南京大学金陵学院 王国英 张 欣 编著

# 工程数学

## 习题与解答 上

清华大学出版社

ISBN 978-7-302-24154-6
9 787302 241546 >
定价：25.00元

南京大学金陵学院 王国英 张 欣 编著

# 工程数学

## 习题与解答 上

清华大学出版社
北京

## 内 容 简 介

本书是《工程数学(一)》(王国英,清华大学出版社,2009)的配套教辅书,内容涵盖了主教材(微分分部分)的全部习题及其解答,对初学者开拓思路、提高解题能力、深入理解教材内容有很大的帮助.

本书可供高等学校(独立学院)计算机、电子、通信类相关专业及其他非数学类专业的学生使用,对准备参加研究生入学考试的学生也有一定的参考价值,还可作为教师的教学参考书.



**图书在版编目(CIP)数据**

工程数学习题与解答. 上/王国英,张欣编著. --北京:清华大学出版社,2011.1

ISBN 978-7-302-24154-6

Ⅰ. ①工…　Ⅱ. ①王… ②张…　Ⅲ. ①工程数学—高等学校—解题　Ⅳ. ①TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 224624 号

**责任编辑**:冯　昕
**责任校对**:赵丽敏
**责任印制**:李红英

**出版发行**:清华大学出版社　　**地　址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**:100084
**社 总 机**:010-62770175　　**邮　购**:010-62786544
**投稿与读者服务**:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质 量 反 馈**:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

**印 装 者**:北京国马印刷厂
**经　销**:全国新华书店
**开　本**:185×230　　**印　张**:12.5　　**字　数**:267 千字
**版　次**:2011 年 1 月第 1 版　　**印　次**:2011 年 1 月第 1 次印刷
**印　数**:1~3000
**定　价**:25.00 元

产品编号:039521-01

# 前　言

工程数学是高等学校计算机、电子、通信等各专业必修的一门基础课.作者根据该课程的教学需要和学生学习的要求,编写了《工程数学习题与解答》一书,详细解答了《工程数学》(王国英,清华大学出版社,2009,全三册)中的全部习题.

工程数学是一门系统、综合的学科,内容广泛,教学进度快,不少习题有一定的难度,对初学者来说并不容易完成.为了弥补这一缺陷,也为了让广大读者能更有效地使用主教材,本书对主教材中的习题作了详尽的解答.为了开拓学生的眼界,还附加了一些习题(带星号者).在编写过程中力求严密,并尽量采用简便的方法,让读者更易理解.参考本书提供的解题方法,有利于读者开拓眼界,提升解题能力,掌握工程数学课程的基本概念和基本方法.

本书上册(微积分)部分章节将习题分为A组和B组,读者可根据自己的实际情况将书中内容的学习分为两个层次.下册内容包括复变函数、积分变换、线性代数、数值方法、概率与统计,离散数学.

本书注意博采众家之长,参考了不少同类书籍,获益良多,在此向这些书籍的作者深表感谢.由于编者水平所限,书中缺点和错误在所难免,恳请读者批评指正.

**编著者**

2010年9月

# 目录

# 第 1 章

# 预备知识

## 习题 1.1

**A 组**

1. 设 $A=\{0\}$，$B=\{0,1\}$，下列陈述是否正确？并说明理由.

(1) $A=\varnothing$；　(2) $A\subset B$；　(3) $0\in A$；　(4) $\{0\}\in A$；

(5) $0\subset A$；　(6) $A\cap B=0$；　(7) $A\cup B=B$.

**解**　(1) 否；(2) 是；(3) 是；(4) 否；(5) 否；(6) 否；(7) 是.

2. 设由 1 至 10 的自然数组成的集合为全集，它的三个子集 $A,B,C$ 为

$$A=\{偶数\},\quad B=\{奇数\},\quad C=\{3\text{ 的倍数}\}.$$

试求下列各集合的元素：

(1) $B\cap C$；　(2) $\overline{A}\cap\overline{C}$；　(3) $\overline{A\cap C}$.

