工科数学分析

Gongke Shuxue Fenxi

上册

主　编　赵　晶　李宏伟

副主编　朱小宁　张益群　韩世勤　马晴霞

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

工科数学分析

GONGKE SHUXUE FENXI

（上册）

主　编：赵　晶　李宏伟

副主编：朱小宁　张益群

韩世勤　马晴霞

图书在版编目(CIP)数据

工科数学分析(上册)/赵晶、李宏伟主编,朱小宁、张益群、韩世勤、马晴霞副主编. —武汉:中国地质大学出版社,2010.9

ISBN 978-7-5625-2550-9

Ⅰ.①工…

Ⅱ.①赵…②李…③朱…④张…⑤韩…⑥马…

Ⅲ.①数学分析-高等学校-教材

Ⅳ.①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 178381 号

工科数学分析(上册)

赵　晶　李宏伟　主　编

朱小宁　张益群　韩世勤　马晴霞　副主编

责任编辑:段连秀　　策划编辑:毕克成　　责任校对:张咏梅

出版发行:中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路 388 号)　　邮政编码:430074

电　话:(027)67883511　　传真:67883580　　E-mail:cbb @ cug. edu. cn

经　销:全国新华书店　　http://www. cugp. cn

开本:787 毫米×960 毫米 1/16　　字数:530 千字　　印张:25.75

版次:2010 年 9 月第 1 版　　印次:2010 年 9 月第 1 次印刷

印刷:武汉市教文印刷厂　　印数:1—3 000 册

ISBN 978 - 7 - 5625 - 2550 - 9　　定价:45.00 元

前 言

随着信息科学与计算技术的发展，数学课程在理论和应用两方面的重要性越来越突出，同时使得一些专业对数学基础课程在内容的深度和广度上都提出了更高的要求．目前出版的《数学分析》教材，大多数是为数学类本科专业编写的．而信息科学、计算机科学与技术、通信工程、系统工程、软件工程、地理信息系统、地质工程等有关本科专业，它们对于数学分析的内容和方法的要求及教学时数都不同于数学类本科专业．因此，本书是为这些专业的数学基础课程编写的．

本书是以教育部工科数学课程指导委员会颁布的高等工科院校本科《高等数学课程教学基本要求》为纲，在多年开设工科数学分析课程的基础上，广泛吸取国内外知名大学的教学经验而编写的《工科数学分析》课程教材．它是一门重要的基础理论必修课，不仅包含了一般理工科“高等数学”的全部内容，而且加强和拓宽了微积分的理论基础，注重无穷小分析思想的应用，在数学逻辑性、严谨性及抽象性方面也有一定的要求和训练．

本书可作为理工科院校对数学要求较高的非数学类专业本科生教材，但如果略去理论性较强的部分和带＊号的内容，其他专业也可以使用．

编写本书的宗旨是：①通过这门课的学习，使学生系统地获得一元与多元微积分及其应用、向量代数与空间解析几何、无穷级数与常微分方程等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能，为学习后续课程和知识的自我更新奠定必要的数学基础；②在传授知识的同时，培养学生比较熟练的运算能力、抽象思维和形象思维能力、逻辑推理能力、自主学习能力以及一定的数学建模能力，正确领会一些重要的数学思想方法，使学生受到用数学分析的基本概念、理论、方法解决几何、物理及其他实际问题的初步训练，以提高抽象概括问题的能力和应用数学知识分析解决实际问题的能力．

本书在体现教材内容的深度和广度方面有一定拓宽、加强，在课程体系方面有一些改革与创新，在内容详略和增减、编写次序等方面有所变动与革新，特说明如下：

1．本教材的课堂教学时数（包括习题课）为 170～210 学时．以篇、章、节为单位编写，全书上、下册共分三篇十五章．带＊号的内容为选学内容，教师可根据专业需要和教学时数选择讲授内容或者安排学生自学．

2．本教材拓宽和加强了数学基础．在实数完备性基础上讲解极限理论，增加了

关于实数基本理论、一致连续、一致收敛、函数可积性、矢量分析和含参变量积分的内容，以加强对学生的逻辑思维训练.

3.在结构上进行了精心编排和重组.本书内容按照向量代数与空间解析几何、一元函数微积分学、级数理论、多元函数微积分学、常微分方程的顺序进行编写.

4.由于本教材不仅包含了一般“高等数学”的全部内容，而且拓宽和加强了数学基础，因此篇幅会有所扩大，编写者采用了集中表达、有所偏重(主要篇幅用于典型情况，类似情况简单交待)、简化(如排除完全类似的证明)等手段尽量做到精炼.

