

大学生数学竞赛辅导

高等数学精题·精讲·精练

(本科 非数学类)

◎ 陈启浩 编著



YZLI0890068284



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

大学生^{〔本科〕}非^{〔数学类〕}数学竞赛辅导

高等数学精题·精讲·精练

陈启浩 编著



机械工业出版社

本书是本科大学生数学竞赛辅导书,可供自学使用,也可用于竞赛培训。

书中通过典型例题的精解来梳理重点方法,同时穿插介绍一些有普遍性的解题技巧,通过题解后的总结和讨论使方法更系统和实用。本书的例题精选自国内外各种数学竞赛,其中既有基本概念和基本方法运用的例题,也有综合性和技巧性较强的例题。在例题之后还精选了一些练习题并在练习题之后附上解题过程和答案。

图书在版编目(CIP)数据

大学生(本科 非数学类)数学竞赛辅导高等数学精题·精讲·精练/
陈启浩编著. —北京:机械工业出版社, 2011.4

ISBN 978-7-111-33097-4

I. ①大… II. ①陈… III. ①高等数学—高等学校—教学参考资料
IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 007893 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 责任校对:李秋荣

封面设计:赵颖喆 责任印制:乔宇

北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)

2011 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·23.5 印张·579 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-33097-4

定价:39.80 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网:<http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网:<http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203 封面无防伪标均为盗版

前言

在大学生中开展数学竞赛,必能进一步激发他们学习数学的热情,提高他们分析、推演各种数学问题的能力.毫无疑问,这是一项对提高大学数学教学质量和大学生的数学修养都极为有益的重要举措.

本书旨在为复习迎赛的大学生提供一份参考资料,帮助学生进一步融会贯通高等数学理论,熟练掌握各种计算方法和解题技巧,在较短时期内,使学生对各种高等数学问题的求解能力有一个较大幅度的提高,从容面对数学竞赛.

全书共分七章,每章由以下四部分组成:

一、核心内容提要 这里简要地列出了全章的核心内容(注意:不是全部内容).

二、典型例题精解 这是全章的主要部分,其中的例题有来自我国、美国和日本的数学竞赛题与硕士研究生入学试题,也有来自编著者在长期数学教学中积累的问题,它们都是具有较强的综合性和技巧性,需用较多的概念和计算方法,结合解题技巧才能获解的问题,对每道例题都按分析、精解及附注作出精细、快捷的解答,并且例题分 A 组、B 组两个层次,或 A 组、B 组及 C 组三个层次,循序渐进.

三、主要方法梳理 这里对全章的解题方法(其中许多方法已在“典型例题精解”中使用过了)进行总结、整理,使之系统化和实用化.因此,本书不是一本“题解集”,而是一本能帮助读者准确地掌握许多有效的解题方法的参考书.

四、精选备赛练习题 这些练习题都是经精心挑选和编排,分 A 组和 B 组两个层次,由浅入深,它们既能衡量读者已经达到的水平和具有的能力,又能通过练习进一步提高读者分析问题和解决问题的本领.为了方便读者使用本书,每章后都附有该章练习题的解答.

此外,为了便于读者参考,书后附上第一、二届全国大学生(本科·非数学类)数学竞赛初赛与决赛试题,并给出解答.

本书编写仓促,错讹之处请读者和同仁批评指正.

陈启浩

目 录

前言

第一章 极限与连续	1
一、核心内容提要	1
二、典型例题精解	3
A 组	3
B 组	12
三、主要方法梳理	21
四、精选备赛练习题	23
A 组	23
B 组	24
附：解答	25
第二章 一元函数微分学	36
一、核心内容提要	36
二、典型例题精解	38
A 组	38
B 组	44
C 组	57
三、主要方法梳理	67
四、精选备赛练习题	70
A 组	70
B 组	71
附：解答	72
第三章 一元函数积分学	85
一、核心内容提要	85
二、典型例题精解	86
A 组	86
B 组	96
C 组	108
三、主要方法梳理	119
四、精选备赛练习题	122
A 组	122
B 组	123
附：解答	125
第四章 多元函数微分学	140
一、核心内容提要	140
二、典型例题精解	142
A 组	142
B 组	153

