趣味数学精品译丛

写得如此迷人的数学读物是十分罕见的

三车同到之谜

隐藏在日常生活中的数学

为什么在星期五购买彩票比较好?
为什么淋浴总是太热或太冷?
哪一个古典谜题在战争中被盟军轰炸破坏了?

“很有趣”
——《星期日电讯》
“一本迷人的书”
——《每日邮讯》

罗勃·伊斯特威
杰里米·温德姆 著
巴巴拉·肖尔 插图
陈以鸿 译

上海教育出版社
SHANGHAI EDUCATION PUBLISHING HOUSE

三车同到之谜

——隐藏在日常生活中的数学

罗勃·伊斯特威
杰里米·温德姆 著

巴巴拉·肖尔 插图
陈以鸿 译

图书在版编目(CIP)数据
三车同到之迷：隐藏在日常生活中的数学 / （英）伊斯特威，
(英)温德姆著;陈以鸿译. —上海:上海教育出版社,2011.5
(趣味数学精品译丛)
ISBN 978-7-5444-3091-3

Ⅰ.①三… Ⅱ.①伊…②温…③陈… Ⅲ.①数学课—中学—课外
读物 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第025552号

趣味数学精品译丛
三车同到之谜
隐藏在日常生活中的数学
罗勃·伊斯特威 杰里米·温德姆 著
陈以鸿 译

出版发行 上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社
易文网 www.ewen.cc
地 址 上海永福路123号
邮 编 200031
经 销 各地新华书店
印 刷 江苏启东人民印刷有限公司
开 本 890×1240 1/32 印张 5.5 插页 1
版 次 2011年5月第1版
印 次 2011年5月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5444-3091-3/O·0140
定 价 15.00元

(如发现质量问题,读者可向工厂调换)

序

我们不是发明数学，而是发现数学．它存在于我们生活的各个方面：严肃的和轻松的，严重的和轻微的．这门学科时常被误解和不合理地被害怕，其实它比任何语言都更简单，更合乎逻辑．当我们凝视夜空，对着美丽而高不可攀的群星感到疑惑的时候，当我们因沐浴而排掉（就我来说是大量的）水的时候，当我们读到足球赛的成绩或者抛掷一枚硬币的时候，数学及其相关科目的知识能帮助我们欣赏和理解，甚至作出预测和为将来作准备．

我从小有三项最大的爱好：板球、流行音乐和天文学．所有这三者都起因于统计学——击球率、乐曲选目和行星的大小及距离，虽然我在当时并没有意识到这一点．这些似乎不相联系的题目所共有的一串数字使我开始从事于三种终生爱好的事业，而且还曾经有过很多别的机会使数字成为一种新的兴趣的基础，不过多年来我在轮盘赌和赌注登记者方面的失利偶然使我希望事情并不总是如此．

最美丽的乐曲可以用数学方法分割开来——因为所有音符相互间具有数字关系，它们的振动是和谐的、融洽的或不协调的——数学上的联系愈纯粹，愈直截了当，声音就愈甜美．我不是说听莫扎特或鲍勃·迪伦的时候必须把计算器握在手中，而且我不相信他们在创作具有情感天才的乐曲时会在脑子里想着每秒钟的振荡数，但是如果说没有一个更高级的人做得到这一点，我会感到非常惊奇的．

罗勃·伊斯特威和杰里米·温德姆认为这是一本有趣的书，他们的看法是完全正确的．从薯片到撞球，从牌术到保险，从解码到等车，这里每一件事都提醒我们数学是如何支配我们的生存并提高其价值的．

蒂姆·赖斯

志　谢

本书的写作在很大程度上受到马丁·加德纳著作的启发，他在过去40年内已经做了大量普及数学的工作了.我们还要特别感谢提供许多想法的戴维·韦尔斯，让我们阅览藏书并利用他在数学游戏方面的广博知识的戴维·辛马斯特，和以数学专长使我们受惠的马尔科姆·菲尔德.