5.本教材在加强高等数学内容中一些重要的数学思想方法和实际应用方面做了一些尝试.对现行教材中的例题和习题作了较大变更和调整，加深、扩大了应用实例和习题的范围.通过典型例题的介绍突出数学思想方法的讲解；配以相应习题，加强应用数学能力的训练，培养学生运用高等数学的思想方法和思维方式解决实际问题能力.

6.关于习题的配置：本教材每节及每章后均配有一定数量的习题，任课教师可从中酌情选择布置学生练习.所配习题力争做到反映各节内容的基本要求，并在一般高等数学的基础上有所加深.

每节的习题分为A、B两类：A类为基本练习，其中第一题一般为思考题或讨论题，用于巩固基础知识和基本技能；B类为加深和拓宽练习，用于扩大视野和熟练技巧.

每章配总习题，这部分习题综合性较强，既反映基本内容又有一定难度，增加一些考研的习题，题型多样，供学生综合练习和复习使用.

书末附有习题和总习题的答案与提示.

7.本教材附有常用曲线、行列式和积分表的附录，以备教师和学生查阅.

8.本教材中所有外国人名均用英文表示(如泰勒公式写为Taylor公式、洛必达法则写为L'Hospital法则等等).

本书上册由朱小宁(第一、二章及附录一)、赵晶(第三章)、张益群(第四章)、韩世勤(第五章)、马晴霞(第六章、附录二及附录三)、李宏伟(第七章)编写，赵晶、李宏伟统稿.下册由刘安平(第八章)、刘小雅(第九章)、李星(第十章)、吴振远(第十一、十二章)、刘鲁文(第十三章)、彭放(第十四、十五章)编写，彭放统稿.我们在编写出版过程中得到了中国地质大学数理学院领导和教师的大力支持与帮助.段连秀编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动.谨在此向他们表示衷心的感谢.

在此次编写过程中参考了大量的有关教材，其中对本书影响较大的书目均列在书后的参考文献中，但由于编者水平所限，不足和疏漏之处在所难免，恳请读者和专家学者批评指正.

编　者

2010年9月

目　　录

第一篇　向量代数与空间解析几何

第二篇 微积分

第一篇　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和方程对应起来，从而可以用代数方法来研究几何问题，空间解析几何也是按照类似的方法建立起来的.

平面解析几何的知识对学习一元函数微积分是不可缺少的，而空间解析几何的知识对学习多元函数微积分也是必要的.

本篇首先建立空间直角坐标系，引进在工程技术上有着广泛应用的向量，介绍向量的一些运算，然后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容，并以向量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍二次曲面.

第一章　向量代数

§1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量概念

在研究力学、物理学以及其他应用科学时，常会遇到这样一类量，它们既有大小，又有方向. 例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这一类量叫做向量.

在数学上，往往用一条有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量，记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$（图 1.1）. 有时也用一个粗体字母或用一个上面加箭头的书写体字母表示向量. 例如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等.

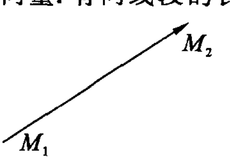

图 1.1

以坐标原点 O 为起点，向一个点 M 引向量 $\overrightarrow{OM}$，这个向

量叫做点 M 对于点 O 的向径,常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,所以在数学上我们只研究与起点无关的向量,并称这种向量为自由向量(以下简称为向量),即只考虑向量的大小和方向,而不论它的起点在什么地方.当遇到与起点有关的向量时(例如,谈到某一质点的运动速度时,这速度就是与所考虑的那一质点的位置有关的向量),可在一般原则下作特别处理.

由于我们只讨论自由向量,所以如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,我们就说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

向量的大小叫做向量的模.向量$\overrightarrow{M_1M_2}$、$\boldsymbol{a}$、$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$、$|\boldsymbol{a}|$、$|\vec{a}|$.模等于 1 的向量叫做**单位向量**.模等于零的向量叫做**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$.零向量的起点和终点重合,它的方向可以看作是任意的.

两个非零向量,如果它们的方向相同或者相反,就称这两个向量平行.向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.由于零向量的方向可以看作是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

1.1.2 向量的线性运算

现在我们引进向量的加法和数乘这两种运算,称之为向量的线性运算.

1. 向量的加法

根据力学中两个力的合成法则,我们用**平行四边形法则**来定义两个向量的相加.

将两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平移至同一起点 A,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为边作一个平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC,见图 1.2(a),则向量$\overrightarrow{AC}$即等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}.$$

为了解决两个平行向量相加的问题,我们进一步引进下面的**三角形法则**.

