

XINZHUANTI JIAOCHENG

新专题教程

袁震东 何红春 主编

高中数学 8
算法初步



华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 8

算法初步

主 编 袁震东 何红春
参 编 (以姓氏笔画为序)
何红春 姚建慧 黄超群
甄 岩 魏世磊



华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程. 高中数学. 8, 算法初步/袁震东, 何红春主编. —上海: 华东师范大学出版社, 2007. 3
ISBN 978-7-5617-5283-8

I. 新... II. ①袁... ②何... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 039098 号

新专题教程 高中数学 8 · 算法初步

主 编 袁震东 何红春
策划组稿 教辅分社
项目编辑 徐红瑾
文字编辑 徐 金 倪 明
封面设计 黄惠敏
版式设计 蒋 克

出版发行 华东师范大学出版社
社 址 上海市中山北路 3663 号 邮编 200062
电话总机 021-62450163 转各部门 行政传真 021-62572105
客服电话 021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话 021-62869887
门市地址 上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网 址 www.ecnupress.com.cn

印 刷 者 江苏省句容市排印厂
开 本 787×960 16 开
印 张 9
字 数 164 千字
版 次 2009 年 4 月第二版
印 次 2009 年 4 月第一次
书 号 ISBN 978-7-5617-5283-8/G·3103
定 价 10.00 元

出 版 人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题, 请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系)

总 序

高中数学 8 · 算法初步

亲爱的读者,展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容,在“新教学理念、新教学方法”的指导下,按专题编写,涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学 5 个学科,共计 50 个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色,甫一面世,就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠,我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势,我们进行了多方调研,在此基础上,组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书,不仅知识点配套,而且题型新颖,更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威 编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验,是中、高考研究方面的专家,他们的指导更具权威性。

材料典型 丛书精选了近几年的中、高考试题,还收集了许多有代表性的例题,编写者对这些典型材料进行了详细的解读,还设置了有针对性的训练。总之,编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求,并对重点知识进行深入、细致的讲解,对难点用实例的方法进行释疑,使用这套丛书,能切实提高学生的学习效果。

总 序

高中数学 8 · 算法初步

版本通用 丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据,不受教材版本限制,按各学科知识内容编排,独立成册,不仅与教学要求相对应,更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性,具有很强的通用性。

编排科学 丛书在编排时照顾到了学生的差异性,读者可以根据自己学习中的薄弱环节,有重点地选择,有针对性地学习,以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理,帮助学生在学习知识的基础上,充分了解和掌握运用知识解决问题的方法,提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴,学习的好帮手,为您的学习带来诸多的便利,给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

与时俱进,数学也不例外.这不,一个全新的数学内容——算法,在 21 世纪初,就大踏步地进入中学数学,成为高中生必修课程的一部分.与中学里的微积分几进几出相比,算法进中学要顺利得多.原因何在?信息时代的要求使然.

计算机技术之神通广大,说到底无非是它能够按人的指令“任劳任怨”地进行计算.因此,人们首先要弄清楚哪些任务计算机能够完成,哪些则不能.对于基础教育中的数学课程来说,那就要让学生知道一些初步的常识,判断某些简单的任务究竟能不能算、如何算,以及怎样算得精确和快速.算法思想,成了现代公民必须具备的一种素质.

算法,我们其实并不陌生.从小学开始,先乘除后加减,是最起码的算法之一.小数、分数计算,以及求最小公倍数等等,都有一定的计算程序和步骤.至于求方程的精确解,其实就是实现某种算法的过程.对于没有公式解的方程,则可以运用合理的算法近似地求出其数值解.当然,算法只是数学的一部分,即并非所有的数学结果都能够算.例如任何 N 次的一元代数方程必有 N 个复根的代数基本定理,就是一个纯粹的“存在性”定理,无法用算法来实现.

算法是中国数学的特征.中国古代数学以建立算法体系见长.《九章算术》的问题,都是可以计算的.中国的珠算口诀更是十分有效的算法.到了现代,吴文俊先生创造性地设计了一种算法,国际上称之为“吴方法”,使得大量的数学定理

序 言

高中数学 8 · 算法初步

可以用计算机加以证明,因而获得了国家最高科学奖,以及百万美元的 2006 年度邵逸夫科学奖. 总之,继承中国数学的“算法”传统,是当代中国数学教育界的一项义不容辞的任务.

