拍卖基本理论与扩展

刘树林　王明喜／著

科学出版社

拍卖基本理论与扩展

刘树林　王明喜　著

全国优秀博士论文作者专项资金资助项目(200159)
国家自然科学基金项目(70571014)

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书首先较系统地介绍了第一价格密封拍卖、第二价格密封拍卖、英式拍卖和荷兰式拍卖这四种标准拍卖的基本理论，包括收益等价原理、最优拍卖和机制设计理论；特别详细地介绍了得到这些基本理论的推导过程中所需要的数学分析、概率论和微分方程等技术。其次，还介绍了作者对四种标准拍卖的一些延伸和扩展工作。最后，介绍了作者在担保拍卖、多属性拍卖和双重拍卖方面的一些工作。

本书适合于从事招投标与拍卖理论和应用研究、微观经济学和产业组织理论和应用研究、管理科学理论和应用研究的学者、研究生以及从事招投标与拍卖理论和应用研究的有关业界学者阅读参考。

图书在版编目(CIP)数据

拍卖基本理论与扩展/刘树林，王明喜著. —北京：科学出版社，2011
ISBN 978-7-03-029543-9

Ⅰ.①拍… Ⅱ.①刘…②王… Ⅲ.①拍卖-研究 Ⅳ.①F713.359

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 224235 号

责任编辑：马 跃 / 责任校对：何艳萍
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2011 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 1 月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—2 500 字数：250 000

定价：36.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

我和我的三届博士生们以“投标和拍卖”为主题的讨论班进行了两年多。在这期间，我们精读了许多有关投标和拍卖的经典文献和部分近几年的学术论文。通过研读这些文献和论文，我们对投标和拍卖理论领域有了更好的把握，同时也产生了把前人的结果在消化和吸收的基础上向国内同行进行系统介绍的想法。

本书注重基本定义的介绍、定理的推导过程、解决问题的基本方法和思路以及模型构建的经济背景。尤其重视拍卖理论中定理的推导技术，有的定理我们给出了两种或两种以上的证明方法。与国内外同类拍卖著作相比，本书的可读性和逻辑性更强，对研究投标和拍卖所需要的基础知识做了更细致的介绍，使得所使用的技术方法更容易理解。在阅读完本书后，读者完全具备从事投标和拍卖方面的理论和应用研究所需要的基础知识和技术。

拍卖理论中最经典的模型是独立私人估价模型，这一模型建立在六条基本假定的基础上。随着时间的流逝，一些经济学者不懈地努力，逐步把经典私人估价模型的假设条件放宽，出现了公共估价模型和关联性估价模型。与此同时，有些学者站在更高的层面，从抽象的层面——机制设计去研究拍卖，得到收益等价定理、显示原理、VCG 机制等著名结论，并提出预算均衡、个人理性和激励相容等重要概念和结论。

本书内容安排如下：第 1 章介绍阅读本书要用到的数学知识和与拍卖有关的基本概念。第 2 章至第 4 章介绍在拍卖理论中最经典和最成熟的理论——独立私人估价模型。第 5 章和第 6 章对私人估价模型进一步延伸。第 7 章研究机制设计。第 8 章介绍委托拍卖的一种形式——担保拍卖。第 9 章涉及多属性逆向拍卖的内容。第 10 章是多单位双边拍卖的内容。

