純粹史學

林大芽著

一九五二年三月出版

一九五二年三月初版

純粹史學一冊

定價一元五角

著作者：林大芽

印刷者：南洋印務有限公司

星洲源順街一及三號

電話：六九五三號

自序

這是一支新興的數學，但至今還是一個輪廓。當閱變時，心中早有朦朧的影象，談不上研究及計劃，經過了長期訓練以後，才選定數史的路線。

抗戰軍興，跑到桂林小住，才接觸了正確的思想，和偉大的法則，由是無舵亂轉的巨舟，始確定了方向，因又刷新舊作，一時頗受同情者的愛護，遂進入哲學時期。

環顧中外數史大家，迄今仍然徘徊于攷據及訓詁路上，始終不克另創一支數學。例如 Dickson, Floriam Cajori, Smith 以及李儼諸家，雖有長篇巨著，要不外作記賬式的敘述，對于歷史的理論卻未作純粹的探討，因此，作者更進一步，抱着羅素的宏願，和 R. Dedekind 的決心，從而採取了 D. Hilbert 的探原妙訣，由是歷史的精神骨骼氣魄，才逐漸接近了純粹的雛型。

工作雖未大成，而輪廓已具。由數史始而以數學終，小問題去，大問題來，今後將面臨不嚴密的欠邏輯的疵議了；這正是歷史上不可避免的屈曲途徑。文化工作者決不可畏懼錯誤，而放棄學習，更不可害怕諷刺，而推卸責任。

過去談理論者，對于實踐，未下苦工，由是一切科學上及數學上的解釋，雖然勉強換上寶貴微妙的新裝，但千篇一律，均坐了公式化的八股化的毛病。海內學者如翦伯贊呂振羽諸賢，雖知其弊，亦因缺乏數學訓練，仍然難奏膚功！本書針對此弊，務求于實踐中得理論，于事實中索原理，由是把煉成的一點一滴，再煉而為數學。

本書內容，計分七章十九節。第一章論數念系統，共五節，多屬于法則方面的研究。第二章僅一節，即以第一章為對象，作探討數學理論的嘗試。第三章共三節，即應用第二章所得的理論，滲進語文學，企圖以實踐工夫來糾正理論的缺點，一方面務使它

演成嚴正的歷史科學，另一方面更注意發掘或擴充抽象的數學理論。第四章分三節，即應用前兩章的結論，更廣泛的發展到人生觀裏面，務使人生觀變成科學，因此，對于反映問題，更揭露了其中的奇祕。第五章僅一節，係對于力學問題，作變換的研究，因此，發見了高等的物理觀念怎樣的由低級的意識一步一步的變換而來。第六章共三節，係把第五章的理論，引伸到文藝裏面，令人更明白了精神的產物，也不外是物質的反映 第七章分三節，確定數學的基本概念，次第建立原理及定理，雖不足觀，但已具規模了。

最後本書所展望的，便是更要學習，尤其是在第七章裏，未完成的工作極多，倘各地鴻儒，肯加教益，那知異日沒有發芽成蔭的機會呢？

一九四九年六月十八日林大芽序于馬來亞

目 錄

第一章　數史系統

近代一切學術的趨勢，都已天經地義的向着原理規律奔求了，祇惜還有許多人躲在攷據裏面，斤斤計較那支離破碎的古言古事！當初我對於這種通俗舉動，討厭極了，要想擺脫這個局面，解除這種困苦，因此，留心數學，參酌專史，對於哲學，念念不忘，可是耗費了半生的光陰，還覺老大無成！最後得到了偉大的法則，才有蓬勃的生氣，雖然談不上長篇巨著，一代精華，但也能見微知著，追隨古哲。茲在本章開始，先舉出數念上幾個系統，換換學術界的味道。

1. 單位數念疊進系統

舉凡數目分佈的情形，易被抓住研究的，要算單位問題。數目好像是散漫零亂的，但隱隱中却透露出一支超越的力量來，可以支配自身的形態。這個力量便是單位。

單位力量的由來，係出自多寡大小的比較，進而為形體的數數，再進則為自然數的一，以及十，百，千，萬，………等，然後始有變動的單位和虛數的單位。

多寡大小的意義是對立的，有了多或大，就不能沒有少或小，有了少或小，就不能沒有多或大，有了「一」，就不能沒有「非一」，有了「非一」，就不能沒有「一」，故其關係決不是互相隔離了的，決不是孤立了的。