人类积累的数学知识越来越多,但是学校的学时数是有限的. 我们不得不精中求简,返璞归真,把以前熟知的数学内容以现代的观点审视和改造. 因有限的学时不得不削减一些相对次要的内容,与此同时增加一些新的更重要的内容,如算法. 新陈代谢,是课程改革不可抗拒的法则.

上海是东西方文化交流的前沿,又处于我国改革开放的龙头地位. 1980 年代末开始的第一期上海数学课程改革,曾经领先于全国,做出了合乎时代潮流的选择. 进入 21 世纪之后,新的课程改革任务再一次摆在我们面前. 让我们继续努力,为创建具有中国特色的数学教育做出应有的贡献. 袁震东、何红春等老师的这本小册子,是一本少而精、适合数学老师阅读进修或作高年级选修读本的作品. 可以想见,该书对于“算法”进入数学课堂,定当有所裨益. 阅读有感,因为之序.

张奠宙

华东师范大学数学教育研究所

2007 年初春

中国科学院院士吴文俊先生说,中国古代数学以算法见长.中国古代的数学著作《九章算术》总结了秦汉以前的数学成就.《九章算术》在算术方面包括分数的四则运算以及约分、通分的运算法则、比例算法等,在“约分术”中给出了求分子、分母最大公约数的“更相减损”法(与欧几里得的辗转相除法一致);在代数方面包括方程术、正负术和开方术等;在几何方面包括直线形面积、体积的算法等.从《九章算术》的全书来看,与欧几里得的《几何原本》中将代数问题几何化的做法相反,《九章算术》将几何问题算术化、代数化,充分体现了中国古代数学与古希腊数学不同的特征.从算法本身来看,算法涉及到步骤间严密的逻辑关系.只有计算步骤间具有正确的逻辑关系和输入、输出正确表述时,才能在计算机上顺利地运行.这与数学具有严密的逻辑性一致.

数学中的算法应该与信息技术中的算法语言有所不同,也就是说数学中的算法是计算方法所说的算法,而不只是算法语言中的词条和句法.在这本《算法初步》中主要介绍算法步骤、算法的程序框图、算法误差的概念、计算时间和算法的结构知识和应用情况,而不是介绍算法语言中词汇的含义,语句的结构和编程技巧等.

算法思想是一种重要的数学思想,它是一种把几何问题代数化、连续问题离散化的思想,对于世界数学的发展有着重要的贡献.从数学的计算和应用来看,人们可以推导出一元一次方程、二次方程、三次方程的求根公式,这种方法称为解析法.但如果遇到高次方程,如一元七次方程,那么用解析法就比较困难.如果学习了算法,就会想到用数值方法来求

前 言

高中数学 8 · 算法初步

它的实数解. 现在在科学、工程等广泛的领域中使用算法解决了大量过去无法解决的难题. 例如石油勘探中的数据处理, 已成为找油层的常用方法. 如药物筛选、天气预报以及各种电子设备中也常常使用算法(软件)等等. 算法应用的例子简直是不胜枚举.

在电子计算机已进入到生活各个领域的今天, 算法已成为数学文化的重要组成部分之一, 算法思想已成为现代人应具备的一种数学素养. “算法初步”的教和学应结合具体数学实例来进行, 体验程序框图在解决问题中的作用. 要求学生在模仿书中例题、操作计算机和自己探索的过程中, 体验设计程序框图在解决问题中的作用, 体会算法思想在解决问题中的重要性和程序框图的有效性. 要求学生通过学习能画出解决简单数学问题的程序框图.

书后附有各章习题的解答和 Matlab 7.0、Scilab 4.0 算法语言的简介, 供教师和有兴趣的学生自学用. Matlab 7.0 算法语言应该在探索解决问题和操作计算机的过程中学习, 死记硬背对算法学习是没有多少帮助的.

应该如何进行中学算法教学是一个值得研究和试验的课题. 我们结合中学生实际情况和对于算法的理解出版这本与国内已有中学算法教材体系不同的教程是一种尝试. 欢迎广大读者批评指正.

