北大燕园

大学数学辅导丛书

工程数学 线性代数辅导

同济·第五版

编著　清华大学　李永乐

国家行政学院出版社

大学数学辅导丛书

线性代数辅导

同济·第五版

编著　清华大学　李永乐
　　　清华大学　周耀耀

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数辅导/李永乐，周耀耀编著. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 978-7-80140-320-9

Ⅰ. 线… Ⅱ. ①李… ②周… Ⅲ. 线性代数-高等学校-自学参考资料
Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 004472 号

书　　名　线性代数辅导
作　　者　李永乐　周耀耀
责任编辑　李锦慧
出版发行　国家行政学院出版社
（北京市海淀区长春桥路 6 号　100089）
电　　话　（010）88517082
经　　销　新华书店
印　　刷　北京市朝阳印刷厂
版　　次　2008 年 8 月第 3 版
印　　次　2008 年 8 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米 ×960 毫米　16 开
印　　张　21. 25 印张
字　　数　520 千字
书　　号　ISBN 978-7-80140-320-9/O · 27
定　　价　19. 80 元

前　言

线性代数是一门重要的基础课，它研究的是有限维空间的线性理论，它所涉及到的处理问题的思想、方法和技巧被广泛地应用到科技的各个领域，尤其是随着计算机的发展，这种离散化解决问题的手法尤显重要。

线性代数这门课程的特点是：概念多，符号多，运算法则多（有些法则与大家习惯的数的运算法则有较大的反差），容易引起混淆；内容上纵横交错，前后联系紧密，环环相扣，相互渗透，切入点接口多；对于抽象性和逻辑性有较高的要求。因此，初学者驾驭把握起来有一定困难，不少同学虽用心学习，但收效甚微。为此，我们编写此书希望给同学一些帮助。

本书每章设有**基本内容**（包括基本要求与学习要点、基本概念以及重要的定理与公式），希望能帮助同学把握住该章的核心，通过选编的**典型例题**，或是澄清基本概念与基本运算，或是指出初学者常犯之错误，或是介绍线性代数中常用思路与技巧，并且许多题目给出一题多解，通过这些希望能开阔思路，活跃思维，举一反三，触类旁通。

编写本书时，我们主要以**同济·第五版**为蓝本，同时参考了下列大学的线性代数教材：**清华大学、西安交通大学、浙江大学、四川大学**以及高教出版社出版的面向21世纪课程教材，还有N.B. 普罗斯

库列柯夫著、周晓钟译的“线性代数习题集”和全国工学、经济学硕士生入学考试试题。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

于清华园

目　　录

第一章　行列式 …………………………………………………………（1）
　基本内容 ……………………………………………………………（1）
　典型例题分析 ………………………………………………………（5）

第二章　矩阵及其运算 ………………………………………………（23）
　基本内容 ……………………………………………………………（23）
　典型例题分析 ………………………………………………………（28）

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 ……………………………（66）
　基本内容 ……………………………………………………………（66）
　典型例题分析 ………………………………………………………（69）

第四章　向量组的线性相关性 ………………………………………（101）
　基本内容 ……………………………………………………………（101）
　典型例题分析 ………………………………………………………（107）

第五章　相似矩阵及二次型 …………………………………………（199）
　基本内容 ……………………………………………………………（199）
　典型例题分析 ………………………………………………………（205）

第六章　线性空间与线性变换 ………………………………………（318）
　基本内容 ……………………………………………………………（318）
　典型例题分析 ………………………………………………………（321）

第一章　行列式

基本内容

一、基本要求与学习要点

1. 基本要求

(1) 会用对角线法则计算二阶和三阶行列式.

(2) 知道 n 阶行列式的定义及性质.

(3) 知道代数余子式的定义及性质.

(4) 会利用行列式的性质及按行(列)展开计算简单的 n 阶行列式.

(5) 知道克拉默法则.

2. 学习要点

本章的重点是行列式的计算.对于 n 阶行列式的定义只需了解其大概的意思,对于行列式各条性质的证明只需了解其基本思路.要注重学会利用这些性质及按行(行)展开等基本方法来简化行列式的计算,并掌握两行(列)交换、某行(列)乘数、某行(列)加上另一行(列)的 k 倍这三类运算.按照"会计算简单的 n 阶行列式"这一基本要求,对于计算行列式的技巧毋需作过多的探求.

二、基本概念

【定义 1.1】 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组称为一个 n 阶排列.通常用 $j_1j_2\cdots j_n$ 表示 n 阶排列.