我们必须感激那些费心阅读本书初稿的人们，特别是马丁·丹尼尔斯、史蒂夫·巴斯基、戴维·弗拉维尔和萨拉·温德姆.也要感谢杰克·伊斯特威、巴巴拉·布朗、托尼·泰勒、哈罗德·林德、乔·莱尔曼和萨姆·班克斯.

此外，莱昂内尔·蒂特曼、蒂姆·琼斯、克雷格·迪布尔、休·琼斯、达伦·尼科尔斯、丹尼斯·舍伍德、保罗·哈里斯、谢里尔·克雷默、理查德·哈米尔、克里斯·希利、苏珊·布莱克默、马丁·特纳、海伦·尼科尔、埃玛·拉什顿和迈克尔·巴勒给了我们很多有益的帮助.

特别值得提起的是夏洛特·霍华德对我们的鼓励，同样值得提到的还有罗布森书局内设想出版本书的每一个人.

最后，谢谢伊莱恩和萨拉，因为你们始终是我们的热情而知心的支持者.

为什么好的数学书出现得那么少？这本书是向所有人开启数学大门的少数书之外又一本独特的书.我很乐意把它介绍给每一个人.快去读这本书吧,它将改变你对数学的所有看法.

巴里·刘易斯

导　言

数学是迷人的，美丽的，有时甚至是奇妙的. 它几乎与我们所做的每一件事情有关，它包含着丰富的话题，足供我们在最激动人心的餐叙中谈论. 这可能不是普遍的看法，但这肯定是我们的看法，而且我们希望这也会是你们的看法. 长期以来，数学的舆论一直不佳，现在该是为它辩护的时候了. 这本书是为乐于提醒自己——或第一次发现——数学是我们生活的重要部分的任何人写的.

你有没有问过自己，为什么公共汽车三辆一起来？你在童年时代曾否因找不到有四片叶子的三叶草而失望过？当你在离家很远的地方与旧友不期而遇时，你是否因为觉得发生这样的巧事很奇怪而哑然失笑？诸如此类的事情使每个人感兴趣，它们背后的解释都具有数学的性质. 但是数学并不只是回答问题，它还提供新的见解，并且激发好奇心. 赌博、旅行、约会、进餐，甚至在下雨天决定是否要跑，都包含着数学的元素.

有关通俗数学和趣味数学的书往往看上去是抽象的，使那些离开学校后就不接触数学的人们难以接近. 我们试图让数学回归真实的日常生活. 因此每一章都从可能发生在任何人身上的问题开始. 素材的选择所反映的是我们的个人兴趣，而不是什么伟大的逻辑体系. 有些内容是易于阅读的，另外一些则需要略微多思考一下，但是不管你的数学能力如何，这里提供给你的东西将是很丰富的.

你会发现书中有许多关于概率论的实际应用，以及令人惊奇的用到切线、斐波那契级数、圆周率、矩阵、维恩图、素数等等的场合. 我们希望你和我们一样认为这些题材是发人深思和令人兴奋的. 最要紧的是，我们希望你喜欢这本书.

目　录

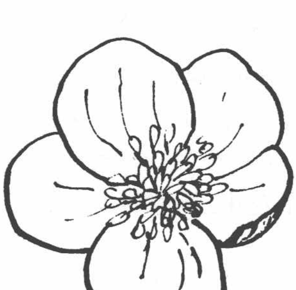
第 1 章

为什么找不到四片叶子的三叶草?

自然界与数学之间的联系

童年时代的探奇经历之一是找寻四片叶子的三叶草. 这是仅次于在彩虹的尽头搜寻金罐的一件美好的事情. 遗憾的是这两种探索通常总是以失望告终. 对于彩虹的金子是容易放弃的,因为彩虹常常在孩子的好奇心消失之前就消失了,可是对三叶草的探索要使人丧气得多. 看来完全有理由相信在某个地方存在着一种含有四片叶子的三叶草. 那么为什么在自然界中如此罕见此物呢?