三、主要方法梳理	169
四、精选备赛练习题	171
A 组	171
B 组	172
附: 解答	174
第五章 多元函数积分学	191
一、核心内容提要	191
二、典型例题精解	194
A 组	194
B 组	204
C 组	215
三、主要方法梳理	228
四、精选备赛练习题	233
A 组	233
B 组	234
附: 解答	235
第六章 无穷级数	247
一、核心内容提要	247
二、典型例题精解	250
A 组	250
B 组	263
三、主要方法梳理	275
四、精选备赛练习题	278
A 组	278
B 组	280
附: 解答	281
第七章 微分方程	295
一、核心内容提要	295
二、典型例题精解	296
A 组	296
B 组	306
三、主要方法梳理	323
四、精选备赛练习题	325
A 组	325
B 组	326
附: 解答	327
附录 全国大学生(本科·非数学类)数学竞赛初、决赛试题及精解	344
附录 A 第一届初赛试题及精解	344
附录 B 第一届决赛试题及精解	350
附录 C 第二届初赛试题及精解	357
附录 D 第二届决赛试题及精解	362
参考文献	368

第一章

极限与连续

一、核心内容提要

1. 函数极限运算法则

以下的 $x \rightarrow x_0$ 也可以换为 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

(1) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, k 为常数, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} kf(x) = kA, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = AB;$$

(2) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B};$$

(3) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B;$$

(4) 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$, $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$, 且在点 x_0 的某个去心邻域内, $u = \varphi(x) \neq u_0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A.$$

注: 数列极限是特殊的函数极限, 所以以上运算法则对数列极限也是适合的.

2. 数列极限存在准则

准则 I 设数列 $\{x_n\}$, 如果存在数列 $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, 使得

$$y_n \leq x_n \leq z_n (n=1, 2, \dots), \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

准则 II 如果数列 $\{x_n\}$ 单调不减有上界或单调不增有下界, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

3. 重要极限与常用极限

(1) 重要极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \text{ 推广形式: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = k \text{ (其中, } k \text{ 为常数)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ 推广形式: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \text{ 或 } \lim_{x \rightarrow 0} (1+kx)^{\frac{1}{x}} = e^k \text{ (其}$$

中, k 为常数).

(2) 常用极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ 以及 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

4. 无穷小与等价无穷小

以下的 $x \rightarrow x_0$ 也可以换为 $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

(1) 无穷小

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 它有以下性质:

性质 1. 有限个无穷小之和或之积为无穷小;

性质 2. 有界函数与无穷小之积为无穷小;

性质 3. 不恒为零的无穷小的倒数是无穷大量, 无穷大量的倒数为无穷小.

(2) 等价无穷小

设 $f(x), g(x)$ 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, 则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ 时的等价无穷小, 记为 $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$, 等价无穷小有以下性质 (以下使用的 $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$ 都是 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小):

性质 1: 如果 $\alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) (x \rightarrow x_0)$, 则 $\alpha(x) \sim \gamma(x) (x \rightarrow x_0)$;

性质 2: 如果 $\alpha(x) \sim \beta(x), \alpha_1(x) \sim \beta_1(x) (x \rightarrow x_0)$, 则 $\alpha(x)\alpha_1(x) \sim \beta(x)\beta_1(x) (x \rightarrow x_0)$;

性质 3: 如果 $\alpha(x) \sim \beta(x), \alpha_1(x) = o(\alpha(x)) (x \rightarrow x_0)$ (这里 $\alpha_1(x) = o(\alpha(x)) (x \rightarrow x_0)$)

表示 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha_1(x)$ 是比 $\alpha(x)$ 的高阶无穷小, 则 $\alpha(x) + \alpha_1(x) \sim \beta(x) (x \rightarrow x_0)$;

性质 4: 设 $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x), (x \rightarrow x_0)$. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ 存在或为 ∞ , 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ (等价无穷小代替定理).