**解**　(1) $\{3,9\}$；　(2) $\{1,5,7\}$；　(3) $\{1,2,3,4,5,7,8,9,10\}$.

3. 设全集 $U$ 为男女同班的全体学生组成的集合，其中 $A=\{男学生\}$，$B=\{戴眼镜的学生\}$，试写出下列各项所表示的集合：

(1) $A\cap B$；　(2) $\overline{A}\cap B$；　(3) $A\cap\overline{B}$；　(4) $A\cup B$；

(5) $\overline{A}\cup B$；　(6) $A\cup\overline{B}$；　(7) $\overline{A\cap B}$；　(8) $\overline{A\cup B}$.

**解**　(1) {戴眼镜的男生}；　(2) {戴眼镜的女生}；　(3) {不戴眼镜的男生}；(4) {全体男生与戴眼镜的女生}；　(5) {全体女生与戴眼镜的男生}；　(6) {全体男生与不戴眼镜的女生}；　(7) {全体女生与不戴眼镜的男生}；　(8) {不戴眼镜的女生}.

4. 设 $A=\{(x,y)\mid x-y+2\geqslant 0\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x+3y-6\geqslant 0\}$，$C=\{(x,y)\mid x-4\leqslant 0\}$，其中 $(x,y)$ 表示坐标平面上点的坐标. 在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

**解**　图略.

5. 设 $A=\{x\mid x^3+2x^2-x-2>0\}$，$B=\{x\mid x^2+ax+b\leqslant 0\}$. 试求能使 $A\cup B=\{x\mid x+$

$2>0\}$，$A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$的 $a,b$ 的值.

**解** $x^3+2x^2-x-2=(x+1)(x+2)(x-1)>0\Rightarrow -2<x<-1$ 或 $x>1$，即 $A=\{x|-2<x<-1\cup x>1\}$. 又 $A\cap B\neq\varnothing$，故 $B\neq\varnothing$. 设方程 $x^2+ax+b=0$ 有两根 $x_1,x_2$，不妨令 $x_1\leqslant x_2$，则 $B=\{x|x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$，由 $A\cup B=\{x|x>-2\}$，得 $-2<x_1\leqslant -1$. 又 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，所以 $-1\leqslant x_2\leqslant 3$. 故 $x_1=-1,x_2=3$. 由韦达定理有 $\begin{cases}x_1+x_2=-a,\\ x_1x_2=b,\end{cases}$ 于是 $a=-2$，$b=-3$.

6. 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，验证下列等式：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_{i+1}=\sum\limits_{i=2}^{n+1}a_{i-1}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{n-k}$；  (2) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}ca_i=c\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$；  (4) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n-a_0$.

**证明** (1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\sum_{i=2}^{n+1}a_{i-1}=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_2+a_1,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=0}^{n-1}a_{i+1}=\sum_{i=2}^{n+1}a_{i-1}=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}.$$

(2)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)&=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\cdots+(a_n+b_n)\\&=(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}b_i.\end{aligned}$$

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}ca_i=ca_1+ca_2+\cdots+ca_n=c(a_1+a_2+\cdots+a_n)=c\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$.

(4) $\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=(a_1-a_0)+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=a_n-a_0$.

7. 证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 同号且大于 $-1$.

**证明** 当 $n=1$ 时，不等式显然成立. 当 $n=2$ 时，

$$(1+x_1)(1+x_2)=1+x_1+x_2+x_1x_2\geqslant 1+x_1+x_2,$$

不等式成立.假设 $n=k$ 时,不等式成立,即

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_k,$$

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&(1+x_1)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\=&(1+x_1)\cdots[(1+x_k)(1+x_{k+1})]\\=&(1+x_1)\cdots(1+x_{k-1})(1+x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1}).\end{aligned}$$

因为 $x_k>-1,x_{k+1}>-1$ 且同号,所以

$$(1+x_k)(1+x_{k+1})=(1+x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1})>0,\quad 且\ x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1}>-1.$$

于是由归纳假定可知

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\cdots[1+(x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1})]\\\geqslant&1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}+x_kx_{k+1}\\\geqslant&1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}.\end{aligned}$$

综上可知

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad n\in\mathbf{Z}^+,$$

其中 $x_1,x_2\cdots x_n$ 同号且大于 $-1$.