下一次你到花园中或到农村中去时,花点时间去研究花卉吧. 你将发现最常见的花瓣数是 5. 毛茛属植物、锦葵属植物、三色堇、报春花、杜鹃花、番茄花、老鹳草花……这些仅仅是大量五花瓣类花卉中的一小部分而已. 即使看上去含有 10 个花瓣的花,例如红色剪秋罗,也是由 5 个花瓣各自一分为二而形成的.

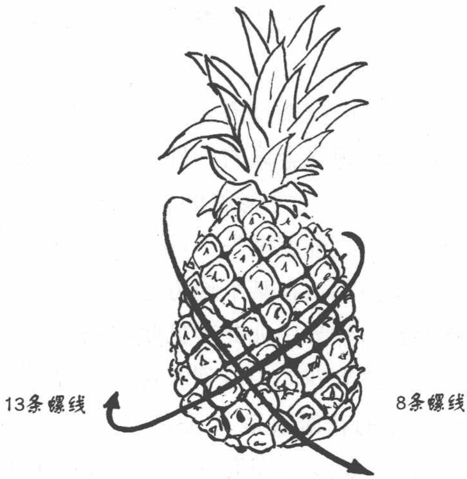


毛茛属植物有 5 个花瓣

种子的排列中也出现数字 5. 最容易找出 5 的模式的方法是把苹果切开. 如果通过"赤道"把苹果切成两半(平常切苹果是从"极到极"沿核切下),你将发现种子排列成一个美丽的五角星. 切开梨子也是如此.

为什么在植物中含有这个奇数,而在动物中常见的是偶数?(例如腿的数目通常是 2、4 或 6.)为什么选择 5 个花瓣而不是更对称的 4 个或 6 个?

在菠萝中,8 和 13 成了意味深长的数字



进一步的研究发现植物中特别频繁地存在着另外一些数字. 考察一个菠萝或松果,你将看到上面的鳞皮排列成从顶到底的一行行螺线. 在这些螺线中,显而易见地可区分出两类:一类是顺时针方向的,另一类是逆时针方向的. 在菠萝中,这两类螺线行的数目通常是 8 和 13,而在松果中,典型情况可能是 13 和 21 或 21 和 34. 在向日葵中,你也会发现顺时针和逆时针的螺线,这时是在从花心向外排列的小花中. 顺时针和逆时针螺线数常常是 34 和 55 或 55 和 89.

曾对大量花卉的花瓣费力进行计数的人们说,8、13、21、34 和 55 是比它们的邻数更常见的数. 有 8 个花瓣的花多于 7 个或 9 个的.

一些数比另外一些数出现得更频繁，这并非巧合.事实上，在花瓣、叶子和松果与数百年来已经成为魅力之源的一个数学领域之间存在着迷人的联系.

斐波那契级数

一位意大利人伦纳多·斐波那契(1170—1240)以他的姓为一个简单的级数命名.这个级数从1和1开始，其后的每一个数由它前面两个数相加而得.斐波那契级数可列出如下：

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55 \text{ 等等.}$$

斐波那契原先是在研究如果他的兔以特定的繁殖率生小兔的话他将会拥有多少头兔这个问题时产生出这个级数的.然而斐波那契级数竟然成了这样一个级数，它与自然界的联系要比简单的兔数深远得多.你可能已经注意到，上述花瓣数和鳞片数都是斐波那契数，叶子数也以2、3和5为最多.因此三叶草通常含有3片叶子，而不是4片，是符合这模式的.

但是为什么斐波那契数如此频繁地出现在植物中呢？

这完全要归结到斐波那契级数与一个被古老文明认为具有神圣和神秘性质的特殊数之间的联系.这个特殊数就是黄金比率.

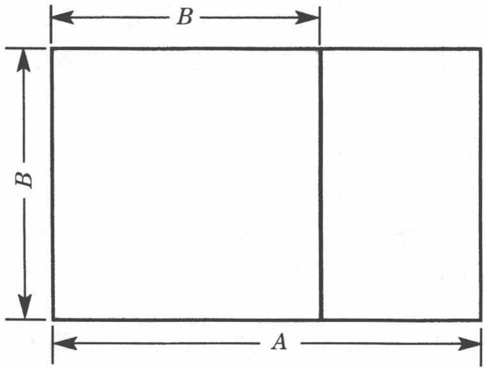
黄金比率

黄金比率，即Φ，是$\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$.这个数约等于1.618.作为一个数，它可能并不使你激动，但是它在自然界中是至关重要的.这个比率从属于一个具有独特性质的特定矩形.