5. 洛必达法则

以下的 $x \rightarrow x_0$ 也可以换为 $x \rightarrow x_0^+, x \rightarrow x_0^-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow +\infty$ 或 $x \rightarrow -\infty$.

(1) $\frac{0}{0}$ 型洛必达法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, 在点 $x = x_0$ 的某个去心邻域内 $f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$, 则当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(2) $\frac{\infty}{\infty}$ 型洛必达法则

设 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$, 在点 $x = x_0$ 的某个去心邻域内 $f(x), g(x)$ 可导且 $g'(x) \neq 0$, 则当 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞ 时, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

6. 函数连续性与间断点

(1) 函数的连续性

设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的连续点; 否则称 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处间断, 称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

(2) 函数间断点的分类

设 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点. 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 都存在, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, 其中当 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 时, 称 $x=x_0$ 为可去间断点; 当 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 时, 称 $x=x_0$ 为跳跃间断点.

设 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点, 但不是第一类间断点, 则称 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

7. 连续函数在闭区间上的性质

性质 1. (有界性定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 且有最大值与最小值.

性质 2. (介值定理) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 $A=f(x_1), B=f(x_2) (a \leq x_1 < x_2 \leq b)$, 则对介于 A 与 B 之间的任一实数 C , 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = C$.

特别地, 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 M, m 分别是它在 $[a, b]$ 上的最大值与最小值, 则对任意介于 M 与 m 之间的实数 C , 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = C$.

性质 3. (零点定理) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

二、典型例题精解

A 组

例 1.1 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^4} + \frac{1^2+2^2}{n^4} + \dots + \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^4} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

分析 将 $\frac{1^2}{n^4} + \frac{1^2+2^2}{n^4} + \dots + \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^4}$ 的各项分子加在一起后再计算极限.

精解 由于

$$\begin{aligned} & 1^2 + (1^2 + 2^2) + \dots + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\ &= \sum_{k=1}^n (1^2 + 2^2 + \dots + k^2) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (2k^3 + 3k^2 + k) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} n(n+1) \right]^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= \frac{1}{12} [n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)], \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^4} + \frac{1^2+2^2}{n^4} + \dots + \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{12} [n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)] = \frac{1}{12} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1) = \frac{1}{12} \cdot \infty = \infty.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{12} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)}{n^4} \\
 &= \frac{1}{12} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^4} = \frac{1}{12}.
 \end{aligned}$$

附注 计算和的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$ 时, 首先考虑的是将和中各项加在一起, 即用一个比较简单的表达式表示 $\sum_{k=1}^n x_k$.

解题时用到以下公式:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2.$$

例 1.2 设 $a_i > 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) \right]^{\frac{1}{x}} =$ _____.

分析 本题是 1^∞ 型未定式极限的计算问题.

精解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) \right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x)}, \quad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^x - 1) \right]}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i^x - 1)}{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_i^x - 1}{x} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln a_i = \frac{1}{n} \ln (a_1 a_2 \cdots a_n).
 \end{aligned}$$

将它代入式(1)得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{n} (a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x) \right]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{n} \ln (a_1 a_2 \cdots a_n)} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

附注 对 1^∞ 型未定式极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)}$ 总是按以下步骤计算:

(1) 将幂指函数指数化, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)}. \quad (*)$$

(2) 计算 $\infty \cdot 0$ 型未定式 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \ln f(x)$, 然后将计算结果代入式(*)的右边.

例 1.3 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \right) \sin x^2 =$ _____.

分析 由于 $x \rightarrow \infty$ 时, $\sin x^2$ 的极限不存在, 但是有界的, 所以从考虑 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \right)$ 入

手计算本题.