【定义 1.2】 一个排列中,如果一个大的数排在小的数之前,就称这两个数构成一个**逆序**.一个排列的逆序总数称为这个排列的**逆序数**.用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 表示排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数是偶数,则称这个排列为**偶排列**,否则称为**奇排列**.

例如,在5级排列25134中,有逆序21,51,53,54,因此排列25134的逆序数为4,即 $\tau(25134)=4$.所以排列25134是偶排列.

【定义 1.3】 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列．当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，该项的前面带正号；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，该项的前面带负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.1}$$

其中，$\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和．式(1.1)称为 n 阶排列式的**完全展开式**．

例如，若已知 $a_{14}a_{2j}a_{31}a_{42}$ 是四阶行列式中的一项，那么根据行列式的定义，它应是不同行不同列元素的乘积．因此必有 $j=3$．

由于 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$ 列的逆序数 $\tau(4312)=3+2+0=5$ 是奇数，所以该项所带符号为负号．

【定义 1.4】 在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列，由剩下的元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称其为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}. 而称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \tag{1.2}$$

例如，若已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{21}=2$，即已知

$$(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & a \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2, \Rightarrow a=3.$$

三、行列式的性质

【性质 1】 经转置的行列式的值不变，即 $|A|=|A^{T}|$. 这表明在行列式中行与列的地位是对等的，因此，行列式的行所具有的性质，对于列亦具有．为简捷，下面仅叙述行的性质．

【性质 2】 行列式中某一行各元素如有公因数 k，则 k 可以提到行列式符号外．特别地，若行列式中某行元素全是零，则行列式的值为零．

【性质3】 如果行列式中某行的每个元素都是两个数的和,则这个行列式可以拆成两个行列式的和.例如:

$$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 & c_1+c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

【注】 *由于 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$,则 $|A+B|$ 每行元素都是两个数的和,根据【性质3】,行列式 $|A+B|$ 应拆成 2^n 个行列式之和,故一般情况,$|A+B| \neq |A|+|B|$,在这里不要出错.*

【性质4】 对换行列式中某两行的位置,行列式的值只改变正负号.特别地,如两行元素对应相等(或成比例),则行列式的值是零.

【性质5】 把某行的 k 倍加至另一行,行列式的值不变.

【注】 *在行列式计算中,往往先用这条性质作恒等变形,以期简化计算.*

四、重要定理

【定理1.1】 (行列式按行(列)展开公式) n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

或 $$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{1.3}$$

【定理1.2】 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零.即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或 $$a_{1j}A_{1k} + a_{2j}A_{2k} + \cdots + a_{nj}A_{nk} = 0 \quad (j \neq k). \tag{1.4}$$

【定理1.3】 (克拉默法则)如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$,则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}, \tag{1.5}$$

其中 $D_j(j=1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组的常数项替代后所得到的 n 阶行列式.

【定理1.4】 如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解，则它的系数行列式必为零.

五、重要公式

1. 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ a_{2n} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \tag{1.6}$$

2. 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.7}$$

3. 两个特殊的拉普拉斯展开式

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.8}$$

(2) $$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}. \tag{1.9}$$

4. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j). \tag{1.10}$$

■ 典型例题分析

一、n 阶行列式的概念与性质

【例 1.1】 求下列排列的逆序数：

(1) 21736854； (2) $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

【分析】 求一个排列的逆序数可以有两种思路：

思路一：按此排列的次序分别算出每个数的后面比它小的数的个数，然后求和.

思路二：按自然数的顺序分别算出排在 1,2,3,… 前面的比它大的数的个数，再求和.

【解法一】 （用思路一）

2 的后面有 1 小于 2，故 2 的逆序数为 1.

1 的后面没有小于 1 的数，1 的逆序数为 0.

7 的后面有 3,6,5,4 小于 7，故 7 的逆序数为 4. 依此方法逐个计算. 可知此排列的逆序数 $\tau(21736854) = 1+0+4+0+2+2+1+0 = 10$.

【解法二】 （用思路二）

1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数是 1.

2 排在首位没有逆序.

3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1.

依此计算，得 $\tau(21736854) = 1+0+1+4+3+1+0+0 = 10$.

(2) 此排列的前 n 个数 $135\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $246\cdots(2n)$ 之间也没有逆序，只是前 n 个数与后 n 个数之间才有逆序，用思路一易见.

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))$$
$$= 0+1+2+\cdots+(n-1)+0+0+\cdots+0 = \frac{1}{2}n(n-1).$$

【例 1.2】 已知 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 在 4 阶行列式中带负号，求 j 与 k.