编 者

2007年1月

前 言

CONTENTS

目 录

高中
数学
8
·
算法
初
步

第1章 什么是算法	1
1.1 算法概念	1
1.2 中国古代算法简介	1
1.3 计算机与算法	3
1.4 算法的描述与约定	5
1.5 数学解题观念的转变	9
第2章 排序算法	12
2.1 求数组中的最大数和最小数	12
2.2 交换排序法	14
2.3 选择排序法	16
2.4 冒泡排序法	18
第3章 计算量的数量级与算法效率	21
3.1 函数的增长性与计算量的数量级	21
3.2 算法的时间有效性	25
第4章 数值计算	29
4.1 计算误差	29
4.2 有效数字	32
4.3 不规则图形面积的近似计算	33
第5章 随机模拟算法简介	39

CONTENTS

目 录

高
中
数
学
8
·
算
法
初
步

第6章 贪婪思想与最小生成树	46
6.1 贪婪思想	47
6.2 最小生成树	48
第7章 混沌分形与迭代算法	51
7.1 迭代算法	51
7.2 混沌与有序	55
7.3 分形几何	62
第8章 计算机证明几何问题	65
* 第9章 重要的算法思想和方法——递归方法与分治思想	70
9.1 递归方法	70
9.2 分治思想	72
习题解答	77
附录1 Matlab 7.0 简介	94
附录2 部分章节例题的 Matlab 语言参考程序	106
附录3 Scilab 4.0 简介	121

什么是算法

1.1 算法概念

“算法”并不是一个陌生的词汇,实际上从小学开始大家就接触算法了.例如:四则运算,必须按照规则(先计算括号内再计算括号外;先乘除后加减)进行运算,这实际上是求四则运算问题的一种算法.

我们再看一个稍微复杂点的例子:判断正整数 $n(n \geq 3)$ 是否为一个素数?

利用反证法思想导出判断正整数是否为素数的计算方法:设 n 是合数,即 $n = p \cdot q$,不妨设 $2 \leq p \leq q$ 且 $p, q \in \mathbf{N}$,那么 $n = p \cdot q \geq p^2 \Rightarrow p \leq \sqrt{n}$,合数 n 至少含有一个不超过 \sqrt{n} 的因数 p .所以,如果所有不超过 \sqrt{n} 的正整数 $p(p \geq 2)$ 都不是 n 的因数,则 n 是素数.因此,判断正整数 $n(n \geq 3)$ 是否是一个素数的算法如下:

第一步:已知正整数 $n(n \geq 3)$;

第二步:依次判断 $p = 2, 3, \dots, [\sqrt{n}]$ (表示不超过 \sqrt{n} 的最大正整数)是否为 n 的因数;

第三步:如果上述 p 都不是 n 的因数,则 n 是素数;否则 n 是合数.

这是判断正整数 $n(n \geq 3)$ 是否为一个素数的一种算法.

从上面两个例子可以看出,算法就是根据某种运算法则,解决一个问题的所有步骤,按照这种有序的步骤一定可以得到问题的结果(有解时给出问题的解,无解时给出无解的结论).

1.2 中国古代算法简介

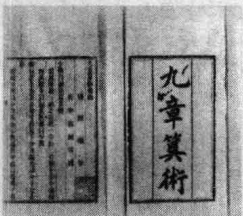
古代算法的概念源于算术.算术是由已知条件推知结果的运算方法,而算法一般是指对解决一类问题的方法和步骤的陈

命题:如果所有不超过 \sqrt{n} 的正整数 $p(p \geq 2)$ 都不是 n 的因数,则 n 是素数.

反证法:如果 n 是合数,则合数 n 至少含有一个不超过 \sqrt{n} 的因数,这与已知条件矛盾,所以命题成立.

算法的一些特点:

- (1) 算法具有明确的求解目的性.
- (2) 算法的求解过程是可操作的.
- (3) 算法步骤是有序的,而且在有限步骤内完成任务.