精解 由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 1$, 令 $t = \frac{1}{x^2}$, 所以 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, 所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 = \frac{3}{1} - 3 = 0,\end{aligned}$$

即 $\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3$ 是 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小, 而 $\sin x^2$ 是有界函数, 所以 $x \rightarrow \infty$ 时,

$\left(\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \right) \sin x^2$ 是无穷小, 从而有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-5}{x^3 \sin \frac{1}{x^2}} - 3 \right) \sin x^2 = 0.$$

附注 有界函数与无穷小之积仍为无穷小, 是无穷小的重要性质之一, 应记住.

例 1.4 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}$ 与 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ 分别为_____.

分析 第一个极限中令 $t = \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1$, 第二个极限中令 $t = x - 1$, 把所给极限都转换成 $t \rightarrow 0$ 时的极限.

$$\begin{aligned}\text{精解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} &\stackrel{\text{令 } t = \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}{=} \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \frac{1}{2} \cdot \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^{x-1} - 1)}{\ln x - (x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{(x-1)\ln x} - 1}{\ln x - (x-1)} \stackrel{\text{令 } t = x-1}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t\ln(1+t)} - 1}{\ln(1+t) - t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\ln(1+t)}{\ln(1+t) - t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\ln(1+t) - t} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{t^2}{-\frac{1}{2}t^2} = -2.\end{aligned}$$

其中, 利用 $\ln(1+t)$ 的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式得

$$\ln(1+t) - t = t - \frac{1}{2}t^2 + o(t^2) - t = -\frac{1}{2}t^2 + o(t^2) \sim -\frac{1}{2}t^2 (t \rightarrow 0).$$

附注 在函数极限计算中往往需施行变量代换, 使得便于应用重要极限或常用极限, 或便于寻找等价无穷小, 或便于应用洛必达法则. 根据极限的特点选择适当的变量代换, 往往能快捷求得所给极限. 如本题中的 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}}}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1}$, 选择变量代换, $t = \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1$ 使

得问题快捷获解.

例 1.5 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin(\sin^2 x) \ln(1+x^2)$ 是比 $(e^x - 1) \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $\sin(\sqrt{1-x^{n+1}} - 1)$ 是比 $\ln^2(e^{\sin^2 x} + \sqrt{1-\cos x})$ 高阶的无穷小, 则正整数 $n =$ _____.

分析 只要确定 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin(\sin^2 x) \ln(1+x^2)$, $(e^x - 1) \sin x^n$, $\sin(\sqrt{1-x^n} - 1)$ 及 $\ln(e^{\sin^2 x} + \sqrt{1-\cos x})$ 的形如 cx^k 的等价无穷小, 即可由题设确定 n 的值.

详解 由于 $x \rightarrow 0$ 时,

$$\arcsin(\sin^2 x) \ln(1+x^2) \sim \sin^2 x \cdot x^2 \sim x^4,$$

$$(e^x - 1) \sin x^n \sim x \cdot x^n = x^{n+1},$$

$$\sin(\sqrt{1-x^{n+1}} - 1) \sim \sqrt{1-x^{n+1}} - 1 \sim -\frac{1}{2}x^{n+1},$$

$$\ln^2(e^{\sin^2 x} + \sqrt{1-\cos x}) = \ln^2[1 + (e^{\sin^2 x} - 1 + \sqrt{1-\cos x})]$$

$$\sim (e^{\sin^2 x} - 1 + \sqrt{1-\cos x})^2$$

$$\sim 1 - \cos x \quad (\text{因为 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } e^{\sin^2 x} - 1 \text{ 是比 } \sqrt{1-\cos x} \text{ 的高阶无穷小})$$

$$\sim \frac{1}{2}x^2,$$

所以, 由 $\arcsin(\sin^2 x) \ln(1+x^2)$ 是比 $(e^x - 1) \sin x^n$ 高阶的无穷小知

$$4 > n+1; \quad (1)$$

由 $\sin(\sqrt{1-x^{n+1}} - 1)$ 是比 $\ln^2(e^{\sin^2 x} - 1 + \sqrt{1-\cos x})$ 高阶的无穷小知

$$n+1 > 2. \quad (2)$$

因此, 由式(1)、式(2)得 $n+1=3$, 即 $n=2$.

