



中国科学技术
经·典·文·库

数论的方法

闵嗣鹤 著

中国科学技术经典文库·数学卷

数论的方法

闵嗣鹤 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是闵嗣鹤编著的《数论的方法》上册(1958年第一版)、下册(1981年第一版)的合订本. 全书分三篇. 第一篇介绍数论中几种重要的初等方法, 包括Шнирельман的密率论及由此发展而成的渐近密率与本性分量的理论, Brun的筛法与更精密的Selberg筛法, 素数定理的初等证明与弱型Goldbach问题的初等解法等; 第二篇介绍解析数论的一些基本理论与方法, 包括关于黎曼 ζ 函数与狄氏 L 函数的一些基本理论及应用这些理论来研究自然数串中或一般算术级数中的素数分布的方法等; 第三篇系统地论述了三角和方法, 包括有理型三角和、素变数三角和及二维三角和方法等. 三角和方法是数论中最重要的方法之一. 作者以较少的篇幅, 阐明了三角和方法的基本内容, 并且给出了在哥德巴赫问题、除数问题等方面的应用.

本书适合高等院校数学系大学生、研究生、教师阅读, 可作为大学数学和物理专业的教学参考书, 也可供相关的数学工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

数论的方法/闵嗣鹤著. —北京: 科学出版社, 2011
(中国科学技术经典文库·数学卷)
ISBN 978-7-03-030247-2

I. ①数… II. ①闵… III. ①数论方法 IV. ①O156

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第021750号

责任编辑: 张鸿林 杜小杨 陈玉琢/责任校对: 林青梅

责任印制: 钱玉芬/封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

双青印刷厂印刷

科学出版社编务公司排版制作

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

1958年7月第一版 开本: B5 (720 × 1000)

2011年3月第四次印刷 印张: 22 1/4

字数: 433 000

定价: 88.00元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

在1955—1957年,作者曾两度于北京大学数学力学系讲授数论专门化的课程,这本书的内容就是根据当时的讲义加以补充整理而写成的.本来讲义包含三部分,即初等的方法、解析的方法与三角和的方法三篇.由于第三部分还需要更彻底的改写与补充,一时还没能够整理到比较令人满意的地步,所以先把前两部分整理出来,写成这一本书.

这本书的目的与作用和原来的讲义是一样的,那就是使得仅仅具有数论初步知识的读者(例如读过裘光明所译 Виноградов 的《数论基础》)藉着本书逐渐提高水平,使在不长的时间内能够阅读近代数论在若干方面的文献,以至独立地或在适当辅导下进行科学研究.因此,本书的性质仍然是一种阶梯或导引,并不能也不想对数论的各个分支都作深入与全面的讨论.至于材料的选择当然一方面不免受到个人研究范围的影响,另一方面也考虑到不要与已有写得很好的书有不必要的重复.

在写这本书时,作者参考了不少的数论名著(华罗庚先生著的《数论导引》附有很好的一个参考书目).通过了实际教学,已经把不少的材料融化成为自己的形式.但由于时间关系,即在本书中,仍有不少的材料未能如意予以改写.在作者讲课与改写的时候,两届数论专门化的学生曾给我很大的帮助.其中尹文霖同志参与写了 Шнирельман 的密率论及渐近密率与本性分量二章,这里面也包括他的毕业论文中的一个结果.潘承洞同志参与写了 Selberg 的筛法及算术级数中的素数分布二章,他在讨论班上的报告也给我以写稿的便利.他们在写稿时都曾参考中国科学院数学研究所的一份讲义,特在此致谢.此外,还有不少同志对于旧讲义或做过文辞的润色或给以式子的更正或改正印刷的错误.这一切都给我很大的便利,衷心在此致谢.

闵嗣鹤

1957年10月

符号说明

本书中除用到一般初等数论所常用的符号以外,还时常用到集论中的符号.如 $a \in A$ 表 a 属于 A , $a \notin A$ 表 a 不属于 A , $A \subset B$ 表 A 是 B 的部分集合(可以是 B 本身), $A \cup B$ 表 A 与 B 的联合, $A \cap B$ 表 A 与 B 的交界等.其他比较特殊的符号,都在用到时给以定义.