宋刻本的《九章算术》



刘 徽

刘徽 中国古代最杰出的数学家之一, 中国古典数学理论的奠基者。其杰作《九章算术注》和《海岛算经》是我国最宝贵的数学遗产之一。刘徽既提倡推理又主张直观, 通过“析理以辞、解体用图”, 注重客观世界的“度量”(数)和“规矩”(形)的统一。其割圆术思想是现代入经常引用的伟大成果之一, 在求圆面积公式中提出的“割之弥细, 所失弥少, 割之又割以至于不可割, 则与圆合体而无所失矣”, 这可视为中国古代极限观念的佳作。

述, 算法思想是一种程序化(机械化)、构造化的解题思想。

中国古代数学就是以算法为主要特征的。据史记载, 最迟至春秋战国时代, 中国古人就开始用算筹进行计算。筹算就是将算筹(棍)置于盘中进行计算的工具, 如图 1-1。筹算可以说是数学机械化的最早形式。筹算的各种算法都要求设计出一定的程式并按此程式逐步地变动算筹, 因而设计时需按图式体系进行思考和安排, 这与当今计算机的程序设计需借助框图来思考是相似的, 筹算的整个演算过程犹如计算机执行程序, 所以筹算和用计算机解决问题都具有将数学问题模式化和将计算方法程序化的特征。

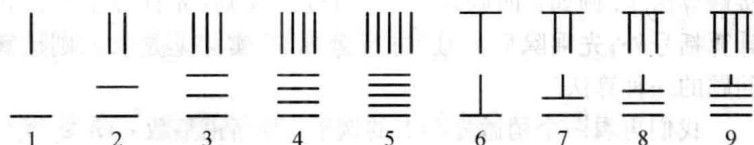


图 1-1 算筹

中国古代数学的算法内容相当丰富, 其代表是东汉初年(公元一世纪)的《九章算术》和三国时期吴国人刘徽所著的《九章算术注》, 其重要特点就是问题解决的算法化。书中一般先给出一类问题, 并给出答案, 再给出“术”(算法)作为这类问题的共同解法。《九章算术》中给出了 246 个问题及其答案, 202 个“术”, 内容涉及四则运算、约分数、开平方和开立方、线性方程组解法、正负数运算的加减法则、勾股形解法、割圆术等著名算法和一大批的数学成果。《九章算术》和《九章算术注》较完整地体现了中国古代数学思想及其特点, 对于后世数学研究的内容和理论形式有重要影响。在随后的 11~14 世纪约三百年间, 算法得到了进一步的强化和发展, 如贾宪的《黄帝九章算法细草》、刘益的《议古根源》、秦九韶的《数书九章》、李治的《测圆海镜》和《益古演段》、杨辉的《详解九章算术》、《日用算法》和《杨辉算法》、朱世杰的《四元玉鉴》等, 特别是从 13 世纪到 14 世纪初这段时期达到了中国古代同时也是世界中世纪数学发展的最高峰。

《九章算术》及刘徽的注解开创了中国传统数学机械化、构造化的算法模式, 与古希腊以《几何原本》为代表的逻辑演绎和公理化体系异其旨趣, 在数学发展的进程中争雄媲美, 交相辉映。《九章算术》与《几何原本》这两本不朽的传世名著是现代数学思想的两大主要源泉。时至今日, 中国古代算法思想对现代数

学的发展亦影响深远,如我国的吴文俊院士从研究中国古算受到启发,并结合现代计算机技术,研究出世界领先的“机器证明”的“吴方法”。

1.3 计算机与算法

1.3.1 计算机的出现改变了算法的地位

现在使用的大多数计算机,其基本工作原理是存储程序和程序控制,如图 1-2,它是由被称为“电子计算机之父”的世界著名美籍匈牙利数学家冯·诺依曼(J. von Neumann, 1903~1957)提出的。其特点是:(1) 数据和指令都采用二进制表示;(2) 建立了存储程序,指令和数据一起存放在存储器里,并作同样处理。