附注 应熟记以下的 $x \rightarrow 0$ 时的等价无穷小:

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \arctan x \sim x,$$

$$e^x - 1 \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x (\mu \neq 0),$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

例 1.6 使得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} x e^{-2x} dx$ 成立的 $a =$ _____.

分析 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x$ 和 $\int_a^{+\infty} x e^{-2x} dx$, 得到一个关于 a 的方程, 解之可得 a 的值.

$$\text{精解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{a}{x} \right)^x}{\left(1 + \frac{a}{x} \right)^x} = \frac{e^{-a}}{e^a} = e^{-2a},$$

$$\int_a^{+\infty} x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_a^{+\infty} x d e^{-2x} = -\frac{1}{2} \left(x e^{-2x} \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} e^{-2x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} a e^{-2a} + \frac{1}{4} e^{-2a}.$$

所以, 由题设得方程

$$e^{-2a} = \frac{1}{2} a e^{-2a} + \frac{1}{4} e^{-2a}, \text{ 即 } a = \frac{3}{2}.$$

附注 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 的推广形式是 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$, 记住它可以加快计算速度.

例 1.7 设函数 $F(x) = \int_0^{x^2} t \sin(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^3} =$ _____.

分析 本题的极限需用洛必达法则计算, 即需对 $F(x)$ 求导, 因此应先将 x 从 $\int_0^{x^2} t \sin(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt$ 的被积函数移出.

精解 因为 $F(x) = \int_0^{x^2} t \sin(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} dt$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^{x^2} \sin(x^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - t^2) \stackrel{\text{令 } u = x^2 - t^2}{=} -\frac{1}{2} \int_{x^2}^0 \sin \sqrt{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{u} du,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{u} du}{x^3} \stackrel{\text{洛必达法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{3x^2} = \frac{1}{3}.$

附注 本题解答中有两点值得注意:

(1) 对形如 $\int_a^{a(x)} f(x, t) dt$ 求导时, 应先将 x 从被积函数中移出;

(2) 计算 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 如果 $f(x)$ 或 $g(x)$ 是积分上限函数, 则需用洛必达法则消去积分运算.

例 1.8 设 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = 0$, 则常数 a, b 分别为 _____.

分析 将函数有理化后再计算极限.

精解 $0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (ax + b)}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - a^2)x^2 - (1 + 2ab)x + (1 - b^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + (ax + b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - a^2)x - (1 + 2ab) + \frac{1 - b^2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + a + \frac{b}{x}},$$

由此可得

$$\begin{cases} 1 - a^2 = 0, \\ 1 + 2ab = 0, \text{ 即 } a = -1, b = \frac{1}{2}. \\ -1 + a \neq 0, \end{cases}$$

附注 题解中应注意的是: 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}.$

例 1.9 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\int_{\sin^2 x}^{\ln(1+t)} dt}{e^{2x^2} - 2e^{x^2} + 1}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处连续, 则常数 $a =$ _____.

分析 由 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续得

$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{e^{2x^2} - 2e^{x^2} + 1},$$

于是计算上式右边的极限即得 a 的值.

$$\begin{aligned} \text{精解} \quad a &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{e^{2x^2} - 2e^{x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(e^{x^2} - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{x^4} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin^2 x) \cdot \sin 2x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 2x}{4x^3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由此可知, 当 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续时, 常数 $a = \frac{1}{2}$.

附注 由于极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(e^{x^2} - 1)^2}$ 的分子是积分上限函数, 所以需施行洛必达法则, 消除其中的积分运算.

例 1.10 设函数 $f(x) = \begin{cases} \sin x \cdot \ln(x^2 - 1)^2, & x \leq 0, x \neq -1, \\ \frac{\sin \pi x}{x(x^2 + 2x - 3)}, & x > 0, x \neq 1, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点(需指明

类型)为_____.