目 录

符号说明

上 册

第一篇 初等的方法

第一章 ШНИРЕЛЬМАН 的密率论	3
§1. 堆垒数论的问题	3
§2. 密率的引进	4
§3. Landau-Шнирельман 的假说及其证明	7
§4. 基本引理的证明	9
第二章 Brun 的筛法	13
§1. 引论	13
§2. 一个代数递推公式	14
§3. 筛数 k_j 的引进	17
§4. 主要项 E 的结构	19
§5. 筛数的决定与 E 及 R 的估计	21
§6. 用筛法所得的结果	25
§7. Brun 筛法的几个应用	26
第三章 素数定理的初等证明	30
§1. 引论	30
§2. 若干简单结果	31
§3. Selberg 不等式	34
§4. Selberg 不等式的推论	37
§5. 几个一般性的定理	41
§6. 素数定理	44
第四章 Selberg 的筛法	47
§1. Selberg 筛法的引进	47
§2. Selberg 定理	49
§3. Selberg 筛法的应用之一: 算术级数中的素数分布	54

§4. Selberg 筛法的应用之二: 表充分大偶数成两个素数之和	58
第五章 渐近密率与本性分量	67
§1. 渐近密率	67
§2. 本性分量	79
§3. 表充分大的整数为素数和	84

第二篇 解析的方法

第六章 狄氏级数	92
§1. 引论	92
§2. 收敛半面与绝对收敛半面	93
§3. 狄氏级数所表示函数的阶	97
§4. Perron 公式	98
§5. 均值公式	103
§6. 黎曼 ζ 函数及与之有关的狄氏级数	104
第七章 黎曼 ζ 函数的解析性质及其函数方程	111
§1. 解析开拓	111
§2. 黎曼 ζ 函数的函数方程	114
附录§1. Γ 函数的一些性质	117
附录§2. Poisson 求和公式	122
第八章 素数定理的改进	125
§1. 引论	125
§2. 问题的转移(一)	126
§3. 几个关于解析函数的定理	129
§4. 问题的转移(二)	132
§5. 黎曼 ζ 函数的零点	136
§6. 问题的转移(三)	142
第九章 算术级数中的素数分布	147
§1. 引论	147
§2. L 函数的零点分布(一)	149
§3. L 函数的零点分布(二)	158
§4. 主要定理的证明	168

下 册

第三篇 三角和的方法

第十章 三角和在数论中的作用	175
§1. 格点与三角和	175
§2. 同余式的解数与三角和	176
§3. 丢番图方程的解数与三角和	177
第十一章 有理型三角和	179
§1. 有理型三角和的平均值	179
§2. Mordell 的结果	181
§3. Mordell 结果的 n 维推广	183
§4. 华罗庚的结果及其改进	191
第十二章 Van der Corput 的方法	201
§1. 三角积分	201
§2. 三角和的反转公式	206
§3. 黎曼 ζ 函数的渐近公式	216
§4. 黎曼 ζ 函数的阶的初步估计	219
§5. Van der Corput 方法的两个步骤	223
§6. $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ 的阶的进一步估计	232
附录 Phragmén-Lindelöf 定理	238
第十三章 除数问题	241
§1. 一般除数问题的初步结果	241
§2. 略进一步的结果	244
§3. 对于 $\Delta_2(x)$ 的进一步估计	247
第十四章 二维的方法	257
§1. 二重三角积分	257
§2. 关于二重三角和的不等式	268
§3. Titchmarsh 关于 $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ 的估计	272
§4. 二重三角和的另一种估计方法	281
第十五章 Goldbach-Виноградов 定理	289
§1. 引论	289
§2. 证明的主要步骤	289

§3. 基本区间上的积分	291
§4. 余区间上的积分	297
§5. $r(n)$ 的渐近公式	307
第十六章 Виноградов 的中值公式与三角和的估计	310
§1. 引论	310
§2. 一个丢番图方程组	312
§3. 一个递推公式	318
§4. 中值公式	326
§5. 三角和的估计	327
附录 Виноградов 的中值公式	336
跋	343

上 册

第一篇 初等的方法

第一章 Шнирельман 的密率论

§1. 堆垒数论的问题

Waring 问题与 Goldbach 问题是堆垒数论中有代表性的两个著名问题, Waring 问题所要讨论的是: 是不是能找到一个只与 n 有关的常数 C_n , 使当 $k > C_n$ 时, 每一个正整数都可以表成 k 个非负整数的 n 次方幂之和. Goldbach 问题所要讨论的是: (1) 是不是每一个大于 4 的偶数都能表成两个奇素数之和, (2) 是不是每一个大于 7 的奇数都能表成三个奇素数之和. 由于 Goldbach 问题的解决是非常难的, 我们退一步讨论一个比较容易的问题(弱型 Goldbach 问题): 是不是每一个自然数都可以表成不超过一定个数的素数之和. Waring 问题和弱型 Goldbach 问题都包含在下列更带一般性的问题之中.