附註：柏拉圖在巴曼尼得斯篇對於「一是」有兩種不同的假設，一.是孤立了的，一.不是孤立了的，這就是說，在同一事物中，除了「如若一是」外，同時更有「如若一不是」的存在，因此，使他惶惑不能獲到結論，且使相論陷入淆亂的不可挽救的絶境。本書主張「比較」不是孤立了的，而是具有正反兩面的對立形態，所以要使「孤立的一」的存在却是不可能的，因此，改善了柏拉圖的主張，也解決了相論裏所未解決的問題。

但柏拉圖僅知道數的起源由於「比較」罷了，而對於比較的發端，却未作精微的探索。假使没有粗淺的比較，就談不上精微的比較，更談不上數的發生了。辨識的內在力量，既是屬於比較的，那麼，從正面說，若有多寡大小，則於反面，就有不大，不小，不多，不寡了，所以當正面勢力加強時候，反面的勢力也跟着發展起來，由是發現了在反面勢力裏，確有一個不大不小不多不寡的東西，(即相等)而把正面的勢力否定了。但這個東西，原來就是產生多寡大小的東西，因此，又完成了第二否定。

柏拉圖囿於形式邏輯的成說，把大小或一是孤立起來，以為它們根本不是對立的。但到了第二否定成立以後，這個對立又復統一起來，形成反面的力量——不等——而和正面勢力——相等——相對立。

相等既是創造單位系統的原動力，當它向着正面發展的時候，反面的比較力量也開始發展了，由是用相等的東西來發展不相等的數念，因此，便產生了數數。但數數是不能離開形體的，所以需要形體單位。

要舉出形體單位的例子，實在很多；比方牀，𦉪，犙，牭，……等字，駟，驂，……等字，都足證古代的數數和形體有不可分的關係。又如Sunday，Monday，Tuesday，……等字，January，February，March，……等字，都足證數數的起源和名物是不可分的。更如小孩數數必須用指頭，能用指頭已經算是比較抽象了，但仍不能離開形體——指頭——而獨立。

形體數數，本用雅名，雅名和雅名便構成雅名集合。雅名具有聲號和符號，而其中還透露出相等的意義來，但其數是有盡的，所以此間相等意義總有一天反被不相等意義否定了。由是雅名集合便一變而為通名集合了。比方駟字的意義，本不指馬，而係指四匹的馬。當雅名用盡時，不得不先取雅名「馬」字，再取另一雅名，如：一，二，三，……等，那麼，兩個不同雅名相配合，便一變而為通名了。這樣，第一否定的困難又遭否定了。

仔細說來，形體單位的命運，完全操在比較法手裏，因在比較法裏，相等是正面的，不相等是反面的，兩者必需同時存在，否則比較的意義便無從成立，沒有正面，便沒有反面，沒有反面，也就沒有正面；沒有對，便沒有不對，沒有不對，也就沒有對。最初從相等的觀念出發，把許多數量分析為相等與不相等兩個大類，再由相等的觀念發展而成形體單位，那麼，不相等的觀念也因得到了形體單位的應用而更顯著；因此，新的對立關係也成立了。

但形體單位一定要能數數的，如果有一種單位在某種形體上可以數數，而在另一形體上又不能數數，這還算得形體單位嗎？所以形體單位一定要選取某一雜名為形容詞，取代所有的雜名，至終又引伸自己而為通名，由是又把自身否定了，從而結束了自己的命運。

抽象單位旣產生，那麼隨其產生而帶來的矛盾也開始發展了。這時候它的正面是相等，而其反面則為不相等。由許多單位（相同的）互相結合而成的集合，往往用特別聲號來表示，而成為不相等的不完全的單位，所以相等意義越發展，而不相等的意義也跟着發展起來。又用一個聲號來代表一個數目，完全是可能的，但可能的反面，還有不可能，假設所用的聲號已經告罄了，或不易學習的時候，由是遂造成了第一否定，而需要一個數集來作比較的標準，這標準也是需要唯一的聲號和符號的，因此新的相等意義也跟着新標準的成立而成立了。所以又把第一否定否定了。