8. 利用上题证明:若 $x>-1$ 且 $n>1$,则

(1) $(1+x)^n\geqslant 1+nx$,当且仅当 $x=0$ 时等号成立;

(2) $1+\dfrac{x}{n}\geqslant(1+x)^{\frac{1}{n}}$.

**证明**　(1) 当 $x=0$ 时,显然等号成立.当 $x\neq 0$ 时,由假定 $(n-1)\in\mathbf{Z}^+$,故有 $(1+x)^{n-1}\geqslant 1+(n-1)x$,由伯努利不等式有

$(1+x)^n=(1+x)^{n-1}(1+x)\geqslant[1+(n-1)x](1+x)=1+nx+(n-1)x^2>1+nx$,并且等号不成立.因此当且仅当 $x=0$ 时,不等式 $(1+x)^n\geqslant 1+nx$ 等号成立.

(2) 因为 $x>-1,n>1$,应用伯努利不等式有

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geqslant 1+n\cdot\frac{x}{n}=1+x>0,$$

故有 $1+\dfrac{x}{n}\geqslant(1+x)^{\frac{1}{n}}$.

9. 分别利用伯努利不等式和 $A$-$G$ 不等式证明不等式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},\quad \forall n\in\mathbf{Z}^+.$$

**证明**　(1) 用伯努利不等式证明.由 $-\dfrac{1}{(n+1)^2}>-1$,有

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}>1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

又

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}=\left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1}=\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right]^{n+1}$$
$$=\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right]^{n+1}$$
$$>\frac{n}{n+1},$$

于是有

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

（2）用 $A$-$G$ 不等式证明.

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

由于 $1\neq 1+\frac{1}{n}$，应用 $A$-$G$ 不等式得

$$\sqrt[n+1]{1\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

于是有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

10. 证明对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

（1）$|x-1|+|x-2|\geqslant 1$；

（2）$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

**证明**　（1）$|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)+(2-x)|=1$.

（2）$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1+3-x|+|x-2|=2+|x-2|\geqslant 2$.

11. 下列数集是否有上（下）确界？若有的话，写出其上（下）确界.

（1）$S_1=\left\{1-\frac{1}{2^n}\middle|n\in\mathbf{Z}^+\right\}$；　　（2）$S_2=\{n^{(-1)^n}\,|\,n\in\mathbf{Z}^+\}$.

**解**　（1）$S_1$ 是有界数集，其上确界为 $\sup S_1=1$，下确界是 $\inf S_1=1/2$.

（2）当 $n$ 为偶数时，$n^{(-1)^n}=n$；当 $n$ 为奇数时，$n^{(-1)^n}=\frac{1}{n}$，所以数集 $S_2$ 无上界，其下确界为 $\inf S_2=0$.

**B 组**

1. 设 $A,B,C$ 是任意集合，求证：

（1）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

（2）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

**证明**　(1) $\forall x\in A\cap(B\cup C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in(B\cup C)$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$，或 $x\in A$ 且 $x\in C$. 若 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$，于是 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 若 $x\in A$ 且 $x\in C$，则 $x\in A\cap C$，于是 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，故 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 反之，$\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，或 $x\in A$ 且 $x\in C$. 若 $x\in A$ 且 $x\in B$，则 $x\in A\cap(B\cup C)$. 若 $x\in A$ 且 $x\in C$，则 $x\in A\cap(B\cup C)$，所以 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$，因此 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(2) 我们用(1)的结论和德摩根(De Morgan)律来证明该结论.

$$\overline{A\cup(B\cap C)}=\overline{A}\cap(\overline{B\cap C})=\overline{A}\cap(\overline{B}\cup\overline{C})=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C}),$$

两边取补得

$$A\cup(B\cap C)=\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap\overline{C})}=\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}\cap\overline{(\overline{A}\cap\overline{C})}=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

2. 证明当 $n>1$ 时，$\left(\frac{n+1}{3}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

**证明**　先证 $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$. 由 A-G 不等式

$$\frac{n+1}{2}>\sqrt{n\cdot 1},\frac{n-1+2}{2}>\sqrt{(n-1)\cdot 2},\frac{n-2+3}{2}>\sqrt{(n-2)\cdot 3},\cdots,$$

$$\frac{2+(n-1)}{2}>\sqrt{2\cdot(n-1)},\frac{1+n}{2}>\sqrt{1\cdot n},$$

所以有 $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>\sqrt{(n!)^2}=n!$.