分析 分 $x < 0, x > 0$ 及 $x = 0$ 三种情形考虑函数 $f(x)$ 的间断点.

精解 $x < 0$ 时, $f(x) = \sin x \cdot \ln(x^2 - 1)^2$ 有间断点 $x = -1$, 由于 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{\sin x \cdot \ln(x^2 - 1)^2} = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} [\sin x \cdot \ln(x^2 - 1)^2] = -\infty$. 因此 $x = -1$ 是第二类间断点(无穷间断点).

$x > 0$ 时, $f(x) = \frac{\sin \pi x}{x(x^2 + 2x - 3)}$ 有间断点 $x = 1$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1} \xrightarrow{\text{令 } t=x-1} \frac{1}{4} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{t} = -\frac{\pi}{4},$$

所以 $x = 1$ 是第一类间断点(可去间断点).

下面考虑 $x = 0$ 的情形. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [\sin x \cdot \ln(x^2 - 1)^2] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{x(x^2 + 2x - 3)} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi x}{x} = -\frac{\pi}{3},$$

即 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 都存在, 但不相等, 所以 $x = 0$ 是第一类间断点(跳跃间断点).

附注 对于第一类间断点, 应分清是可去间断点还是跳跃间断点.

例 1.11 (1) 设数列 $\{x_n\}$ 定义如下:

$$x_0 = 0, \quad x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$;

(2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!)$.

分析 (1) 先令 $y_n = x_n - 1$, 将所给递推式转换成 $y_n = -1, y_n = \sin y_{n-1} (n=1, 2, \dots)$, 然后用数列极限存在准则 II 判定 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在并计算其值, 由此推得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

(2) 将 e 表示成麦克劳林级数, 得到 $en!$ 的小数部分, 从而求得 $\sin(2\pi en!)$ 的等价无穷小 ($n \rightarrow \infty$), 由此算得所给的极限.

详解 (1) 记 $y_n = x_n - 1$, 则递推式 $x_n = 1 + \sin(x_n - 1) (n=1, 2, \dots)$ 成为

$$y_0 = -1, \quad y_n = \sin y_{n-1} (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

由此可知 $-1 \leq y_n < 0 (n=0, 1, 2, \dots)$, 且由 $y_n = \sin y_{n-1} > y_{n-1} (n=1, 2, \dots)$ 知 $\{y_n\}$ 单调增加, 即 $\{y_n\}$ 是单调增加且有上界数列, 所以由数列极限存在准则 II 知 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 记为 A , 则 $A \in [-1, 0]$. 令 $n \rightarrow \infty$ 对式(1)的递推式两边取极限得

$$A = \sin A.$$

由此方程有唯一解 $A=0$ 得 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 - 1 = -1$.

(2) 由 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} + \dots$ 得 e 的级数表示

$$\begin{aligned} e &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} [1 + o(1)] (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

所以, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} 2\pi en! &= 2\pi \left\{ \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) n! + \frac{n!}{(n+1)!} [1 + o(1)] \right\} \\ &= 2\pi k + \frac{2\pi}{n+1} [1 + o(1)] \quad \left(\text{其中 } k = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) n! \text{ 是正整数} \right), \end{aligned}$$

从而

$$\sin(2\pi en!) = \sin \left\{ \frac{2\pi}{n+1} [1 + o(1)] \right\} \sim \frac{2\pi}{n+1} (n \rightarrow \infty).$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi en!) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \frac{2\pi}{n+1} \right) = 2\pi$.

附注 本题(1)是按数列极限存在准则 II 计算的, 当数列 $\{x_n\}$ 由递推式定义时, 往往考虑应用准则 II, 即先由准则 II 确定 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 然后对递推式取极限算出这个极限的值.

本题(2)获解的关键是当 $n \rightarrow \infty$ 时, $en!$ 可以写成 $k + \frac{1}{n+1} [1 + o(1)]$, 其中 k 是正整数, 这一结果是依靠将 e 表示成级数得到.

例 1.12 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$.