這些新生的標準，就是進法。比方一，十，百，千，萬……等，都是十進的。那麼，進法難道都是十進的嗎？但就純史邏輯來說，進法不必都是十進的。事實上也是這樣。如摩爾民族的進法是十三進的，又如 Hundred, Thousand, 雖是十進的，但對於 Million 則不是十進的了。引伸來說，thirteen 是 three 十 ten, fourteen 是 four 十 ten 雖是十進的，但對於 eleven, twelve 等又難道不是和 ten 一樣的具有獨特的聲號和包含多個一的意義嗎？何必指 ten, hundred,……等為進法,而 eleven, twelve 不是進法呢!

從此演變下去,有理數的數目逐漸增加,數和數間的關係也越密切,而數的內在勢力—比較—也改變了自己的局面,從前的比較,是以任一單位的相等,來估計不相等的東西,也就是針對着不相等的東西而作的比較,從而把相等否定了。現在呢?純史的局面已經改變了,在許多不同單位裏,先把不相等力量引伸出來,把原來單位的相等意義揚棄了否定了。這是繁瑣的不相等的第一否定。但第一否定不能永遠繼續的,所以又被變單位否定了。因此,變單位也具有相等的和不相等的正反勢力。它的正面是相等,比方X,無論怎樣變化,和另一個同性質的X總是作相等性的變化。至於它的反面是不相等,則如X,可以隨意變化而和以前的自己不等。

末了,這些數目的分佈,不論是相等的,或不相等的,都若隱若現的浮現出單位力量來,起初由粗淺的比較,進而為精密的比較,又進而為形體單位,再進而為抽象單位,更進而為進法,而最終則為變單位和虛數單位了。這種演進情形,完全是疊進的,因特創單位疊進系統。

2 加法數念疊進系統

甲. 加法數念是發源於數數,而數數的發生,不必自然數的存在,假使形體單位已經成功,那麼,數數的能力就可自由發生或發展,因在沒有數數以前,人類對於數的認識,僅有形體的多寡大小的粗淺認識,認識力既是這樣的可憐,那麼,靠它為建築基礎的數學,當然不會產生。年幼的孩童要經過辨別的比較,進至能夠作數數的計數,雖然還有高尚文化為背景,尚須經過遙久的訓練,才能計數,這是一個例證。

形體數數既然產生了,那麼,在形體數數裏面,可以見到它們給數量的大小意義支配着,使成一定的次序,更具有唯一的聲號和符號,使和意義成對應關係。這些原始數目,不必是一,二,三,四,………,也不必是 one, two, three,………等,即如牀,犢,

犙,牭……等字,甚至甲乙丙丁……等字,或子丑寅……等字,凡具有數量意義的,或數序意義的,都是形體單位的數目,其中每一個數都是由前一個數加一得來,假使沒有加一的加法意義,則它們無從湊合成功了,否則我們對於數的意識,僅停頓在比較的大小意義裏面而不會進展,因為它還不會把數目明白的表現出來,自無從產生聲號了。所以數數的性質,即是可列的性質,這些性質卻存在於數目的深處,當數目發生時,加法便聯帶產生了。

在語文方面,也很容易找出它的根據,例如 thirteen 是十加三的意義,這就是兩種聲音的合併,因此,在合併裏面,深伏着加法的勢力,這是從正面說的。在記數法裏面,也有這勢力存在,如羅馬記數:III, CCC,……等,完全是(1+1+1),(100+100+100)的形式,VI, VII, CCXX,……等完全是(5+1),(5+1+1),(100+100+10+10)的形式,假使沒有數數方法和加法的意義,顯然不能成為這些數目了。比方要認識三,一定要用數數的方法逐一的數:「一,二,三」。數數是用一個聲號使反映到意識裏成為唯一的數目,這就是說,把許多單位由加法意義合併起來,使在意識裏產生新的觀念。再舉實例來說,如 VI 和 IV 的意義完全不同,惟其產生年代離埃及原始象形時代還有幾千年,仍然不能脫離象形的形式,足見原始數字當然沒有無盡個的記號,實靠加法來維持,直到人類能捕捉萬物的特徵,而用它的聲音表數,那麼,在記數法裏,加法意義便漸漸揚棄了,但符號仍然保留到現在。甲骨數字如:一二三亖  等字,都具有象形的痕跡,但也不能夠沒有加法而獨自成立的。至於 X.十.八.九 等等,都因了象形數字太複雜的緣故,才逐漸變為簡單的。這都是過渡罷了。話轉回來,所有的數目,一定要有加法的意義,才能成功的,這種加法即是象形加法。