Φ并非仅仅出现于矩形.它也在每一个五边形和五角星中起作用，这意味着你在苹果中也找得到它.

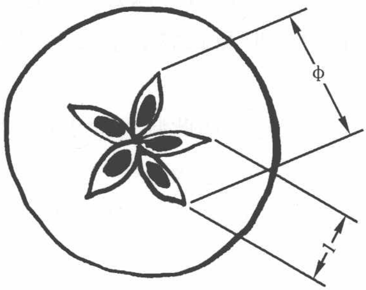
看一下前面在苹果中得到的星形吧.你会发现星的第一和第三点的顶端之间的距离是相邻顶端间距离的Φ倍.(至少对于完美的星和精确的尺来说是如此.)

这还不是Φ的奇特性质的终极.



这是边长 $A\times B$ 的特定矩形. 如果切去 $B\times B$ 一块正方形(如图),所得矩形的边长比率与原来相同. 这个性质是黄金矩形所特有的. A 与 B 之比是 1.618…,用希腊字母 Φ 表示.

苹果

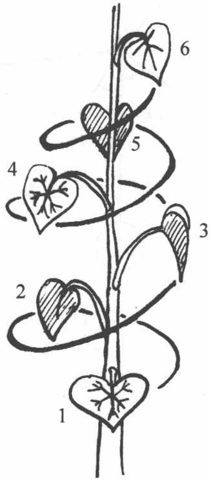


斐波那契级数中任何一对相邻数的比都与 Φ 相近,例如 $\frac{3}{2}=1.5$, $\frac{5}{3}=1.6$ 等等. 沿着这级数愈往后,两项的比愈接近 Φ. 在你获得 $\frac{34}{21}$ 或 1.619时,这个比值已经与精确值相差不超过 0.1%了. 斐波那契数与黄金比率密切地相互联系着.

现在我们回到植物. 在许多植物中,你会注意到从茎上长出的一些叶子. 这些叶子通常以不同角度从茎上长出,从下往上形成一条螺线. 每一片叶子从它的前一片转过的角度通常在 137 度与 139 度之间. 顺

便说一下，在花园里迅速地作一实验，可以使这情况得到肯定. 从花坛上拔下一棵杂草，你会发现它有 9 片叶子，它们之间刚好隔开 3 转. 每两片叶子之间的平均角度约是 139 度.

这个角度具有什么特殊意义？结果将显出它与 Φ 有关，可是为什么呢？它完全与一种植物在它幼年时发生的情况有牵连. 每一片叶子和花瓣首先呈现为幼小的芽. 芽沿着梗出现，每次一个. 每一个芽力图使自己的位置离前一些芽尽可能地远，就像相斥的磁铁一样. 所以如此的原因，大概是每一个芽希望得到尽可能多的空间和光照，以利于它的成长. 为了达到这个目的，芽的指向就与以前的芽取不同的角度.



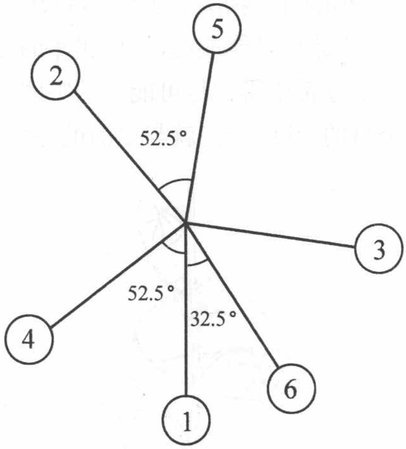
叶子沿花园杂草的茎螺旋形地上升

一个与 Φ 有关的角度恰好特别适宜于使每一个芽与所有以前的芽离得尽可能远. 360 度除以 Φ 约等于 222.5 度. 顺时针转过 222.5 度相当于逆时针转过 137.5 度，这个角度正是在植物中反复出现的.