本书的读者可以是从事投标与拍卖研究和教学的教师，也可以是对投标与拍卖进行研究的研究生。

限于时间、精力和作者的知识水平，即使是本书论及的主题，也无法将相关文献中的分析和观点一一阐述；此外，本书不足之处在所难免，敬请读者批评指正。

对外经济贸易大学

刘树林

2010 年 10 月

目　　录

序
第 1 章　引论 …… 1
1.1　拍卖 …… 1
1.2　拍卖方式 …… 2
1.2.1　四种标准拍卖方式 …… 2
1.2.2　其他的拍卖方式 …… 3
1.2.3　其他一些基本概念 …… 3
1.2.4　常用记号 …… 4
1.3　预备概率论知识 …… 5
1.3.1　顺序统计量 …… 5
1.3.2　关联随机变量 …… 8
1.4　本章结束语 …… 8
第 2 章　私人估价模型 …… 11
2.1　基本假设 …… 11
2.2　一级价格密封式拍卖 …… 12
2.2.1　均衡投标策略 …… 12
2.2.2　卖者的预期收益 …… 17
2.3　二级价格密封式拍卖 …… 18
2.3.1　均衡投标策略 …… 18
2.3.2　卖者的预期收益 …… 20
2.4　英式拍卖 …… 20
2.4.1　均衡投标策略 …… 20
2.4.2　卖者的预期收益 …… 21
2.5　荷兰式拍卖 …… 21
2.6　卖者的预期收益比较 …… 21
2.7　本章结束语 …… 21
第 3 章　收益等价定理 …… 23
3.1　收益等价定理的主要结果 …… 23
3.2　收益等价定理的一些应用 …… 25
3.2.1　再论投标策略 …… 25

3.2.2 民事侵权改革 ………………………………………… 26
3.3 本章结束语………………………………………… 27
第4章 最优拍卖 ………………………………………… 29
4.1 最优拍卖的主要结果………………………………………… 29
4.2 最优拍卖的一些应用………………………………………… 32
4.3 本章结束语………………………………………… 34
第5章 一些延伸 ………………………………………… 35
5.1 风险规避的投标者………………………………………… 35
5.2 预算约束………………………………………… 39
5.2.1 二级价格密封式拍卖 ………………………………………… 40
5.2.2 一级价格密封式拍卖 ………………………………………… 41
5.2.3 预期收益比较 ………………………………………… 41
5.3 非对称的投标者………………………………………… 42
5.3.1 非对称的一级价格密封式拍卖 ………………………………………… 42
5.3.2 预期收益比较 ………………………………………… 46
5.3.3 效率比较………………………………………… 47
5.4 再卖与效率………………………………………… 47
5.5 基于柯布-道格拉斯效用的拍卖模型 ………………………………………… 49
5.5.1 引言 ………………………………………… 49
5.5.2 CDIPV 拍卖模型 ………………………………………… 51
5.6 三类风险投标者共存下的一级价格拍卖………………………………………… 55
5.6.1 引言 ………………………………………… 55
5.6.2 模型 ………………………………………… 56
5.6.3 投标策略………………………………………… 57
5.7 带佣金率和保留价的一级和二级价格密封式拍卖………………………………………… 62
5.7.1 引言 ………………………………………… 62
5.7.2 模型 ………………………………………… 64
5.7.3 报价策略………………………………………… 65
5.7.4 卖方和拍卖行的预期收益………………………………………… 69
5.7.5 最优拍卖………………………………………… 71
5.8 两税合一前后对不良资产拍卖结果的影响分析——基于从价税视角 ………………………………………… 71
5.8.1 引言 ………………………………………… 72
5.8.2 模型 ………………………………………… 72
5.8.3 两税合一前从价税对不良资产拍卖结果的影响 ………………………………………… 74

5.8.4　两税合一后从价税对不良资产拍卖结果的影响 …… 78
5.9　本章结束语 …… 80
第 6 章　估价相互依赖的拍卖 …… 83
6.1　公共估价模型与赢者诅咒 …… 83
6.2　关联估价模型 …… 85
6.3　关联估价模型下的四种标准拍卖 …… 86
6.3.1　二级价格密封式拍卖 …… 87
6.3.2　英式拍卖 …… 88
6.3.3　一级价格密封式拍卖 …… 90
6.3.4　卖者的预期收益比较 …… 92
6.3.5　有效性 …… 94
6.4　关联原则 …… 95
6.5　关联原则的应用 …… 98
6.6　本章结束语 …… 99
第 7 章　机制设计 …… 101
7.1　机制基本概念 …… 101
7.1.1　机制 …… 101
7.1.2　激励相容 …… 102
7.1.3　个人理性 …… 104
7.1.4　预算均衡 …… 105
7.1.5　有效机制 …… 105
7.1.6　最优机制 …… 105
7.2　再论收益等价定理 …… 105
7.3　最优机制 …… 107
7.4　AGV 机制及其性质 …… 109
7.5　VCG 机制及其性质 …… 110
7.6　广义 VCG 机制 …… 114
7.7　关联估价下的有效机制 …… 115
7.8　关联估价下的最优机制 …… 117
7.9　本章结束语 …… 118
第 8 章　担保拍卖 …… 119
8.1　引言 …… 119
8.2　四种担保拍卖模型 …… 120
8.3　拍卖行和卖方的预期收益 …… 121
8.4　买方的预期支付 …… 123