再证 $\left(\frac{n+1}{3}\right)^n<n!$.

用数学归纳法，当 $n=1$ 时显然成立. 设 $n=k$ 时不等式成立，即 $\left(\frac{k+1}{3}\right)^k<k!$，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}&=\left(\frac{k+1}{3}\cdot\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1}=\left(\frac{k+1}{3}\right)^k\left(\frac{k+1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\\&<k!\left(\frac{k+1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}=\frac{1}{3}(k+1)!\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}.\end{aligned}$$

下面证明 $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3$，$\forall k\in\mathbf{Z}^+$.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k&=1+k\cdot\frac{1}{k}+\frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{1}{k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k!}k(k-1)\cdots1\cdot\left(\frac{1}{k}\right)^k\\&=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\\&<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\\&<2+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{(k-1)\cdot k}\end{aligned}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=3-\frac{1}{k},$$

故有$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3$. 于是有

$$\left(\frac{k+2}{3}\right)^{k+1}<\frac{1}{3}(k+1)!\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}<(k+1)!.$$

3.（1）设 $y=ax^2+bx+c(a>0)$为实系数二次三项式，求证：$\forall x\in\mathbf{R}$ 均有 $y\geqslant0$（或 $y>0$）成立的充要条件是 $b^2-4ac\leqslant0$（或 $b^2-4ac<0$）；

（2）利用（1）的结果证明柯西（Cauchy）不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),\quad \forall x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_n\in\mathbf{R}.$$

**证明** （1）由题设 $a>0$，所以实系数二次三项式 $y=ax^2+bx+c$ 在 $x=-\frac{b}{2a}$时取最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$. 于是有

$$y\geqslant0(>0)\Leftrightarrow\frac{4ac-b^2}{4a}\geqslant0(>0)\Leftrightarrow4ac-b^2\geqslant0(>0)\Leftrightarrow b^2-4ac\leqslant0(<0).$$

（2）当 $\lambda\in\mathbf{R}$ 时，因为$\sum_{i=1}^n(\lambda x_i+y_i)^2\geqslant0$，又

$$\sum_{i=1}^n(\lambda x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^n(\lambda^2x_i^2+2\lambda x_iy_i+y_i^2)=\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\lambda^2+\left(2\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\lambda+\sum_{i=1}^n y_i^2,$$

由（1）可得

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\lambda^2+2\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)\lambda+\sum_{i=1}^n y_i^2\geqslant0\Leftrightarrow\left(2\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2-4\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\leqslant0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right),$$

等式成立的充要条件是 $\lambda x_i+y_i=0,i=1,2,\cdots,n$，即 $x_i$ 与 $y_i$ 成比例（$i=1,2,\cdots,n$）.

4. 设 $a,b,c,d$ 均为实数，求证：

（1）$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|\leqslant|a-c|$；

（2）$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}\right|\leqslant|a-c|+|b-d|$.

**证明** （1）

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right|=\left|\frac{a^2-c^2}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}\right|$$

$$=|a-c|\frac{|a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\leqslant|a-c|\frac{|a|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$\leqslant|a-c|.$$

(2) $$\begin{aligned}|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}|&=|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+d^2}|\\&\leqslant|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{b^2+c^2}|+|\sqrt{b^2+c^2}-\sqrt{c^2+d^2}|\\&\leqslant|a-c|+|b-d|.\end{aligned}$$

*5. 证明：(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}$；

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

**证明**　(1) 因$\dfrac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\dfrac{1}{a+k}-\dfrac{1}{a+k+1}$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}&=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}\right)\\&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}+\cdots+\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}\\&=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}.\end{aligned}$$

(2) 因$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$，所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.\end{aligned}$$

## 习题 1.2

**A 组**

1. 下列各题中两个函数是否相同？为什么？

(1) $y=\dfrac{1-x^2}{1-x}$与$y=1+x$；　　(2) $y=\lg x^2$与$y=2\lg x$；

(3) $y=x$与$y=(\sqrt{x})^2$；　　(4) $y=x$与$y=\sqrt{x^2}$.