乙.聲號就是一個力量。這個力量能夠把數的意識很快的反映出來,但這種意識是把毫無關係的分離單位合併成整個的東西。在象形加法裏面,這個東西是作象形排列的,要想把它們很

快的表現出來,必需捕捉外物的聲號,再由聯想記憶作用,使它變為意義了,故聲號乃完成象形加法的必要條件。但人類表達意識的工具,除了聲號和符號以外,還有什麼辦法呢?當意識向着聲號集中的時候,在象形加法裏,就產生了另一個力量,這就是反面的力量。因為聲號的本身不是象形,而是象形的簡單標誌,標誌和象形没有並存的關係,當其所表的意識加強時候,為了意識要集中,原有象形的形式便漸漸脫節而被揚棄了。當聲號發生時,這兩個正反的力量便聯帶產生了,也就是說,它們是隨着象形加法的產生而存在的。

反面力量的產生,便是表現力加強的反映,要在很短的時間以內,能夠表現許多數目來。起初是紊亂的,但當紊亂的秩序漸漸的變為有秩序的時候,數數便成立了。反面力量加強的結果,雖使象形加法很快的發展,但僅限於一個數裏面,絕不會擴充到數和數中間去。當跑到窮途時候,只好把正面的合併力量,伸展出來,使在兩個數或多個數裏面,滲入合併的意義,然後再由反面的數數力量否定起來,那麼,演算加法便成立了。比方 3+2=5,就正面來說,一個 3 和一個 2 的合併意義就是加法意義,為什麼它的結果是 5 呢?因為由數數方法,先數到 3,然後接下去是 4,5 了。

演算加法的產生,是由於數數的計算,這可由兒童心理的發展觀察出來。普通兒童很早就能夠學習數數,但加法的學習一定要在學會了數數以後,並且學習加法的步驟,最便利最容易而且唯一的辦法,就是利用數數的技能,這即為了加法這個東西,是含有數數的成分。至於利用加法歌訣的人,似乎不要數數的帮忙,可是歌訣的來源,還是從數數得來的。

丙. 在演算加法裏面,當合併關係加強時候,數數方法就被否定了。為什麼呢?在加法裏面,没有合併意義是不可能的,没有數數方法,合併是不會成功的,這已經說過了,但合併本近象形的,又凡偏於象形的,往往抹殺聲號,偏於聲音的,往往奪取象

形。但合併是正面的，所以當合併意義成立的時候，數數是被抹殺的。又因合併是需要聲號的，沒有聲音，就不能合併，所以在合併意義加強的時候，內在的聲號也跟着強調起來，因此，合併意義漸漸的變為聲號的了。所以當把許多相同的數目相加的時候，合併裏面的聲號意義就蛻變而為數數的意義了。比方3＋3＋3＋3裏，3漸漸的變成單位意義，再加上數數意義就變成四個3了。它的和是12，所以四個3也是12，由是乘法就在數數奪取合併意義的時候而成立了。

繼續說下去，便討論到為什麼乘法是從加法演進而來呢？因為在乘法裏面，沒有加法是不能成功的。比方 13×14就是 4×13後加上10×13，就在13×4說，也是在10×4後再加上3×4的意義，所以乘法沒有加法是不行的。反過來說，加法是可以不要乘法的。實際上當把乘法看作加法的時候，也不過是它的特殊情形罷了。如果我們抓住這兩個要點，毫無疑問的就曉得它是從加法演進而來的。

3. 遞進現象

一談到遞進的問題，大家都以為這是陌生的理論，實際上這種問題常存在于日常生活裡，祇因沒有注意罷了。任何兩個不同文化單位的發展，如果在他們本質上確有共通的關係，又當他們接觸時候，則任一方的意識及方法，必可移植到另一方。譬如就初等代數和幾何來說，它們實在具有共通性質的，這就是柏拉圖所指的大小多寡整個部分相等不相等同異的對立關係，因此，雙方常有遞進現象發生。