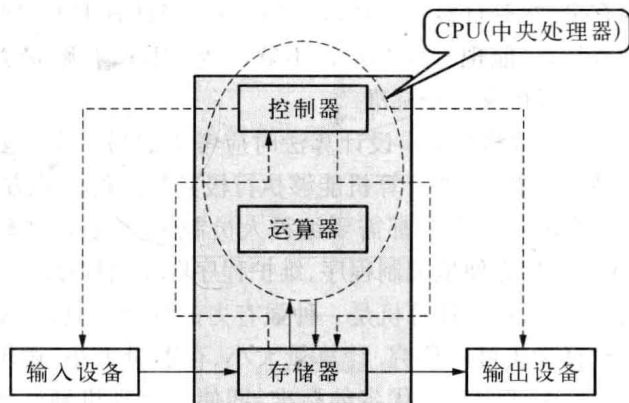


图 1-2

计算机的出现和飞速发展使算法有了很大的发展,计算机无可比拟的运算速度和惊人的存储量使许多用其他计算工具无法完成的复杂计算和事务处理成为可能,计算机的发明将人的抽象思维能力拓展到自身以外。每天我们使用电子表格、字处理器、网页浏览器等程序来完成各种各样的任务,表面看来,计算机做的事情非常简单,但那只是表面现象。计算机可以做的所有事情只是非常快速地操作由 0 和 1 组成的数字程序。算法就是将人类的思维转化为计算机可以执行的程序,让若干微小的电子元件代替人类进行思考与计算。其具体过程是先将解决问题的一系列步骤写成算法,表示成程序框图,再翻译成某种程序语言在计算机上实现,这样就得到了我们每天操作的应用程序,和呈现在眼前的由计算机完成的各种各样的任务。没有算法,计算机

图 1-2 中控制器用于控制和协调计算机的所有操作,包括控制对存储器的存取,控制程序中指令的执行,向外部设备发送信号等功能;

运算器负责对数据进行算术运算和逻辑运算;

主存储器(内存)用来存放当前要运行的程序和数据,辅助存储器(外存),用来保存暂不执行的大量程序和数据,需要时再将它们读取到计算机中;

输入设备用来将外界的各种信息,转换为计算机能够接受的二进制数码送入存储器;

输出设备用于将信息处理后的结果以人们能够识别的形式(数字、符号、图像、声音等)输出。



冯·诺依曼

冯·诺依曼 著名数学家、物理学家、经济学家,20世纪最伟大的数学家之一。其在遍历理论、拓扑群理论等方面做出了开创性的工作,算子代数被命名为“冯·诺依曼代数”;30年代撰写的《量子力学的数学基础》对原子物理学的发展作出了极其重要的贡献;在经济领域建立了经济增长模型体系,特别是40年代出版的著作《博弈论和经济行为》,在经济学和决策科学领域竖起了一块丰碑。第一台冯·诺依曼结构计算机 EDVAD 于1949年问世。

高德纳 世界顶级计算机科学家之一,1974年美国计算机协会图灵奖获得者,编写的巨著《计算机程序设计艺术》一书(还未写完,已出版三卷)与牛顿的《自然哲学的数学原理》等一起被评为“世界历史上最伟大的十种科学著作”之一,同时也是著名的科学排版系统 Tex 的作者。

的存在也就失去了意义。有人说微积分造就现代科学,而算法造就现代世界。计算机科学大师高德纳(Donald E. Knuth 1938~)说:“计算机科学无非是算法的科学。”

然而,有时即使找到了解决问题的算法,但未必能在计算机上派得上用场。许多事实证明,如果算法选择不当,计算机的效率就得不到充分发挥,有时甚至得不到满意的解答。一个能够应用的算法,要求有以下几个优点:

(1) 计算量小 比如说有计算量是 $n!$ 的算法,当 $n = 20$ 时,采用每秒运算一亿次的计算机,要连续计算三十万年才能完成。这样的算法显然是没有实际意义的。因此,计算量大小是衡量算法优劣的一个重要标准,我们将在第3章对此作专门论述。

(2) 存贮量小 计算程序所占用的工作单元的数量称为算法的内存量。尽管计算机能贮存大量信息,但计算大型问题时若不仔细规划,可能现有内存量仍不够使用。因此,存贮量大小是衡量算法质量的又一个标准。

(3) 逻辑结构简单 设计算法时应考虑的另一个重要因素是逻辑结构问题。虽然计算机能够执行极其复杂的计算方案,但是计算方案的每个细节都需要编程人员制定。算法的逻辑结构简单,才能比较方便地编程序、维护程序和使用程序。

由此可见,虽然计算机是一种强有力的计算工具,但不能因此忽略对算法质量的研究。计算量大小、存贮量大小、逻辑结构是否简单作为评定算法优劣的标准,即使在计算机硬件飞速发展的今天一样有着重要意义。现在,某些应用领域每时每刻都需要处理几百几千亿甚至呈几何级数不断增长的数据量,程序规模也越来越庞大。一个残酷的现实是硬件的发展似乎总也无法满足新应用的增长需要,无论硬件发展速度多么惊人,总会有新的应用将 CPU、内存、硬盘或带宽资源消耗得一干二净。所以寻找高效低资源的算法是计算科学的重要目标。

