

**点评：**解决与二次函数有关的问题，关键是通过配方得出顶点$\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$，由此可知函数的图象、对称轴、单调区间、最值和判别式等.

**变式演练** **(密码改编)**设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a、b、c\in\mathbf{R})$，且 $f(1)=-\dfrac{a}{2}$，$a>2c>b$.

(1)判断 $a$、$b$ 的符号；

(2)证明：$f(x)=0$ 至少有一个实根在区间$(0,2)$内.

## 方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

1. 解决与二次函数有关的问题关键是通过配方得出顶点坐标，由此可知函数的图象、对称轴、单调区间、最值和判别式等.

2. 关于二次函数 $f(x)=a(x-h)^2+k(a>0)$在闭区间$[m,n]$上的最值问题，有如下结论：

**魅力数学：**邵逸夫数学奖 被媒体誉为“21 世纪东方诺贝尔奖”的邵逸夫奖是 2002 年设立的，以表彰在学术及科学研究或应用等方面获得突破性成果，和该成果对人类生活产生深远影响的科学家。每项奖金 100 万美元。中国科学院与系统科学研究院吴文俊院士由于“对数学机械化这一新兴交叉学科的贡献”荣获 2006 年邵逸夫数学奖。这是中国国内学者首次获得此项国际性大奖。

(1)若 $h\in[m,n]$，则 $y_{\min}=f(h)$，$y_{\max}=\max\{f(m),f(n)\}$.

(2)若 $h\notin[m,n]$，则 $y_{\min}=\min\{f(m),f(n)\}$，$y_{\max}=\max\{f(m),f(n)\}$.

**3.** 注意三个“一元二次”的联系，并运用它们解决有关的综合问题.

**4.** 二次函数的综合应用.

(1)$ax^2+bx+c>0(a\neq0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$，

$ax^2+bx+c<0(a\neq0)$恒成立$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$.

(2)一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$根的分布，即相应二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的零点分布，也即抛物线与 $x$ 轴交点的分布，通过数形结合转化为不等式组求解. 注意开口方向、对称轴及纵截距的特点，能有效减少讨论.

(3)$ax^2+bx+c=0(a>0)$的两根为 $x_1,x_2$，且 $x_1<x_2$，则：

$ax^2+bx+c>0(a>0)$的解集为$\{x|x>x_2$ 或 $x<x_1\}$；

$ax^2+bx+c<0(a>0)$的解集为$\{x|x_1<x<x_2\}$.

## 速效提升训练
SUXIAOTISHENGXUNLIAN

**1.** 已知函数 $f(x)=x^2-4x$，$x\in[1,5]$，则函数 $f(x)$ 的值域是 …………（　　）

A. $[-4,+\infty)$　　B. $[-3,5]$

C. $[-4,5]$　　D. $(-4,5]$

**2.** 函数 $y=\sqrt{x^2-2x-3}+\log_2(x+2)$的定义域为 …（　　）

A. $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$

C. $(-2,-1]$　　D. $(-2,-1]\cup[3,+\infty)$

**3.** 函数 $y=\sqrt{x^2+2x-3}$的单调递减区间为 …………（　　）

A. $(-\infty,-3]$　　B. $(-\infty,-1]$

C. $[1,+\infty)$　　D. $[-3,-1]$

**4.**（密码原创）函数 $y=x-4\sqrt{x}$在区间$[0,1]$上的最小值为________.

**5.** 已知函数 $f(x)=-x^2+ax+b^2-b+1(a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R})$，对任意实数 $x$ 都有 $f(1-x)=f(1+x)$成立，若当 $x\in[-1,1]$时，$f(x)>0$ 恒成立，则 $b$ 的取值范围是________.