至於高等數學所討論的，却是邏輯問題，但一切藝術文化和各種社會科學也都具有這種本質，因此，當這兩大系統接觸時候，必然產生了歷史性的數學。

算術代數發展的結果，漸漸的滲進幾何裏來，這就是一種遞進作用。為什麼會這樣呢？因為在圖形的比較意義裏面也潛伏着

兩個相反的力量，就是相同和不相同了。但在意識發展裡面，若没有算術代數的方法滲透進去，那是十分微弱而無力的。這是屬於方法方面的，所以當工具改良以後，圖形的意義就變為幾何的了。先就定義來說吧！如對線段的中點來說，等分的意義，就不能不建立在相等意義上。又如二直線相交成直角，叫做互相垂直。這裏直角的意義就是這二線的交角各等於平角的一半，所以幾何的直角意義也不能離開算術意義而獨存。更如一平面上對一固定點的一切動點保持一定距離而運動的軌跡叫做圓周　保持一定距離也不外是算術裡面的相等意義。再如一直線和圓周相交只有一個交點的，叫做切線。但一個交點的反面，便有反面勢力存在着，這就是「不僅一個交點」了。簡單的說，這難道不是從一，二，三，四，……等而得嗎？所以馬馬虎虎的說，幾何定義好像和算術代數没有關係，但經嚴格思攷以後，便發見幾何意義的幕後，實有算術代數操縱着，没有它是無從建立起來的，這也是說如果没有算術代數的遞進作用，幾何的意識無論怎樣是不會成熟的。

關於上面所說的，不但是對於幾何的本質不能離開算術代數的說明，並且證明了算術代數是推進幾何的工具，更把算術代數裏的矛盾帶到幾何裏去使它也具有這樣的矛盾。現在所要說的，就是除開這些概念外，還有許多定理，也非具有數的意義不可的，當中最明顯的要算比例定理了。最初它對於點的位置的認識，係由度量，有了度量，就有數的力量，因為要决定位置的目的，遂構成幾何上特有的關係。這表示兩種力量，一個是要確定幾何的，一個是要取代幾何的，所以成為相反的力量，但這相反力量，有了一個便决定了另一個，這便成了一一對應的關係。這個關係的發展是漫無目的的，但仍不斷的作形式增加，而慢慢的集中到別的意識上面去，最明顯的要算線分的內外分點了。它具有兩種相反的能力，一個是確定幾何性的，一個是取代幾何性的。因為點的位置問題是决定幾何性的正面能力而比的二個數值是

取代幾何性的相反能力，利用這種方法滲到圖形的時候，便發見關係與關係間的聯繫，這就是定理了。

當初步定理形成以後，同時定理和定理間的矛盾也開始發展了，它是由度量帶來的。度量法本是實驗，積下了許多實驗，便漸漸的向着一個理論集中起來，這就是歸納法。但因歸納的妄用，常常陷自身於錯誤。因此，更創演譯法來取代它，由是數學推理便向着嚴密路上發展了。

為了算術的發展，漸漸使幾何學昌明起來，但當立方形正方形發達以後，也漸漸的返到代數上去，便是所謂多項式了。為什麼呢？在多項式裏各項未知數的指數都念作多少方，也就是表示許多未知數的連乘積。這裏多少方就是含有幾何意義的。但這不能說它是由幾何遞進得到的，只可說它是和幾何有遞進關係的，因為它的名字，雖然必須幾何意義，而其內容也許早已成熟，不過沒有名字罷了。但更進一步，便可研究它的究竟和內容，先就低次方程說，實和因數相同，就高次方程說，就是求根求解，但高次方程除特別情形外，一般是不可解的，如果不可解，那麼，根解的意識就無從建立，只可循着他路前進，因此，只靠着低次方程來維持了。此外，由混雜不合意義的乘法，怎會變成有意義的連乘積平方立方呢？它是怎樣的集中而引起注意呢？要知道在平等機會裏面既沒有引人注意的特質，只好藉一個外力，使它發生需要，然後向着需要集中起來，但正方形的邊與面積間，及立方形的邊與體積間的關係是會引起需要的，剛好和平方與數，及立方與數的關係一樣，因此，問題就解決了。