1.3.2 算法分类

算法一般可分为数值计算与非数值计算两大类。数值计算算法主要以算术运算来进行的;而非数值计算算法,主要通过计算机赋值、比较或者逻辑运算等操作解决问题。算法主要解决如下一些问题:数值计算、系统管理、系统仿真、系统检测与控制等。在数值计算方面除金融系统计算外,在科学计算中有排序、

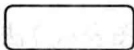

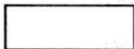

1.4 算法的描述与约定

1.4.1 算法的表示

算法一般由顺序结构、条件结构和循环结构三种基本结构组成,这三种基本结构可以组成结构复杂的算法.程序框图是描述算法的常用工具,它规定了一组图形来表示算法过程.运用程序框图表示算法可以不依赖于任何具体的计算机和计算机程序语言,从而有利于在不同环境下实现.

程序框图的基本组件如表 1-1 所示.

表 1-1

基本组件	组件说明	基本组件	组件说明
	算法的入口和出口		条 件
	加工、处理		控制流

(1) 顺序结构(图 1-3).

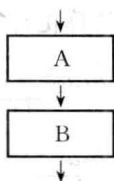


图 1-3

(2) 选择结构(图 1-4).

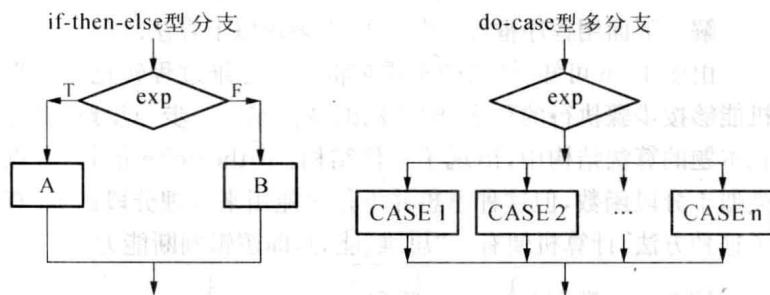


图 1-4

熟悉图形约定和算法的三种基本结构是画好程序框图的基础。

(3) 循环结构(图 1-5).

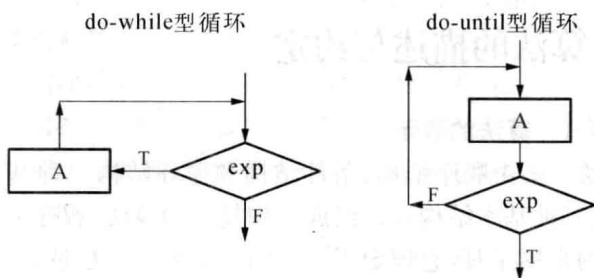


图 1-5

绝大多数算法一般只关心对数据的操作. 其实如何组织好数据在算法设计和分析中是至关重要的, 对于高效率的算法尤其如此.

本书中的算法以程序框图或算法步骤形式描述, 同时对某些算法提供 Matlab 程序, 供大家参考. 在框图中“T”表示“True”代表“是”, “F”表示“False”代表“否”, 以后的框图中都这样表示.

1.4.2 算法举例

下面举一些简单的例子来说明如何运用程序框图表示算法.

例 1 求解二元一次方程组
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

分析 这个方程组的行列式解法可表述如下:

首先判别 $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ 是否为零, 存在两种可能:

(1) 如果 $D \neq 0$, 则令计算机计算:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{D}, \\ x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{D}, \end{cases}$$

然后输出计算结果 x_1, x_2 ;

(2) 如果 $D = 0$, 则方程组无解, 或有无穷多组解.

解 下面用程序框图(图 1-6)来表示以上算法.

由图 1-6 可知, 算法的实质是将人的思维过程转化为计算机能够按步骤执行的程序, 即算法的特点是: 一步一步地实现. 在本题的算法结构中, 出现了条件结构: if-then-else 语句, 有点类似于分段函数, 但这种思想并不是只能用来处理分段函数. 有了这种方法, 计算机便有了“思维”能力, 即逻辑判断能力.

例 2 求数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 前 n 项和: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.