**6.** 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-2)=-1$，$f(-1)=-1$，且 $f(x)$的最大值是 8，求二次函数 $f(x)$.

# 第五节　指数与指数函数

## 考纲目标锁定
KAOGANGMUBIAOSUODING

**1.** 了解指数函数模型的实际背景.

**2.** 理解有理指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

**3.** 理解指数函数的概念，理解指数函数的单调性，掌握指数函数图象通过的特殊点.

**4.** 体会指数函数是一类重要的函数模型.

## 知识要点梳理
ZHISHIYAODIANSHULI

**1. 根式**

(1)根式的概念

| 根式的概念 | 符号表示 | 备注 |
| --- | --- | --- |
| 如果________，那么 $x$ 叫做 $a$ 的 $n$ 次方根 | — | $n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ |
| 当 $n$ 为奇数时，正数的 $n$ 次方根是一个________，负数的 $n$ 次方根是一个________ | $\sqrt[n]{a}$ | 零的 $n$ 次方根是零 |

续表

| 根式的概念 | 符号表示 | 备注 |
| --- | --- | --- |
| 当 $n$ 为偶数时，正数的 $n$ 次方根有____，它们互为________ | $\pm\sqrt[n]{a}$ | 负数没有偶次方根 |

(2)两个重要公式：

① $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_, & n\text{ 为奇数},\\ |a|=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_, & a\geq0\\ \_\_\_\_\_\_, & a<0\end{cases}, & n\text{ 为偶数};\end{cases}$

② $(\sqrt[n]{a})^n=$____.

**2. 分数指数幂**

(1)规定：正数的正分数指数幂的意义是：$a^{\frac{m}{n}}=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；正数的负分数指数幂的意义是：$a^{-\frac{m}{n}}=$________$(a>0,m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $n>1)$；0 的正分数指数幂等于____；0 的负分数指数幂________.

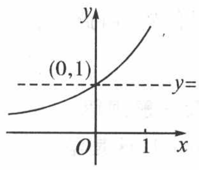
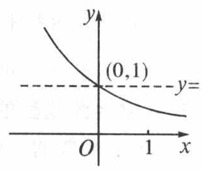
(2)分数指数幂的运算性质：$a^ra^s=$____，$(a^r)^s=$____，$(ab)^r=$____，其中 $a>0,b>0,r,s\in\mathbf{Q}$.

**思考感悟**>>> 分数指数幂与根式有何关系？



**魅力数学**：复变函数论(1)　复数的概念起源于求方程的根，在二次、三次代数方程的求根中就出现了负数开平方的情况。以复数作为自变量的函数就叫做复变函数，而与之相关的理论就是复变函数论。解析函数是复变函数中一类具有解析性质的函数，复变函数论主要研究复数域上的解析函数，因此通常也称复变函数论为解析函数论。

**3. 指数函数的图象及性质**

| | $a>1$ | $0<a<1$ |
|---|---|---|
| 图象 |  |  |
| 定义域 | | |
| 值域 | | |
| 性质 | (1)过定点$(0,1)$,即$x=0$时,$y=1$ | |
| | (2)当$x>0$时,____;$x<0$时,______ | (2)当$x>0$时,______;$x<0$时,______ |
| | (3)在$(-\infty,+\infty)$上是\_\_\_\_\_\_\_\_ | (3)在$(-\infty,+\infty)$上是______ |

## 基础回扣热身
JICHUHUIKOURESHEN

1. 将$\sqrt[3]{-2\sqrt{2}}$化为分数指数幂,其正确的形式是 ……(　　)
   A. $2^{\frac12}$　B. $-2^{\frac12}$　C. $2^{-\frac12}$　D. $-2^{-\frac12}$
2. 函数$f(x)=3^{-x}-1$的定义域、值域是 ……(　　)
   A. 定义域是$\mathbf{R}$,值域是$\mathbf{R}$
   B. 定义域是$\mathbf{R}$,值域是$(0,+\infty)$
   C. 定义域是$\mathbf{R}$,值域是$(-1,+\infty)$
   D. 以上都不对
3. 函数$y=a^{|x|}(a>0$,且$a\neq1)$,若对$m<n<0$,有$f(m)>f(n)$成立,则$a$的取值范围是 ……(　　)
   A. $(0,1)$　B. $(1,+\infty)$　C. $(0,+\infty)$　D. $(1,2)$
4. (密码改编)设$y_1=4^{0.9}$,$y_2=8^{0.44}$,$y_3=(\frac12)^{-1.5}$,则$y_1$、$y_2$、$y_3$的大小关系是________.(按从大到小排列)
5. 函数$y=a^{x+5}+1(a>0,a\neq1)$的图象恒过定点________.
6. 容器A中有$m$升水,将容器A中的水缓慢注入容器B(B是空的)中,$t$分钟后容器A中剩余水量$y$符合指数函数$y=me^{-at}$($e=2.718\cdots$为自然对数的底数,$a$为正常数).若经过5分钟后,容器A和容器B中的水量相等,再经过$n$分钟,容器A中的水只有$\frac{m}{8}$,则$n$的值为________.