设有 k 个递增的整数序列所组成的集合:

$$\begin{aligned} (A^{(1)}) \quad 0 &= a_0^{(1)} \quad a_1^{(1)} \cdots, \quad a_n^{(1)}, \cdots \\ (A^{(2)}) \quad 0 &= a_0^{(2)} \quad a_1^{(2)} \cdots, \quad a_n^{(2)}, \cdots \\ &\vdots \\ &\quad (a_v^{(k)} < a_{v+1}^{(k)}) \\ (A^{(k)}) \quad 0 &= a_0^{(k)} \quad a_1^{(k)} \cdots, \quad a_n^{(k)}, \cdots \end{aligned} \quad (1.1)$$

我们要问是不是每一个非负整数 n 都可以表成下列形式:

$$n = a_{n_1}^{(1)} + a_{n_2}^{(2)} + \cdots + a_{n_k}^{(k)}. \quad (1.2)$$

在这里, 我们最好引进集合 $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$ 的和的概念. 我们把所有能表成 (1.2) 的形式的非负整数所组成的集合称为 $A^{(1)}, \dots, A^{(k)}$ 的 Шнирельман 和, 或简称它们的和, 记作

$$A = A^{(1)} + \cdots + A^{(k)} = \sum_{i=1}^k A^{(i)}. \quad (1.3)$$

有了以上的定义, 我们的一般性问题就可以叙述为: 是不是 k 个集合(1.1)的和(1.3)包含全体自然数. 在本书里面, 以后所谓集合都指非负整数的集合.

§2. 密率的引进

为了研究上述一般性的问题, 首先 Л. Г. Шнирельман 引进了密率的概念. 考虑任何一个集合:

$$(A) \quad 0 = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \quad (a_n < a_{n+1}, a_n \text{ 是整数}).$$

用 $A(n)$ 代表 A 中不超过 $n(n > 1)$ 的正整数的个数(注意 0 不计算在内), 即

$$A(n) = \sum_{\substack{1 \leq \nu < n \\ \nu \in A}} 1,$$

则 $0 \leq A(n) \leq n$ 而

$$0 \leq \frac{A(n)}{n} \leq 1.$$

我们定义 $\frac{A(n)}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 的下确界为 A 的密率, 记作 $d(A)$, 即

$$d(A) = \inf_{n \geq 1} \frac{A(n)}{n}. \quad (2.1)$$

从这个定义立刻可以推出以下的一些简单结果:

1. 当 $a_1 > 1$ (即 A 不包含 1) 时, $d(A) = 0$,
2. 当 $a_n = 1 + r(n-1)$ [即 A 从 a_1 起是以 1 为首项, r 为公差的等差级数] 时,

$$d(A) = \frac{1}{r}.$$

3. 每一个等比级数所成集合的密率是 0.
4. 所有完全平方所组成集合的密率是 0.
5. 若 $d(A) = 0$, 而 A 包含 1, 则任给 $\varepsilon > 0$ 一定可找到 $N > 1$ 使得

$$A(N) < \varepsilon N.$$

6. 集合 A 包含自然数全体的充要条件是 $d(A) = 1$.