【分析】 本题有两种方法，一是先将该项的行指标按自然顺序排好，然后再用列指标应当是奇排列（因为该项带负号）来确定 j 与 k. 另一方法是直接计算行的逆序数与列的逆序数，使其

和为奇数来定 j 与 k.

【解法一】 由于 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}=a_{12}a_{2k}a_{3j}a_{41}$,而 $2,k,j,1$ 是 1 至 4 的排列,故 j 与 k 只能取自 3 和 4.

若 $j=3,k=4$,则 $\tau(2431)=1+2+1=4$ 是偶排列,与该项带负号不符,故 $j=4,k=3$.

【解法二】 同前,若 $j=3,k=4$,则该项为 $a_{33}a_{12}a_{41}a_{24}$,此时,行指标与列指标的逆序数之和 $\tau(3142)+\tau(3214)=3+3=6$ 是偶数,与该项带负号不符,可见 $j=4,k=3$.

【注】 若 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}=a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$,则

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}.$$

但 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 与 $\tau(k_1k_2\cdots k_n)$ 不一定相等,它们只是奇偶性相同,这一点不要混淆.

【例 1.3】 写出 4 阶行列式中含 $a_{11}a_{23}$ 的项.

【分析】 行列式是不同行不同列元素乘积的代数和,含 $a_{11}a_{23}$ 的项应当有形式 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由此分析 j_3,j_4 的取值及该项所带的正负号.

【解】 因为含 $a_{11}a_{23}$ 的项可写为 $a_{11}a_{23}a_{3j_3}a_{4j_4}$,其中 $13j_3j_4$ 是 1 至 4 的排列.所以 j_3,j_4 取自 2 和 4.可见共有两项含 $a_{11}a_{23}$.

若 $j_3=2,j_4=4$,则 $\tau(1324)=1$ 是奇排列,故该项带负号:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$.

若 $j_3=4,j_4=2$,利用对换改变排列的奇偶性,知 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 带正号.即 4 阶行列式中,含 $a_{11}a_{23}$ 的项是:$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$, $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

【例 1.4】 已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是 6 阶行列式中的一项,试确定 i,j 的值及此项所带符号.

【解】 根据行列式的定义,它是不同行不同列元素乘积的代数和.因此,行指标

$$2,3,i,6,5,1$$

应取自 1 至 6 的排列,故 $i=4$.同理可知 $3,1,j,4,6,5$ 中 $j=2$.

关于此项所带的符号,可有两种思路:

(1) 将该项按行的自然顺序排列,有 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$.
后者列的逆序数为 $\tau(5,3,1,2,6,4)=4+2+0+0+1=7$,所以该项应带负号.

(2) 直接计算行的逆序数与列的逆序数,有 $\tau(2,3,4,6,5,1)+\tau(3,1,2,4,6,5)=6+3=9$.亦知此项应带负号.

【例 1.5】 方程 $f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}=0$ 的根的个数为

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

【分析】 问方程 $f(x)=0$ 有几个根,也就是问 $f(x)$ 是 x 的几次多项式.为此应先对 $f(x)$ 作恒等变形.将第 1 列的 -1 倍分别加至第 2,3,4 列得

$$f(x)=\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix},$$

再将第 2 列加至第 4 列,行列式的右上角为 0.可用拉普拉斯展开式(1.8),即

$$f(x)=\begin{vmatrix}x-2&1&0&0\\2x-2&1&0&0\\3x-3&1&x-2&-1\\4x&-3&x-7&-6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&1\\2x-2&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x-2&-1\\x-7&-6\end{vmatrix}$$,应选(B).

【例 1.6】 已知 221,323,459 都能被 17 整除,不求出行列式的值,试证明:行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&3\\9&5&4\end{vmatrix}$ 能被 17 整除.

【证明】 把 D 中第 3 列的 100 倍,第 2 列的 10 倍分别加至第 1 列,行列式 D 恒等变形为

$$D=\begin{vmatrix}1&2&2\\3&2&3\\9&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}221&2&2\\323&2&3\\459&5&4\end{vmatrix}.$$

按已知条件第 1 列有公因数 17,把 17 提取到行列式记号以外,所剩行列式记为 D_1,则 $D=17D_1$,且 D_1 的每一个元素都是整数. 根据行列式的定义,D_1 是不同行不同列元素乘积的代数和,因而 D_1 是整数,故 D 能被 17 整除.