## 精典例题示范
JINGDIANLITISHIFAN

### 题型一　指数幂的运算

【例1】化简下列各式:

(1)$(0.027)^{-\frac13}-(\frac17)^{-2}+(2\frac79)^{\frac12}-(\sqrt2-1)^0$;

(2)$(\frac56a^{\frac13}b^{-2})\cdot(-3a^{-\frac12}b^{-1})\div(4a^{\frac23}\cdot b^{-3})^{\frac12}\times\sqrt{ab}$;

(3)$\dfrac{a^{\frac43}-8a^{\frac13}b}{4b^{\frac23}+2\sqrt[3]{ab}+a^{\frac23}}\div(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}})\times\sqrt[3]{a}$.

**规范解答:**

### 题型二　指数函数的图象

【例2】已知函数$y=(\frac13)^{|x+1|}$.

(1)作出图象;

(2)由图象指出其单调区间;

(3)由图象指出当$x$取什么值时有最值.

**规范解答:**

### 题型三　指数函数的性质

【例3】已知函数$f(x)=a^{2x}+2a^x-1(a>0$,且$a\neq1)$在区间$[-1,1]$上的最大值为14,求实数$a$的值.

**规范解答:**

### 题型四　指数函数的综合应用

【例4】(12分)已知$f(x)=\frac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x})(a>0$且$a\neq1)$.

(1)判断$f(x)$的奇偶性;

(2)讨论$f(x)$的单调性;

(3)当$x\in[-1,1]$时,$f(x)\geqslant b$恒成立,求$b$的取值范围.

**思路点拨:**(1)首先看函数的定义域而后用奇偶性定义判断;

(2)单调性利用复合函数的单调性易于判断,还可用导数解决;

(3)恒成立问题关键是探求$f(x)$的最小值.

**规范解答:**(1)函数定义域为$\mathbf{R}$,关于原点对称.

又因为$f(-x)=\frac{a}{a^2-1}(a^{-x}-a^x)$

$=-f(x)$,

所以$f(x)$为奇函数. ……3分

(2)当$a>1$时,$a^2-1>0$,

$y=a^x$为增函数,$y=a^{-x}$为减函数,从而$y=a^x-a^{-x}$为增函数.所以$f(x)$为增函数. ……5分

当$0<a<1$时,$a^2-1<0$,

$y=a^x$为减函数,$y=a^{-x}$为增函数,从而$y=a^x-a^{-x}$为减函数,所以$f(x)$为增函数.

故当$a>0$,且$a\neq1$时,$f(x)$在定义域内单调递增. ……7分

(3)由(2)知$f(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数,

∴在区间$[-1,1]$上为增函数,

∴$f(-1)\leqslant f(x)\leqslant f(1)$,

**魅力数学:**复变函数论(2)　复变函数论主要包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数理论、留数理论、广义解析函数等方面的内容。它曾经推动过一些学科的发展,并且常常作为有力的工具应用在实际问题中,它的基础内容已成为理工科很多专业的必修课程。现在,复变函数论中仍然有不少尚待研究的课题,所以它将继续向前发展,并将有更广范围的应用。

$\therefore f(x)_{\min}=f(-1)=\dfrac{a}{a^2-1}(a^{-1}-a)$

$=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{1-a^2}{a}=-1.$ ………………………… 10 分

$\therefore$要使 $f(x)\geqslant b$ 在$[-1,1]$上恒成立，则只需 $b\leqslant -1$，故 $b$ 的取值范围是$(-\infty,-1]$. ……………… 12 分

**变式演练** (密码改编)设 $a>0$，$f(x)=\dfrac{e^x}{a}+\dfrac{a}{e^x}$ 是 **R** 上的偶函数.

(1)求 $a$ 的值；

(2)解方程 $f(x)=2$.