8.5 最优保留价格 …… 123
8.6 预期收益比较和预期支付比较 …… 125
8.7 Nash 协商解 …… 126
8.8 本章结束语 …… 129
8.9 附录 A——记号 …… 130
8.10 附录 B——引理和定理的证明 …… 131
第 9 章 多属性逆向拍卖的赢者决策问题的 DEA 方法 …… 141
9.1 引言 …… 141
9.2 相关的 DEA 模型回顾 …… 142
9.3 赢者确定问题的 DEA 模型 …… 145
9.3.1 模型 …… 146
9.3.2 一个数值例子 …… 147
9.4 本章结束语 …… 148
第 10 章 多单位双边拍卖 …… 149
10.1 引言 …… 149
10.2 符号、定义和性质 …… 150
10.3 双边集合竞价和线性规划 …… 154
10.4 最优匹配、均衡价格和均衡数量 …… 159
10.5 交易机制设计 …… 162
10.6 本章结束语 …… 167
10.7 附录 …… 167
文献导读 …… 183
参考文献 …… 184

第1章 引　论

1.1 拍　卖

拍卖的历史可以追溯到古罗马时代。公元193年，在护国军杀死了 Pertinax 皇帝后，突发奇想用拍卖方式出售皇位。皇位的得主 Didius Julianus 承诺给护国军每人25 000塞斯特斯(古代罗马一种货币单位)，但是他的皇位仅仅持续了两个月就惨遭杀害而告终，这一事件成为后来典型极端的“赢者诅咒”的例子。

自此之后拍卖就不断完善和发展。在实际生活和理论界变得越来越重要，这主要表现为:第一，拍卖处理了不计其数的经济交易。政府用拍卖方式来出售国库券、外汇、矿山开采权、石油开采权以及处理国有企业私有化问题。另外，政府还用采购拍卖的方式来招标，而公司则用采购拍卖来购买一些投入品；当然，在采购拍卖中，采购者寻找最低价格而不是最高价格。在其他经济交易中，比如公司间的接管有时也用拍卖来处理。最近，无线电频谱许可证、电力和物流是拍卖的新兴市场。第二，因为拍卖要求的经济背景非常简单，所以它能很好地检验经济理论，特别是不完全信息下的博弈论。主要的实证研究集中在石油开采权、森林和国库券的拍卖上，同时对拍卖行实际工作的研究也有上升的趋势。第三，拍卖也是许多理论工作的基础，它能帮助我们理解价格形成机制。比如，拍卖通过投标者的公开竞价来决定价格，使得拍卖与竞争市场之间有着密切的联系；最优拍卖与垄断定价非常类似(这一点在后文中能看到)；拍卖也能推动寡头定价模型的发展。第四，拍卖理论与技巧还能应用到非价格的配置方法，如排队论、产品消耗战、游说竞争、各种竞技比赛等。

既然拍卖如此重要，那么什么是拍卖呢？简单地说，拍卖是一系列的规则，这些规则决定物品的配置和价格。具体来说，拍卖像一个机构，它能通过潜在买者的报价诱导出他们的估价，根据他们的报价情况来决定拍品的得主及投标者的支付。所以，一方面，拍卖几乎可以处理各种商品(烟草、花卉、二手车、古董、艺术品等)的交易，这一点体现了拍卖应用的广泛性；另一方面，拍卖仅仅根据报价的情况来决定拍品的得主，而与投标者的具体身份是农民还是总统无关，因此，拍卖还具有非歧视性的特征。

1.2 拍卖方式

这一节主要介绍四种标准拍卖和一些其他常见的拍卖类型。考虑一个卖者，他拥有一个不可分割的商品，想把这个商品卖给 N 个潜在买者中的一个。当然，获得这个商品的买者是 N 个买者中出价最高者。问题是，卖者如何才能实现这个目标？一个可行的方案是，使用拍卖的方式出售此商品。下面介绍一些常见的拍卖方式。

1.2.1 四种标准拍卖方式

定义 1.1 一级价格密封式拍卖(first-price sealed-bid auction, FPSB)。每个投标者把自己的报价放在一个密封的信封里，寄给卖者(或者类似于这种行为，只要能使投标者仅知道自己的报价，而不知道其他 $N-1$ 个投标者的报价即可)。报价最高的投标者获得拍品，并支付他或她自己的报价。