和平方立方聯帶發生的，就是無理數了，但無理數的發生，一定在乘法後，因為演算乘方，如果沒有開方，那是千可萬可，但一到了開方，那就不可沒有乘方了。但開方是產生方程式根解的原因，因為平方根的意義就是某數的自乘等於原數，這就是二次方程式了。因此，建立了必要的關係，而方程式便可誕生了。

當算術的比例遞進到幾何時候，便一變而成坐標了，建立坐標的條件，即是這兩者間存在着一一對應的關係，起初僅限於直線範圍。但可能的反面，還有不可能，當其發展到平面時候，不可能的矛盾就出現了。但不可能怎樣又會變爲可能呢？這就爲了當達到不可能的時候，跟着否定勢力的發展而對立的局面又更顯著，至終碰到「過一點僅可作一直線與已知線平行」和「二點僅可決定一直線」，和「二線僅可決定一點」的定理時候，新成的比例集合又把第一否定否定了。

末了，疊進和遞進都是屬於歷史邏輯的變換，但疊進系統是有序的集合，而在遞進系統裏每一個元素的次序都是相等的，故其集合不是有序。

4　減法還原系統

現在要提到減法的問題，馬上就會聯想到加法的問題去。在應用上加法減法都是一樣重要，你看萬事萬理，有進就有退，有增就有減，有得就有失，因此，便漸漸的演成了二個正反的力量，同時更因爲這兩個關係越趨越近，遂使它們聯合起來。

但構成減法的條件，就是減數被減數和差數。惟是三個問題非靠着數數是不會成功的，所以減法的成立，若沒有加法是不可能的。可是它還不能離開形體，直至加法完全成熟，然後逐漸奪取加法，把顛倒來反求，這樣，減法便是加法的還原了。

減法數念既然成立，但隨着它的成立所帶來的困難便開始了，最初減法只能存在於形體裏面，至多也不過存在於個位數裏面，當碰到被減數小於減數時，它便被自身的發展——不可還原——所否定了。但減法是需要加法的，而加法却不需要減法了。比方說，38—19，在珠算裡是先把3—1，然後18—9的；但在筆算裡面，先18—9，然後3—1的。比較起來，不過是運算次序的顛倒，而同具10＋8的意義，因此，它又被正面的力量——加法的還原——所否定了。

繼續發展下去，便到除法了，在生活裏是分配問題，在算術裡便成除法，實際上分配問題不用除法，專憑經驗，也是可以的。比方把許多東西分成許多相等的部分，這原有東西就是被除數，等分的數目就是除數，這是最原始的，當然不成除法了。但分配可不用除法而用經驗，那麼，在經驗裡面，必有不可能的勢力存在，當這反面勢力伸長的時候，專靠經驗的方法是不能適用了。但事實上不能長此沉寂下去，因此，往往把原有東西分成一批一批的拿去。俾在每批的東西裏，都能靠經驗來分配，因此，分配問題，便漸漸的拉到重減法裏面去。因為第一次取出的意義，就是在原來東西裏面減去所要取的東西，這是第一次減法了。第二次減法開始時，就在剩餘裏面，再取去第二批的東西，這是第二次減法了。這樣推下去，二次，三次，以至多次。

當重減法的需要增加的時候，便慢慢的把它自己陷在煩瑣裡，由於意識漸漸集中，使認識了求商的困難和反覆的計算，因此，就把它自己否定了。結果，把重減法的意義變換為重加的意義了。所以許多減法的相加，變為除商的相乘而把原來的東西否定了變質了。

從這裏我們知道乘法是不需要除法的，但假使除法沒有乘法是建立不起來的，所以乘法的發生，必需在除法前面的。由此推下去，所有減法加法也都在除法的前面。

加減二法本是互相還原的，到了這二法成熟以後，在減法裏是具有加法的，因此，當加法發展為乘法時候，減法也發展為重減法，所以在還原上也揚棄加法，且採用乘法而變質了，這樣，新的方法對於加法便失却還原意義了。但它一面失却了還原意義，而另一方面又和乘法重敘還原關係。

從此發展下去，便是乘方開方了，乘方是乘法的特殊狀態，它是由乘法意義的集中而得的。開方呢？外表上好像和乘方沒有關係的，實際上在它的構造裏是不可沒有乘方的。當初它係由正