从以上最后一条性质看来, 我们就知道上节最后所提出的问题, 就是要问 k 个集合之和 A 的密率 $d(A)$ 是不是 1. 因此, 下面的定理有着重要的意义:

定理 2.1(Шнирельман) 设 A, B 是两个集合, 则

$$d(A+B) \geq d(A) + d(B) - d(A)d(B). \quad (2.2)$$

证 设 $A+B=C$, 而

$$A(n) = \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n \\ \nu \in A}} 1, B(n) = \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n \\ \nu \in B}} 1, C(n) = \sum_{\substack{1 \leq \nu \leq n \\ \nu \in C}} 1$$

及

$$d(A) = \alpha, d(B) = \beta, d(C) = \gamma.$$

在自然数的一段 $(1, n)$ 中含有 A 内的 $A(n)$ 个整数. 设用 a_k 及 a_{k+1} 表其中大小最近的两个数, 则在这两数之间有 $a_{k+1} - a_k - 1 = l$ 个数不属于 A , 它们是

$$a_k + 1, a_k + 2, \dots, a_k + l = a_{k+1} - 1.$$

以上各数中间凡可以写成 $a_k + \gamma (\gamma \in B)$ 这种形式的数都是属于 C 的, 它们的个数等于 B 在 $(1, l)$ 一段中所包含整数的个数, 这当然就是 $B(l)$.

因此, 在 A 的每相邻两数之间, 如果所包含的一段自然数的长度(即个数)是 l , 就至少有 $B(l)$ 个数属于 C . 因此在自然数的一段 $(1, n)$ 中, C 所包含整数的个数 $C(n)$ 至少是

$$A(n) + \sum B(l),$$

上式中 $\sum$ 的各项通过 $(1, n)$ 中不含 A 内整数的一段一段的自然数. 但根据密率的定义, $B(l) \geq \beta l$, 故

$$C(n) \geq A(n) + \beta \sum l = A(n) + \beta \{n - A(n)\}.$$

上面最后一个等式的成立是由于 $\sum l$ 等于 $(1, n)$ 中不落在 A 内的整数的个数, 当然它等于 $n - A(n)$. 又 $A(n) \geq \alpha n$, 故

$$C(n) \geq A(n)(1 - \beta) + \beta n \geq \alpha n(1 - \beta) + \beta n.$$

由此立刻得到

$$\frac{C(n)}{n} \geq \alpha + \beta - \alpha\beta.$$

上式对于所有正整数 n 都成立, 故

$$\gamma = d(C) \geq \alpha + \beta - \alpha\beta. \quad [\text{证完}]$$

上面的不等式又可以写成

$$1 - d(A+B) \leq \{1 - d(A)\}\{1 - d(B)\}.$$

用归纳法即可推广成

$$1 - d(A_1 + \cdots + A_k) \leq \prod_{i=1}^k \{1 - d(A_i)\}.$$

故得下面的

推论

$$d(A_1 + \cdots + A_k) \geq 1 - \prod_{i=1}^k \{1 - d(A_i)\}.$$

从 Шнирельман 的不等式, 可以推出一系列值得称道的结果, 其中居首要地位的是下面的定理 2.2. 在叙述这个定理之前, 我们先引进一个定义并证明一个引理.

定义 如果一个集合 A 本身与本身相加至一定次数 k 时就包含自然数全体, 则称 A 是自然数的一个基.

引理 2.1 若 $A(n) + B(n) > n - 1$, 则 $n \in A + B$.

证 若 n 在 A 或 B 中, 引理显然成立. 设 n 既不在 A 中又不在 B 中, 于是

$$A(n) = A(n-1), \quad B(n) = B(n-1)$$

而

$$A(n-1) + B(n-1) > n - 1.$$

设在 $(1, n-1)$ 一段内, A 与 B 所包含的数分别为

$$a_1, a_2, \cdots, a_r,$$

$$b_1, b_2, \cdots, b_s.$$

则 $r = A(n-1), s = B(n-1)$ 而

$$a_1, a_2, \cdots, a_r,$$

$$n - b_1, n - b_2, \cdots, n - b_s$$

都在 $(1, n-1)$ 一段内, 它们的总个数是 $r + s = A(n-1) + B(n-1) > n - 1$, 所以其中至少有两个相等, 设为 $a_i = n - b_k$, 则 $n = a_i + b_k$, 故 n 在 $A + B$ 中.

从上面的引理很容易推出下面的

推理 若 $C = A + B$ 而 $d(A) + d(B) \geq 1$, 则 $d(C) = 1$.

定理 2.2(Шнирельман) 每一个密率是正的集合都是自然数的基.