定义 1.2 二级价格密封式拍卖(second-price sealed-bid auction, SPSB)。每个投标者把自己的报价放在一个密封的信封里，寄给卖者(或者类似于这种行为，只要能使投标者仅知道自己的报价，而不知道其他 $N-1$ 个投标者的报价即可)。报价最高的投标者获得拍品，但支付次高的报价。

定义 1.3 荷兰式拍卖(Dutch auction, DA)。N 个投标者聚集在某个场地，卖者开始喊出一个非常高的价格，然后逐渐降低价格。第一个举手(或者类似于举手这种发布信号的行为)的投标者获得拍品并支付举手时的价格。

定义 1.4 英式拍卖(English auction, EA)。N 个投标者聚集在某个场地，卖者开始喊出一个非常低的价格，投标者应价，然后卖者逐渐喊出较高的价格，直到只剩下一个买者应价时，则停止升价。如果投标者不愿意接受当前的价格，他或她就离开现场(或者发布类似于此种行为的信号)；一旦离开现场，就不允许再参加报价。最后剩下的一个投标者将获得拍品，并支付停止升价时的价格。

以上介绍的拍卖方式就是四种标准拍卖方式。之所以称其为标准拍卖，原因在于，这四种拍卖方式都是最高的投标者获得拍品。在拍卖中，如果出现平局，即有 $K(K\leqslant N)$ 个投标者有相同的最高报价，那么这 K 个投标者有相同的获胜概率 $1/K$。通过下面的例子具体解释四种标准拍卖方式的实施。

小高从祖上继承了一幅徐悲鸿的字画《马》，现在他急需用钱，想把这幅画通过拍卖的方式出售。如果用一级价格密封式拍卖，小高将从 N 个报价中选出一个最高报价的投标者，把这幅画出售给此投标者获得最高报价。如果用二级价格密封式拍卖，类似于一级价格密封式拍卖，不同之处在于小高获得次高报价。如果用荷兰式拍卖，N 个投标者聚集在一个大会场，每个投标者面前有一个按钮，大会场的

前面有一个每个投标者都能看到的大摆钟。刚开始时价格很高,无人可以接受。随着钟的摆动,价格不断下降,直到第一个人按下按钮,钟停止摆动,第一个按下按钮的投标者获得这幅画,小高得到钟停止摆动时的价格。如果用英式拍卖会是什么情况呢?与荷兰式拍卖不同的是,刚开始时价格非常低,几乎每个投标者都愿意接受这个价格,每个人都会按着自己前面的按钮,随着钟的摆动,价格不断上升,按按钮的人也会不断减少(一旦松开按钮,将不允许再次按按钮),直到只剩下一个买者仍按着自己前面的按钮,钟停止摆动,最后剩下的这个投标者获得这幅画,小高得到钟停止摆动时的价格。

这四种标准拍卖方式在拍卖理论中的地位非常重要,许多其他拍卖方式都是由它们组合或变化而来。

1.2.2 其他的拍卖方式

除了四种标准拍卖方式外,还有许多种其他的拍卖方式。这里仅介绍几种常见的拍卖方式。

定义 1.5 第 k 级价格密封式拍卖(kth-price sealed-bid auction,KPSB)指 N 个投标者把自己的报价做了密封处理后,递给卖者。最高投标者获胜并支付第 k 高报价,$k=1,2,\cdots,N$。

因此,一级和二级价格密封式拍卖是第 k 级价格密封式拍卖在 $k=1,2$ 时的特例。

定义 1.6 全支付拍卖(all-pay auction,APA)指所有的投标者无论是否中标都要支付自己的报价,最高的投标者赢得拍品。

定义 1.7 正规拍卖(normal auction,NA)指主拍人是卖者,投标者是买者。

有时候拍卖的主拍人不是卖者,如担保拍卖。

定义 1.8 担保拍卖(guaranteed auction,GA)指卖者把拍品全权委托给拍卖行,并同时与拍卖行协商一个价格,称为担保价;若拍卖的成交价低于担保价,拍卖行就支付给卖者担保价;若拍卖的成交价高于担保价,拍卖行除了支付给卖者担保价外,还要将成交价超出担保价格那部分按一定百分比支付给卖者。在这个拍卖过程中涉及初次拍卖和再拍卖,如果初次拍卖失败(如最高报价低于拍卖行的保留价),进行再拍卖。如果再拍卖仍然失败,拍卖行只能自己持有被拍卖的商品,同时向卖者支付担保价。