**解**　(1) 不同；因为前者定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，后者定义域为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 不同；因为前者定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，后者定义域为$(0,+\infty)$.

(3) 不同；因为前者定义域为$(-\infty,+\infty)$，后者定义域为$[0,+\infty)$.

(4) 不同；因为$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\-x, & x<0,\end{cases}$与$y=x$的表达式不同.

2.（1）设 $f(x)=x^2+1$，求 $f(0),f(-x),f\left(\frac{1}{x}\right),\frac{1}{f(x)}$；

（2）设函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ x^2-4x+4, & 1\leqslant x<4.\end{cases}$$

试求 $f(-1),f(0),f\left(\frac{1}{2}\right),f(1),f(2),f(3)$；指出函数的定义域并作出函数的图形.

**解**（1）$f(0)=1,f(-x)=f(x)=x^2+1,f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+1,\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x^2+1}$.

（2）$f(-1)=1,f(0)=0,f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2},f(1)=1,f(2)=0,$ $f(3)=1$.

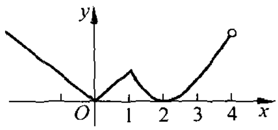

图 1.1

函数的图形如图 1.1 所示. 定义域：$(-\infty,4)$.

3. 求下列函数的定义域：

（1）$y=4\sqrt{3x+2}-3\arcsin\frac{x-1}{2}$；

（2）$y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$；

（3）$y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$；

（4）$y=\frac{x^2}{1+2x}$；

（5）$y=\lg\frac{x}{x+1}$；

（6）$y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$；

（7）$y=\lg(x^2-4)$；

（8）$y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$.

**解**（1）$\left.\begin{array}{l}4\sqrt{3x+2}\text{的定义域：}3x+2\geqslant 0,x\geqslant -\frac{2}{3},\\ 3\arcsin\frac{x-1}{2}\text{的定义域：}\left|\frac{x-1}{2}\right|\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 3,\end{array}\right\}\Rightarrow y\text{ 的定义域：}-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant 3,$

即 $\left[-\frac{2}{3},3\right]$.

（2）$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)\neq 0$，即 $x\neq 1,x\neq 2$，故 $y$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

（3）$\sqrt{x}$ 的定义域：$x\geqslant 0$；$\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}$ 的定义：$x\neq 2$. 故 $y$ 的定义域为：$[0,2)\cup(2,+\infty)$.

（4）$x\neq -\frac{1}{2}$，故 $y$ 的定义域为 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

（5）$\frac{x}{x+1}>0$，$\begin{cases}x>0\\ x+1>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<0\\ x+1<0\end{cases}\Rightarrow x>0$ 或 $x<-1$，故 $y$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

(6) 由$\begin{cases}1-x\geqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}$可得 $x=1$，即 $y$ 的定义域为 $x=1$.

(7) 由 $x^2-4=(x-2)(x+2)>0$，可得$\begin{cases}x-2>0\\x+2>0\end{cases}$或$\begin{cases}x-2<0\\x+2<0\end{cases}\Rightarrow x>2$ 或 $x<-2$. 故$y$ 的定义域为$(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

(8) $\sin x-\cos x\neq 0$. 故 $y$ 的定义域为$\left\{x\,\middle|\,x\neq n\pi+\frac{\pi}{4},x\in\mathbf{R},n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}$.

4. 求函数 $y=f(x)$，已知

(1) $f(x+1)=x^2+2x+4$；

(2) $f(\sin x)=\cos x,|x|\leqslant\frac{\pi}{2}$；

(3) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

**解** (1) $f(x+1)=x^2+2x+4=(x+1)^2+3$，故 $f(x)=x^2+3$.

(2) $f(\sin x)=\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$，故 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

(3) $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$，故 $f(x)=x^2-2$.