证 设 $d(A) = \alpha > 0$, 而

$$A_k = A + A + \cdots + A \text{ (共 } k \text{ 项)},$$

则由定理 2.1 的推论,

$$d(A_k) \geq 1 - (1 - \alpha)^k.$$

显然当 k 充分大时,

$$d(A_k) > \frac{1}{2}.$$

故

$$A_k(n) > \frac{1}{2}n > \frac{1}{2}(n-1),$$

即

$$A_k(n) + A_k(n) > n - 1.$$

由引理 2.1, $n \in A_k + A_k = A_{2k}$. 但 n 是任意自然数, 故定理成立.

从这个简单的定理出发 Шнирельман 得出了一系列有趣的定理. 例如, 他证明了由 0, 1 及一切素数组成的序列 P 是自然数的一个基(参看第二章第 7 节). 其实这个序列 P 的密率是 0, 但他却证明了 $P + P$ 的密率是正的, 因而推出了: 存在一个充分大的 k 使得每一个大于 1 的自然数都可以表成不超过 k 个素数之和.

§3. Landau-Шнирельман 的假说及其证明

所谓 Landau-Шнирельман 假说就是: 在显然必要的条件 $d(A) + d(B) \leq 1$ 之下, 可以用不等式

$$d(A + B) \geq d(A) + d(B) \tag{3.1}$$

代替前证的

$$d(A + B) \geq d(A) + d(B) - d(A)d(B).$$

从(3.1), 在 $\sum_{i=1}^k d(A_i) \leq 1$ 的条件下, 容易推出

$$d\left(\sum_{i=1}^k A_i\right) \geq \sum_{i=1}^k d(A_i). \tag{3.2}$$

上面的假说最初是通过具体的例子, 在 1931 年由 Шнирельман 和 Landau 想出来的, 看起来这个假说很简单其实很难证明. Хинчин 在 $d(A_1) = \cdots = d(A_k)$ 的

条件之下, 首先证明了这个假说的成立. 接着有不少的数学家企图证实这个假说, 但是都只得到部分的结果. 直到 1942 年才由 Mann 完全地证明了这个假说的成立. 在 1943 年 Artin 与 Scherk 给出了比较简单的证明. 1954 年 Kemperman 与 Scherk 给了新的更简单的证明, 并有所推广, 本章的陈述即以他们的论文为根据. 但为简单明确起见, 只涉及整数.

令 n 为任一固定整数, I 为小于或等于 n 的非负整数的集合, A, B, C 是 I 的子集. 定义

$$A \oplus B = (A + B) \cap I. \quad (3.3)$$

特别当 A (或 B) 只包含一个元素 d 时, 我们常把 $A \oplus B$ 写作 $d \oplus B$ (或 $A \oplus d$). 依照 Hadwiger, 我们又定义 $C \ominus A$ 为满足次述条件的元素 d 的集合, 即 $d \in I$ 且 $A \oplus d \subset C$. 这样, $C \ominus A$ 就是满足 $A + D \subset C$ 的 I 的最大子集 D . 显然有 (我们用 $\leftrightarrow$ 表示可以彼此互推)

$$A \oplus B \subset C \leftrightarrow B \subset C \ominus A. \quad (3.4)$$

现在叙述我们的基本引理如下:

基本引理 设 $A \oplus B \subset C, 0 \in A, 0 \in B, n \notin C$, 则一定有 $m \in I$ 存在, 具有下列性质

$$C(n) - C(n - m) \geq A(m) + B(m), \quad (3.5)$$

$$m = n \quad \text{或} \quad 0 < 2m < n, \quad (3.6)$$

$$n - m \in C \ominus A, \quad n - m \in C \ominus B. \quad (3.7)$$

摆在我们面前的有两件事, 第一是证明这个基本引理, 第二是从基本引理导出 inequality (3.1). 比较起来, 第二件容易得多, 因此我们先作第二件.

显然, 如果基本引理已建立. 则立即推得下面的命题:

对任意自然数 n , 存在一数 m ($1 \leq m \leq n$) 使得

$$C(n) - C(n - m) \geq (\alpha + \beta)m,$$

式中 α, β 分别表 A, B 的密度 $d(A)$ 及 $d(B)$. 换句话说, 从数列 $(1, n)$ 中可以截下一段 $(n - m + 1, n)$ [我们用 (a, b) 表数列 $a, a + 1, \dots, b$]. 使得在这一段中 C 的平均密度 (即 $\frac{C(n) - C(n - m)}{m}$) 至少是 $\alpha + \beta$.

上述命题成立是因为当 $n \in C$ 时