定义 1.9 有效拍卖(efficient auction)指估价最高的投标者获得拍品。

1.2.3 其他一些基本概念

定义 1.10 物品的内在价值是指物品本身的固有价值(intrinsic value),对所有投标者都是相同的。

定义 1.11 投标者的估价(valuation)是指投标者愿意对某个拍品的最大支付额。

由于投标者的社会阅历、知识水平、偏好、收入水平、财富、测试仪器的不同,导致他们对同一物品的固有价值有不同的估计值。比如,某块地下储藏的石油对所有人来说,它的使用价值都是相同的,由于不同的人所拥有的知识水平和所使用的测试仪器的不同,致使他们对地下石油储藏量的估计不同,因而他们对这块地的石油开采权的估计值也不同。再比如,某件艺术品或古董的固有价值很难加以量化,投标者可以根据自己的偏好给出不同的估价。

拍卖可以通过投标者的报价来诱导出投标者的估价。为了达到整个社会的效用最大化,把物品分配给最高的估价者;为了使卖者的收益最大化,可以把物品分配给最高的报价者,最高的估价者与最高的报价者有时候是同一个投标者,有时候可能不是同一个投标者。

定义 1.12 保留价(reserve price)指卖者愿意接受拍品的最低成交价。保留价可以是公开的,也可以是保密的。

保留价是拍卖的一个参数,这个价格决定卖者可接受报价的下界。在一级和二级价格密封式拍卖中,最高报价不小于保留价,否则将没有买卖发生。在二级价格密封式拍卖中,如果仅有一个投标者的报价高于保留价,那么保留价将成为“次高报价”,赢者支付保留价。在英式拍卖中,钟开始摆动时的价格为保留价,如果钟开始摆动时,没有人按自己面前的按钮,将没有买卖发生。在荷兰式拍卖中,若在价格降到保留价时,仍没有人举手示意,买卖将不会发生。我们假设保留价在报价开始前已公开,于是所有投标者在他们开始报价前已经知道保留价。

定义 1.13 进入费(entry fee)指参加拍卖的投标者必须支付的门槛费。

进入费是拍卖的另一个参数,就像进电影院或公园必须买门票一样。如果投标者在决定是否参加有进入费的拍卖之前,已经知道自己对物品的估价,那么估价低于进入费的投标者将不去问津这个拍卖,因为参加这样的拍卖,无论是否赢得拍品都将导致损失。

对卖者而言,进入费和保留价是一把双刃剑,怎样合理设置进入费和保留价是一个至关重要的问题。进入费和保留价的存在将排除较低估价的投标者,节省了高估价者为获得较低估价者的信息所花的费用,节约的信息费用将激起高估价者更高的报价热情,对卖方有利;但是,排除较低投标者将弱化投标者之间的竞争,对卖方不利。因此,卖者为了使自己的收益最大化,必须对这两方面加以权衡。

1.2.4 常用记号

如果没有特别说明,通篇记号的含义与本节的记号意义相同。

v_i 表示投标者 i 的估价,是随机变量;b_i 表示投标者 i 的报价;r 表示保留价;c 表

示进入费；v_i 的概率分布函数为 $F_i(\cdot)$，其分布区间为[0,1]（不失一般性，假设 v_i 的分布区间为[0,1]，这是因为对任意有界闭区间$[a,b]$，可通过线性变换$\frac{x-a}{b-a}$转化为区间[0,1]），且 $F(0)=0,F(1)=1$；$f_i(\cdot)$表示 $F_i(\cdot)$的密度函数，即 $f_i(\cdot)=F_i'(\cdot)$，且 $f_i(\cdot)>0$，即 $F_i(\cdot)$是估价的严格递增函数；$v_{[1,n]}$表示 n 个估价中的最高顺序统计量；$v_{[2,n]}$表示 n 个估价中的次高顺序统计量；$F_{1,n}(\cdot)$表示 n 个投标者中，最高估价 $v_{[1,n]}$的概率分布函数，其相应的密度函数记为 $f_{1,n}(\cdot)$；$F_{2,n}(\cdot)$表示 n 个投标者中，次高估价 $v_{[2,n]}$的概率分布函数，其相应的密度函数记为 $f_{2,n}(\cdot)$；$G(\cdot)$表示 $n-1$ 个投标者中，最高估价的概率分布函数，其相应的密度函数为 $g(\cdot)$，即 $G(\cdot)=F_{1,n-1}(\cdot)$；$m(\cdot)$表示投标者的预期支付；ER 表示卖者的预期收益；$\pi$ 表示投标者的预期收益；$P_r(\cdot)$表示投标者的获胜概率。