【例 1.7】 已知 $f(x)=\begin{vmatrix}x&1&2&4\\1&2-x&2&4\\2&0&1&2-x\\1&x&x+3&x+6\end{vmatrix}$, 证明 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

【分析】 按行列式定义易知 $f(x)$ 是 x 的多项式,显然 $f(x)$ 连续且可导. 根据罗尔定理,我们只需证明 $f(0)=f(1)$.

【证明】 因为 $f(0)=\begin{vmatrix}0&1&2&4\\1&2&2&4\\2&0&1&2\\1&0&3&6\end{vmatrix}=0$, $f(1)=\begin{vmatrix}1&1&2&4\\1&1&2&4\\2&0&1&1\\1&1&4&7\end{vmatrix}=0$,

又知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,故 $\exists\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=0$,即 $f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

【例 1.8】 计算行列式 $\begin{vmatrix}2x&x&1&2\\1&x&1&-1\\3&2&x&1\\x&1&0&x\end{vmatrix}$ 展开式中 x^4 与 x^3 的系数.

【分析】 按行列式定义,行列式中每一项都是不同行不同列元素的乘积. 那么,要构成 x^4 必须各行各列都要含 x,因此只能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$,而对于 x^3,可判断该项必不含 a_{11},若含 a_{12},则可由 $a_{33}a_{41}a_{24}$,$a_{33}a_{44}a_{21}$ 分别构成,若不含 a_{12},则可由 $a_{22}a_{33}a_{41}a_{14}$ 构成,可见含 x^3 的共有三项.

【解】 按行列式定义,有且只有 $a_{11},a_{22},a_{33},a_{44}$ 四元素相乘才出现 x^4,故 x^4 的系数是 2.

对于 x^3,则有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$,$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$,$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三项,此时各项的系数分别是 $a_{24}=-1$,$a_{21}=1$,$a_{14}=2$ 即 $-x^3$,x^3,$2x^3$ 又各项逆序数分别是 $\tau(2431)=4$,$\tau(2134)=1$,$\tau(4231)=5$,故所带符号为正、负、负. 因此 x^3 的系数是 -4.

【例 1.9】 设行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = f(x)$，则 $f(x)$ 的 4 阶导数 $f^{(4)}(x)$ = ________.

【分析】 只需计算 $f(x)$ 中含有 x^4 的项，这样的项为 $(x-1)^2(x+1)^2=(x^2-1)^2$，所以 $f^{(4)}(x)=4!=24$.

【例 1.10】 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & x & -1 & 1 \\ 0 & -2 & x+1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$，则 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$ = ________.

【分析】 只需计算 $f(x)$ 中含 x^2 或更高次的项，显然，这样的项只有 $2x(x+1)=2x^2+2x$，于是

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}=4.$$

【例 1.11】 证明

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}. \tag{1.11}$$

【证明】 由于行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，所带符号是 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 因为第一行除了 a_{1n} 外其它数均为 0，因此欲要得到非 0 项，第一行必取 a_{1n}，即 $j_1=n$，这样第二行不能选 a_{2n}（因为每列只能选一个数），故只能选 $a_{2\,n-1}$. 类似地，第三行只能取 $a_{3\,n-2}$，$\cdots$. 因此这个行列式只有唯一的一项

$$a_{1n}\,a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$$

有可能不为 0，而这一项列指标的逆序数为

$$\tau(n,n-1,\cdots,1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+0=\frac{1}{2}n(n-1).$$

因此，右下三角行列式的值为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1n}\,a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}$.

【评注】 上（下）三角行列式的值是主对角元素的乘积（参见 1.6 式），而右下（左上）三角行列式的值是副对角线元素的乘积并且带有正负号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$（参见 1.11 式），这两个公式要分清.

【例 1.12】 已知 n 阶行列式 D 中有 n^2-n+1 个 0，证明 $D=0$.

【证明】 因为 n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素，现在其中有 n^2-n+1 个 0，故非 0 元素共有 $n-1$ 个. 按行列式定义

$$D=\sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

因此，$a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 这 n 个元素中至少有一个是 0，故行列式 $D=0$.

【例 1.13】 证明 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

【证明】 由题设知,当 $k \geqslant 3$ 时,$a_{3k} = a_{4k} = a_{5k} = 0$,而行列式 D 中的一般项是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}.$$

由于j_3, j_4, j_5 互不相同且取自于1至5,故其中至少有一个要大于或等于3,那么 a_{3j_3}, a_{4j_4}, a_{5j_5} 中至少有一个为0,所以 D 的展开式中每一项都是0,故行列式 $D = 0$.

【例 1.14】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ 0 & 0 & e & f \end{vmatrix}$ 之值.