## 方法规律总结

FANGFAGUILVZONGJIE

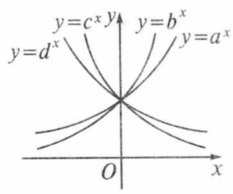
**1. 指数函数的图象及性质**

(1)指数函数在同一直角坐标系中的图象的相对位置与底数大小的关系如图所示，则 $0<c<d<1<a<b$.

在 $y$ 轴右侧，图象从上到下相应的底数由大变小；

在 $y$ 轴左侧，图象从下到上相应的底数由大变小；

即无论在 $y$ 轴的左侧还是右侧，底数按逆时针方向变大.




(2)指数函数 $y=a^x$ 与 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$的图象关于 $y$ 轴对称.

**2. 学习指数、指数函数应注意的问题**

(1)分数指数幂与根式可以互化，通常利用分数指数幂进行根式的运算.

(2)运用公式进行式的变形时，应注意公式成立的条件，以减少运算的失误.

(3)式的运算、变形、求值、化简及等式证明在数学中占有重要的地位，是研究方程、不等式和函数的基础，应引起重视.

(4)在有关根式、分数指数幂的变形、求值过程中，要注意运用方程的观点处理问题，通过解方程或方程组来求值.

(5)在理解指数函数的概念时，应抓住定义的"形式"，像 $y=2\times 3^x$，$y=x^{\frac{1}{2}}$，$y=3^{\sqrt{x-2}}$，$y=2^x-1$ 等函数均不符合形式 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$，因此，它们都不是指数函数.

(6)画指数函数 $y=a^x$ 的图象，应抓住三个关键点：$(1,a)$，$(0,1)$，$\left(-1,\dfrac{1}{a}\right)$. 熟记指数函数 $y=10^x$，$y=2^x$，$y=\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$，$y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在同一坐标系中图象的相对位置，由此掌握指数函数图象的位置与底数大小的关系.

**3. 指数函数题型的解题方法及一般规律**

(1)指数函数的底数 $a>0$ 且 $a\neq 1$，这是隐含条件.

(2)指数函数 $y=a^x$ 的单调性与底数 $a$ 有关，当底数 $a$ 与 1 的大小关系不确定时应注意分类讨论.

(3)比较两个指数幂大小时，尽量化同底或同指，当底数相同，指数不同时，构造同一指数函数，然后比较大小；当指数相同，底数不同时，构造两个指数函数，利用图象比较大小.

(4)解简单的指数不等式时，当底数含参数，且底数与 1 的大小不确定时，注意分类讨论.

## 速效提升训练

SUXIAOTISHENGXUNLIAN

1. 下列关系中正确的是……………………………………（　　）

A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$　　B. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

C. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$　　D. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. 若 $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$，$b=(2-\sqrt{3})^{-1}$，则$(a+1)^{-2}+(b+1)^{-2}$的值是……………………………………………（　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 设 $x>0$ 且 $a^x<b^x<1$，$a,b\in(0,+\infty)$，则 $a,b$ 的大小关系是 ……………………………………………（　　）

A. $b<a<1$　　B. $a<b<1$

C. $1<b<a$　　D. $1<a<b$

4. (密码原创)方程$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-a=0$ 有两个实数解，则 $a$ 的取值范围是__________.

5. 函数 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-|x|}$ 的值域为__________.

6. 要使函数 $y=1+2^x+4^xa$ 在 $x\in(-\infty,1]$上 $y>0$ 恒成立，求 $a$ 的取值范围.

# 第六节　对数与对数函数

## 考纲目标锁定

KAOGANGMUBIAOSUODING

1. 理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；了解对数在简化运算中的作用.

2. 理解对数函数的概念及单调性，掌握对数函数图象通过的特殊点.

3. 知道对数函数是一类重要的函数模型.

4. 了解指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数$(a>0$，且 $a\neq 1)$.



魅力数学：国王怪题　古时候，有个国王出了个怪题，他给每个应试者 1 000 颗珍珠和 10 只精制的木盒，说："你们可将珍珠 1 000 颗分装进 10 只木盒里，每只盒中随意装多少都可以，只是有个要求——你们分装之后，我从 1 至 999 的数字中，任意说出一个数字来，你们就能整盒整盒地端出与我说的数字相等的珍珠来，不得破盒临时拼凑。"应试者中只有一个十多岁的男孩分装好了。你知道这位男孩是怎样分装的吗？