1.3 预备概率论知识

1.3.1 顺序统计量

在同一个分布函数 $F(v)$的定义区间$[a,b]$上取 n 个相互独立的样本点 v_1，$v_2,\cdots,v_n$，然后由大到小排序为 $v_{[1,n]}\geqslant v_{[2,n]}\geqslant\cdots\geqslant v_{[n,n]}$，其中 $v_{[k,n]}$表示 $v_1,v_2,\cdots,v_n$ 中第 k 高的统计量。记密度函数为 $f(v)$，即 $F'(v)=f(v)$。下面主要介绍 $v_{[1,n]}$和 $v_{[2,n]}$的分布函数以及二者之间的关系。

1. 最高统计量 $v_{[1,n]}$的分布

记 $v_{[1,n]}$的分布函数为 $F_{1,n}(v)$，则

$$F_{1,n}(v) = F^n(v) \tag{1.1}$$

这是因为

$$\begin{aligned} F_{1,n}(v) &= P_r(v_1,v_2,\cdots,v_n \leqslant v) \\ &= \prod\nolimits_{i=1}^{n} P_r(v_i \leqslant v) = F^n(v) \end{aligned}$$

于是，$v_{[1,n]}$的密度函数为

$$f_{1,n}(v) = \frac{\mathrm{d}F_{1,n}(v)}{\mathrm{d}v} = nF^{n-1}(v)f(v) \tag{1.2}$$

$v_{[1,n]}$的数学期望为

$$E(v_{[1,n]}) = b - \int_a^b F^n(v)\mathrm{d}v \tag{1.3}$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
E(v_{[1,n]}) &= \int_a^b v \mathrm{d}F_{1,n}(v) \\
&= \int_a^b v \mathrm{d}F^n(v) \\
&= bF^n_{(b)} - aF^n(a) - \int_a^b F^n(v)\mathrm{d}v \\
&= b - \int_a^b F^n(v)\mathrm{d}v
\end{aligned}
$$

2. 次高统计量 $v_{[2,n]}$ 的分布

记 $v_{[2,n]}$ 的分布函数为 $F_{2,n}(v)$，则

$$
F_{2,n}(v) = nF^{n-1}(v) + (1-n)F^n(v) \tag{1.4}
$$

这是因为

$$
\begin{aligned}
F_{2,n}(v) &= P_r(v_{[2,n]} \leqslant v) \\
&= P_r(v_1, v_2, \cdots, v_n \leqslant v) + C_n^1 P_r(v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n \leqslant v, v_i > v) \\
&= nF^{n-1}(v) + (1-n)F^n(v)
\end{aligned}
$$

而 $v_{[2,n]}$ 的密度函数为

$$
\begin{aligned}
f_{2,n}(v) &= \frac{\mathrm{d}F_{2,n}(v)}{\mathrm{d}v} \\
&= n(n-1)F^{n-2}(v)(1-F(v))f(v)
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

$v_{[2,n]}$ 的数学期望为

$$
\begin{aligned}
E(v_{[2,n]}) &= \int_a^b v \mathrm{d}F_{2,n}(v) \\
&= n(n-1)\int_a^b vf(v)F^{n-2}(v)(1-F(v))\mathrm{d}v
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

3. $v_{[1,n]}$ 的分布与 $v_{[2,n]}$ 的分布之间的关系

由式(1.1)和式(1.4)，可得

$$
\begin{aligned}
F_{2,n}(v) &= nF^{n-1}(v) + (1-n)F^n(v) \\
&= nF_{1,n-1}(v) - (n-1)F_{1,n}(v)
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