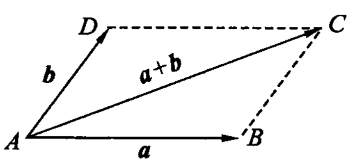

图 1.2(a)

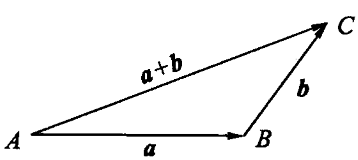

图 1.2(b)

通过平移将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 首尾相接，则由起点到终点的向量$\overrightarrow{AC}$为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 之和，见图 1.2(b)，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}.$$

不难看出，三角形法则蕴含了平行四边形法则.

2. 向量的数乘

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 k 的乘积(称为**向量的数乘**)定义为一个向量，记作 $k\boldsymbol{a}$，它的模为 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$，它的方向与 $\boldsymbol{a}$ 平行. 当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向(见图 1.3)；当 $k=0$ 时，$|k\boldsymbol{a}|=0$，即 $k\boldsymbol{a}$ 为零向量，这时它的方向可以是任意的. 特别地，当 $k=1$ 时，$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；$k=-1$ 时，$(-1)\cdot\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$，是与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量，$-\boldsymbol{a}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

由向量的数乘可以导出向量的减法，即 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差定义为

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{a}$$

也就是将 $\boldsymbol{a}$ 变成 $-\boldsymbol{a}$ 再和 $\boldsymbol{b}$ 相加(见图 1.4).

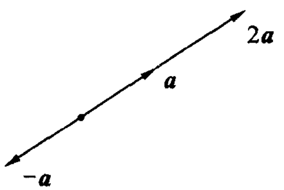

图 1.3

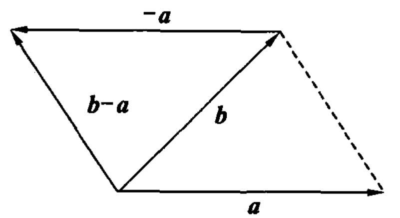

图 1.4

如果用记号 $\boldsymbol{e}_a$ 表示与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，则依向量的数乘定义，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$$

因此，一个非零向量除以它的模便可得到一个同方向的单位向量，即

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{e}_a.$$

3. 向量加法和数乘的运算律

定理 1.1　对于任意向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 以及任意的数 α、β，以下的运算律成立：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$　(交换律)；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$　(结合律)；

(3) $\alpha(\beta\boldsymbol{a})=(\alpha\beta)\boldsymbol{a}$　(数乘的结合律)；

(4) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}$　(分配律)；

(5) $\alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}$　(分配律).

证　仅证明(2)，其余证明留作练习.

按向量加法的三角形法则,从图 1.5 可见:

先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,再加上 $\boldsymbol{c}$,即得和 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$,如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加,则得同一结果,所以符合结合律. 证毕. ▌

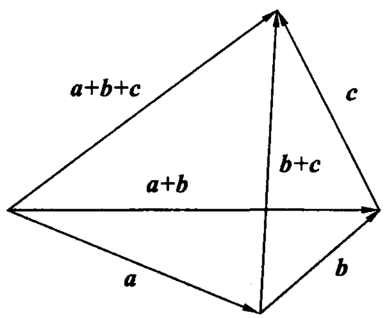

图 1.5

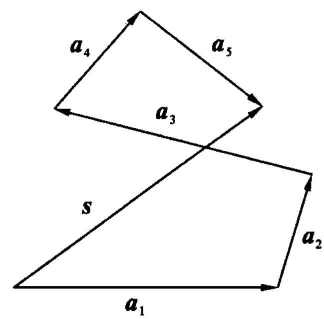

图 1.6

由于向量的加法符合交换律与结合律,故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n(n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

并按向量相加的三角形法则,可得 n 个向量相加的法则如下:使前一向量的终点作为次一向量的起点,相继作向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$,再以第一个向量的起点为起点,最后一个向量的终点为终点作一向量,这个向量即为所求的和. 如图 1.6,有

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_5.$$

由三角形两边之和大于第三边的原理,有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \qquad \text{及} \qquad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

我们常用向量与数的乘积来说明两个向量的平行关系. 即有

定理 1.2 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 k,使 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$.

证明:条件的充分性是显然的,下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$,取 $|k|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时 k 取正值,当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时 k 取负值,即有 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $k\boldsymbol{a}$ 同向,且 $|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$.

再证数 k 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=k\boldsymbol{a}$,又设 $\boldsymbol{b}=l\boldsymbol{a}$,两式相减,便得

$$(k-l)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \qquad \text{即} \qquad |k-l||\boldsymbol{a}|=0$$

因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$,故 $|k-l|=0$,即 $k=l$,定理证毕. ▌