5. 作函数 $y=|x|$ 的图形，并利用该图形作 $y=|x+1|$，$y=|x|+1$ 及 $y=|x+1|+1$ 的图形.

**解** 如图 1.2 所示.

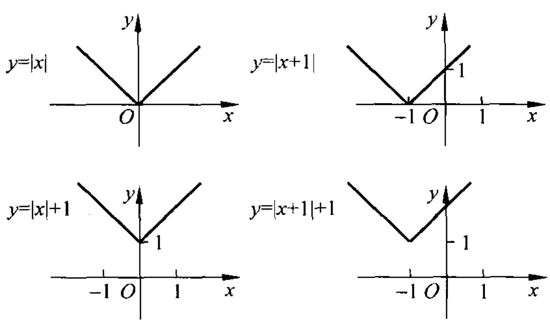


图 1.2

6. 判断下列函数的增减性：

(1) $y=x+x^3$；

(2) $y=x-x^2$.

**解** (1) $y$ 在$(-\infty,+\infty)$内单调增加.

(2) 因为 $y=x-x^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，$-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 在 $x\leqslant\frac{1}{2}$时为增函数，在 $x\geqslant\frac{1}{2}$时为减函数，故 $y$ 亦然.

7. 判断下列函数的奇偶性及有界性：

(1) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$；

(3) $y=1+\sin x$；　　(4) $y=\dfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})$；

(5) $y=x|x|$；　　(6) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$.

**解**　(1) $y$ 的定义域为 $(-1,1)$，$y(-x)=-y(x)$，故 $y$ 是奇函数. 又因为当 $x$ 充分接近 $-1$ 或 $1$ 时，不存在常数 $M$，使 $|y|\leqslant M$ 成立，故无界.

(2) $y$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y(-x)=-y(x)$，故 $y$ 是奇函数. 又因为 $x$ 趋近 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，不存在常数 $M$，使 $|y|\leqslant M$ 成立，故无界.

(3) $y$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$，$y\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，不满足奇（偶）函数的定义，故非奇非偶. 又因为 $|y|\leqslant 1+|\sin x|\leqslant 2$，故有界.

(4) $y$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y(-x)=y(x)$，故 $y$ 是偶函数. 又因为 $x$ 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，不存在常数 $M$，使 $|y|\leqslant M$ 成立，故无界.

(5) $y=x|x|$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y(-x)=-y(x)$，故 $y$ 是奇函数. 又因为当 $x$ 趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$ 时，不存在常数 $M$，使 $|y|\leqslant M$ 成立，故无界.

(6) $y$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$y(-x)=-y(x)$，故 $y$ 是奇函数. 又因为 $|y|=\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{|x|}{2|x|}=\dfrac{1}{2}$，故有界.

8. 求下列函数的最小正周期：

(1) $y=\cos 2x$；　　(2) $y=\cos\pi(x+3)$；

(3) $y=x-[x]$；　　(4) $y=4\cos\dfrac{x}{4}-5\sin\dfrac{x}{5}$.

**解**　(1) 因为 $y=\cos x$ 的最小正周期是 $2\pi$，故 $y=\cos 2x$ 的最小正周期是 $\pi$.

(2) 最小正周期：$\dfrac{2\pi}{\pi}=2$.

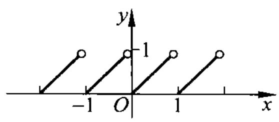

图　1.3

(3) 画出图形，如图 1.3 所示. 可知 1 是最小正周期.

为此须证明：$f(x+1)=f(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$；及不存在小于 1 的正数 $t$，使得 $f(x+t)=f(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$.

首先有 $f(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-[x]-1=x-[x]=f(x)$，$\forall x\in\mathbf{R}$，故 1 为周期.

其次，设 $0<t<1$，取 $x=0$，则有

$$f(x+t)=f(t)=t-[t]=t\neq 0=f(x),$$

故 $t$ 不是周期，所以 1 是最小正周期.