式(1.7)两边同时对 v 求导，得

$$
f_{2,n}(v) = nf_{1,n-1}(v) - (n-1)f_{1,n}(v) \tag{1.8}
$$

从而

$$
E[v_{[2,n]}] = nE[v_{[1,n-1]}] - (n-1)E[v_{[1,n]}] \tag{1.9}
$$

由式(1.2)和式(1.5),可得

$$\begin{aligned} f_{2,n}(v) &= n(n-1)f(v)F^{n-2}(v)(1-F(v)) \\ &= n(1-F(v))[(n-1)f(v)F^{n-2}(v)] \\ &= n(1-F(v))f_{1,n-1}(v) \end{aligned} \tag{1.10}$$

4. $v_{[1,n]}$与$v_{[2,n]}$的联合密度函数和条件密度函数

设$y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n$,则$v_{[1,n]}$与$v_{[2,n]}$的联合分布函数为

$$\begin{aligned} F_{1,2,n}(y_1,y_2) &= P_r(v_{[1,n]} \leqslant y_1, v_{[2,n]} \leqslant y_2) \\ &= C_n^1 P_r(v_1,v_2,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n \leqslant y_2, v_i \leqslant y_1) \\ &= nF(y_1)F^{n-1}(y_2) \end{aligned} \tag{1.11}$$

其联合密度函数为

$$\begin{aligned} f_{1,2,n}(y_1,y_2) &= \frac{\partial^2 F_{1,2,n}(y_1,y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} \\ &= n(n-1)F^{n-2}(y_2)f(y_1)f(y_2) \end{aligned} \tag{1.12}$$

在$v_{[1,n]}=y$时,$v_{[2,n]}$的条件密度函数为$(y>z)$

$$\begin{aligned} f_{2,n}(z \mid v_{[1,n]}=y) &= \frac{f_{1,2,n}(y,z)}{f_{1,n}(y)} \\ &= \frac{n(n-1)f(y)f(z)F^{n-2}(z)}{nF^{n-1}(y)f(y)} \\ &= \frac{(n-1)f(z)F^{n-2}(z)}{F^{n-1}(y)} \end{aligned} \tag{1.13}$$

在$v_{[1,n-1]}<y$的条件下,$v_{[1,n-1]}$的条件密度为

$$\begin{aligned} f_{1,n-1}(z \mid v_{[1,n-1]}<y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{F_{1,n-1}(z)}{F_{1,n-1}(y)}\right) \\ &= \frac{(n-1)f(z)F^{n-2}(z)}{F^{n-1}(y)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

于是有

$$f_{2,n}(z \mid v_{[1,n]}=y) = f_{1,n-1}(z \mid v_{[1,n-1]}<y) \tag{1.15}$$

也就是说,在n个样本中,次高顺序统计量在最高顺序统计量值为y时的条件密度函数等于在$n-1$个样本中,最高顺序统计量在最高顺序统计量的值不超过y时的条件密度函数。

1.3.2 关联随机变量

设随机向量 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的定义域为 $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{R}^n$，其联合密度函数为 f。

如果对任意的 $\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}''\in\boldsymbol{A}$，有

$$f(\boldsymbol{X}'\vee\boldsymbol{X}'')f(\boldsymbol{X}'\wedge\boldsymbol{X}'')\geqslant f(\boldsymbol{X}')f(\boldsymbol{X}'') \tag{1.16}$$

其中，

$$\boldsymbol{X}'\vee\boldsymbol{X}''=(\max(x_1',x_1''),\cdots,\max(x_n',x_n''))$$
$$\boldsymbol{X}'\wedge\boldsymbol{X}''=(\min(x_1',x_1''),\cdots,\min(x_n',x_n''))$$

则称随机向量 X 是关联的(affiliated)。

特别地，给定两个二维随机变量 $\boldsymbol{X}=(x',y)$ 和 $\boldsymbol{Y}=(x,y')$，满足 $x'\geqslant x,y'\geqslant y$，$\boldsymbol{A}=[0,w]^2$。如果 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 是关联的，则由式(1.16)有

$$f(x',y)f(x,y')\leqslant f(x,y)f(x',y')$$

等价地

$$\frac{f(x,y')}{f(x,y)}\leqslant\frac{f(x',y')}{f(x',y)}$$

或

$$\frac{f(y'\mid x)f(x)}{f(y\mid x)f(x)}\leqslant\frac{f(y'\mid x')f(x')}{f(y\mid x')f(x')}$$