【分析】 按行列式定义,D 的一般项是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,由于行列式中有较多的0,该项若不为0,则必有

$$j_1 = 3, \quad j_2 = 1.$$

而 j_3 可取 2 或 4, j_4 可取 3 或 4. 但因 j_1, j_2, j_3, j_4 是 1 至 4 的排列,互不相同,则必有

$$j_4 = 4, \quad j_3 = 2.$$

所以在 D 的 4!项中,仅有一个非 0 项.

【解】 $D = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4} = (-1)^{\tau(3124)} abcf = abcf.$

【例 1.15】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2000 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 2001 \end{vmatrix}$ 之值.

【分析】 行列式 D 中有大量的0,对于 D 的一般项

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

若该项不为0,必有

$$j_1 = 2000, \quad j_2 = 1999, \quad \cdots, \quad j_{2000} = 1, \quad j_{2001} = 2001.$$

由于逆序数 $\tau(2000,1999,\cdots,2,1,2001) = \frac{1}{2}2000 \cdot 1999$ 为偶数,

故 $\qquad D = 2001!$

【评注】 对行列式要认识到它是不同行不同列元素乘积的代数和,要处理好每项所带的正负号,它是由排列的奇偶性所决定的. 这里的行列式有较多的0,因而可以用定义法来分析论证,以加深对概念的理解,但即使有如此多的0,我们仍应当用行列式的性质,展开公式来计算,以减少工作量. 对于一般的行列式若用定义法来计算几乎是不现实的.

二、n 阶行列式的计算

【例 1.16】 计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 6\\4 & -1 & 5 & 0\\-1 & 2 & 0 & -5\\1 & 4 & -2 & -2\end{vmatrix}$ 之值.

【分析】 本题的行列式没有太多的规律,因而用展开公式来计算,但要先利用行列式的性质将其恒等变形,让其某行(或列)有较多的零.

【解】 $$D\xlongequal[c_4-5c_1]{c_2+2c_1}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1 & -4\\4 & 7 & 5 & -20\\-1 & 0 & 0 & 0\\1 & 6 & -2 & -7\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\7 & 5 & -20\\6 & -2 & -7\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2-5r_1}-\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\-8 & 0 & 0\\6 & -2 & -7\end{vmatrix}=-(-8)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -4\\-2 & -7\end{vmatrix}=120.$$

【评注】 ①r_i 表示行列式的第 i 行,c_j 表示行列式的第 j 列,对换 i 行与 j 行记成 $r_i\leftrightarrow r_j$,第 i 行乘以 k 记成 kr_i,i 行的 k 倍加至 j 行记成 r_j+kr_i,类似有列变换的记号.

② 用行列式展开式时,不要丢掉正负号.这是初学时常犯的错误.

【例 1.17】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{vmatrix}$ 之值.

【分析】 为简化计算可利用行列式的性质去掉行列式里的分母,转化为整数的运算.

【解】 (三角化法)

$$D=\left(\frac{1}{2}\right)^4\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{\sum r_i}\frac{1}{16}\begin{vmatrix}5 & 5 & 5 & 5\\1 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\1 & 1 & 2 & 1\\1 & 1 & 1 & 2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\frac{5}{16}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{5}{16}. \qquad \text{(由(1.6))}$$

【评注】 ① 如果行列式各列元素和相等都是 a,一个常用的办法是将各行均加至第一行,则第一行有公因数 a 可提到行列式记号之外.

② 对行列式作恒等变形,化其为上三角或下三角行列式利用公式(1.6)是常用技巧.

【例 1.18】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & b_1 & 0 & 0\\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0\\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3\\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3\end{vmatrix}$ 之值.

【解】（三角化法）

$$D\xlongequal{r_2+r_1}\begin{vmatrix}1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & b_2 & 0\\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3\\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_3+r_2}\begin{vmatrix}1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & b_3\\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3\end{vmatrix}\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1 & b_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & b_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$=1$.（由(1.6)）

【评注】 逐行(列)相加减的技巧应当知道.

【例 1.19】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$ 之值,其中 $a_i\neq 0,i=1,2,\cdots,n$.

【分析】 这是“爪”型行列式,这一类行列式通常是用提取公因式法化其为三角形.

【解】 第 i 行提出 $a_{i-1}(i=2,3\cdots,n+1)$,得

$$D=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix}a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1-r_2-r_3-\cdots-r_n}\prod_{i=1}^{n}a_i\begin{vmatrix}a_0-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}a_i\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$ （由(1.6)）