分析 先对极限进行化简, 即想法去掉函数第二项中的因子 $\frac{\ln(x + e^x)}{x}$ 后再行计算.

精解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \left[1 + \frac{\ln(1 + xe^{-x})}{x} \right] \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(1 + xe^{-x})}{x} \right],$$

并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(1 + xe^{-x})}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \cdot \ln(1 + xe^{-x}) \right] = 0,$$

所以,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(1 + xe^{-x})}{x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1}) \\ & \quad \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+t+t^2+t^3+t^4} - \sqrt[3]{1+t+t^2+t^3}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+t+t^2+t^3+t^4} - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+t+t^2+t^3} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1+t} - 1}{t} - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+t} - 1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}. \end{aligned}$$

附注 本题解答中有两点值得注意:

(1) 在计算极限时, 要注意化简, 本题就是先将所给极限化简为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1})$ 后再行计算.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1})$ 是 $\infty - \infty$ 型未定式. 由于它的极限过程是 $x \rightarrow +\infty$, 所以令 $t = \frac{1}{x}$, 将极限过程转换成 $t \rightarrow 0^+$, 由此也将 $\infty - \infty$ 未定式转换成 $\frac{0}{0}$ 型未定式, 但对此未定式不宜直接用洛必达法则, 而利用常用极限公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ 计算.

例 1.13 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{1 - \cos x} \right]}{2^x - 1} = 4$, 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

分析 从题设推出 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 0$ 入手计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$.

精解 由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{f(x)}{1 - \cos x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{1 - \cos x} \right]}{2^x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 1) = 4 \cdot 0 = 0 \text{ 推出 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned} 4 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + \frac{f(x)}{1 - \cos x} \right]}{2^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{1 - \cos x}}{x \ln 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(1 - \cos x) \cdot x \ln 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\frac{1}{2} x^2 \cdot x \ln 2} = \frac{2}{\ln 2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}, \end{aligned}$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 2 \ln 2$.

附注 类似本题解题思路可以计算下列问题:

已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = e^2$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

解答如下:

由题设得 $e^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x}$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = 2$. 由此推出 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x + \frac{f(x)}{x} \right] = 0$, 所以

$$2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left[1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{f(x)}{x}}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2},$$

因此, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 - 1 = 1$.

例 1.14 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)$, 求常数 A, B, C 的值及等式左边函数 $e^x(1+Bx+Cx^2)$ 的 n 阶导数.

分析 所给等式中的 e^x 用它的带佩亚诺型余项的三阶麦克劳林公式代入, 比较等式两边关于 x 的同次幂系数即可算出 A, B, C 的值, 然后由高阶导数求导公式算出 $e^x(1+Bx+Cx^2)$ 的 n 阶导数.

精解 e^x 的带佩亚诺型余项的三阶麦克劳林公式为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$

将它代入所给等式得

$$\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) (1 + Bx + Cx^2) = 1 + Ax + o(x^3),$$

即

$$1 + (1+B)x + \left(\frac{1}{2} + B + C \right)x^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{B}{2} + C \right)x^3 + o(x^3) = 1 + Ax + o(x^3).$$

比较上式关于 x 的同次幂系数得

$$\begin{cases} 1+B=A, \\ \frac{1}{2}+B+C=0, \\ \frac{1}{6}+\frac{B}{2}+C=0, \end{cases}$$

解此方程组得 $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{2}{3}, C = \frac{1}{6}$.

所以, 所给等式左边 $= e^x \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 \right) \stackrel{\text{记}}{=} f(x)$, 于是

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 \right)^{(i)} (e^x)^{(n-i)} = e^x \sum_{i=0}^n C_n^i \left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 \right)^{(i)} \\ &= e^x \left[\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}x^2 \right) + n \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x \right) + \frac{1}{2}n(n-1) \cdot \frac{1}{3} \right] \\ &= e^x \left[\left(1 - \frac{5}{6}n + \frac{1}{6}n^2 \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}n \right)x + \frac{1}{6}n^2 \right]. \end{aligned}$$