于是有

$$\frac{f(y\mid x)}{f(y'\mid x)}\geqslant\frac{f(y\mid x')}{f(y'\mid x')}$$

两边同时关于 y 在 $[0,y']$ 上积分得

$$\frac{F(y'\mid x)}{f(y'\mid x)}\geqslant\frac{F(y'\mid x')}{f(y'\mid x')}$$

即

$$\frac{f(y'\mid x)}{F(y'\mid x)}\leqslant\frac{f(y'\mid x')}{F(y'\mid x')},\quad x'\geqslant x \tag{1.17}$$

1.4 本章结束语

拍卖活动的历史最早可以追溯到 2500 年以前，但是拍卖进入经济学文献的时间却相当晚，从诺贝尔经济学奖获得者 Vickrey(1961)的开创性工作算起，至今不

过40多年的历史。在此之前，研究拍卖理论的文献几乎是空白，而此后近20年里拍卖理论的进展也相当缓慢。直到20世纪70年代，不完全信息博弈引入到拍卖理论，才使其取得突破性的进展。近10年来，国际经济学界关于拍卖问题的研究文献如雨后春笋般地涌现出来（许永国 2002）。拍卖理论已经作为一个专门体系进入中高级微观经济学的核心领域。

尽管这门学科比较年轻，但它在国债市场、股票市场、公司间的接管与并购、不良资产处置等金融领域中越来越体现出其重要应用价值。McAfee和McMillan(1987)按时间先后顺序把拍卖的对象分为：历史拍卖对象有奴隶和适婚女青年；现代拍卖对象有古董、艺术品、书籍、农产品、国库券和黄金；当代拍卖的例子有，美国政府用采购拍卖从私人公司买入约10%国内总产出，自然垄断权的拍卖（频谱许可证拍卖和石油矿山开采权的拍卖等）。Rothkopf和Harstad(1994)对拍卖的应用领域进行了分类，共计七个领域，包括金融市场，农产品的销售，破产、房地产、回购和国际管理变位等的金融处理，公共部门和私人部门的采购和合同承包，独有资产的分配，一些许可证的出售和一些协商问题。除此之外，Wolfstetter(1996)列出十几种拍卖对象，小到办公用品，大到联邦拥有的自然资源。Cassady(1967)给出了古代拍卖的对象，如战争的战利品、已故僧人的私人品等。

近年来，拍卖交易已经变得相当普及，尤其政府特别热衷于用拍卖出售频谱许可证、国债和石油矿山开采权。例如，20世纪80年代的美国，使用拍卖方式出售了147个墨西哥湾地区的石油开采权，每周用密封式拍卖出售数亿百万的国债，内务部用拍卖的方式卖掉联邦拥有的矿产权（Milgrom，Weber 1982）。2000年，英国、德国、意大利、瑞士、澳大利亚和新西兰用拍卖出售3G移动电话频谱许可证，其中德国和英国的成交额高达人均600多欧元，总计80亿美元，占它们GDP的2%（Michelson 2000；Roberts 2000；Total Telecom 2000；Klemperer 2002）。

如今，我国大多数省市建立了拍卖公司或开展了拍卖活动，有些城市还出现了多家经营拍卖的局面。拍卖活动由沿海向内地，由大城市向中小城市延伸。拍卖的服务领域已涉及商业、物资、纺织、邮电、房产、金融、文物、土地等十几个领域（郑鑫尧 1998；刘晓君，席酉民 2000）。

尽管不同的国家和行业使用的拍卖方式有所不同，但在理论界和实际拍卖中经常讨论和使用的是四种标准拍卖方式：英式拍卖、荷兰式拍卖、一级和二级价格密封式拍卖。然而，大部分经济学家在建模时通常使用日式升价拍卖（Japanese ascending-bid auction，随着价格的不断上升，投标者逐个退出拍卖，投标者一旦退出拍卖不能再次参加报价，没有退出的投标者能观察到退出者退出时的价格水平），如Milgrom和Weber(1982)、Chakravarti等(2002)。Wolfstetter(1996)把四种标准拍卖分成两类。一类是口头拍卖（oral auction，在投标者听到其他人的报