进而言之，如果每一个芽长出时从它的前一个芽转过 137.5 度，那么第六个芽就遇到了有趣的情况，如上附图所示.

第四和第五个芽各与它们前面的芽相距至少 50 度. 然而第六个芽出现时只与第一个芽相距 32.5 度. 你不妨认为第六个芽似乎在第一个

芽的荫蔽之下. 至少它被荫蔽的程度大于其他五个芽. 这意味着第六个芽得到的日光和营养略少于其他芽,这就足以使关于它能否成长的天平发生倾斜. 这会不会就是这么多植物止于 5 这个数的原因? 是不是许多植物有一个设计好的截止点,使第六个芽无法形成? 这是一个具有某种魅力的理论,虽然看来没有人了解它的全部内容.



花芽之间的角

前六个芽的位置. 注意第四和第五个芽出现时离开前面的芽至少 52.5°,而第六个芽只离开第一个芽 32.5°.

所有这些只是斐波那契数、黄金比率和数字 5 之间的复杂关系的初步介绍而已. 然而它已经告诉我们,植物的设计可能不仅与基因有关,而且与数字同样有关.

与植物的关联是黄金比率在很多世纪以来一直是迷恋和尊崇的源泉的原因之一. 甚至古代埃及人已经知道这一比率,吉萨金字塔的表面是由近似黄金矩形的两半部分组成的.

但是还有另一个形状与自然界的联系更加密切. 它也包含一个具有一些神秘性质的比率.

π 和圆

圆无处不在,在田野中,森林中,海洋中,天空中. 种子、头状花序、

眼睛、树干、彩虹和水滴都包含着圆.行星看上去也是圆的,而且长时间以来它们甚至被认为是作圆周运动的.(事实上行星的运动是椭圆形的,而圆是椭圆族的一个特殊成员.)

圆是常见的,因为它的形状是高效率的,并且它易于作成.如果一头山羊被拴在位于一块地的中央的桩上,这山羊想吃尽可能多的草,那么它吃掉的草的形状将是一个圆.如果你有一定量的围栏材料,并且希望被围面积尽可能大,这时你当然可以把围栏筑成正方形,但要是筑成圆形的话,你将使被围土地增加25%以上.自然界有得出最优解的习惯——毕竟它有充分的时间去实践,所以它把圆利用到了极点.

圆的直径与周长之比叫做圆周率,用希腊字母π表示.早在《圣经》时代,人们就知道π约等于3.据《列王纪上》7:23,

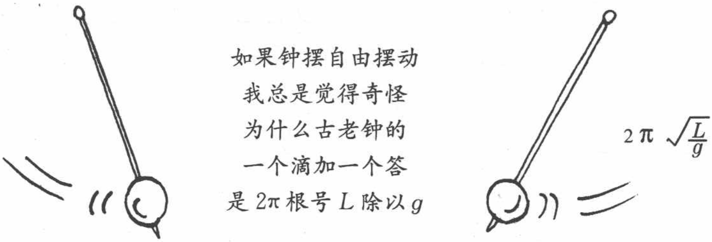
"他造了一个铸铜海,从一边到另一边的距离是10肘尺,通体是圆形的……周长30肘尺."

有关π的一些奇特事实:

- 用分数线将113355这数字从中间分开,所得比率差不多确切地是$\frac{1}{\pi}$.
$\frac{113}{355}=\frac{1}{3.1415929}$.
- 记住π的一个有用的方法是记住"Can I find a trick recalling pi easily?"(我能找到易于记住π的窍门吗?")这句英文.各个英文词所含字母数给出π的数值到小数点后7位:3.1415926.记住$\frac{1}{\pi}$的方法则是记住"Can I remember the reciprocal"("我能记住倒数吗"),结果得0.318310,准确到小数点后6位.
- 有许多漂亮的级数可用来得出π.最简单的一个级数是$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\cdots\right)\times 4$,不过你必须把这级数写得相当长,才能开始接近正确的数值.
- 这个比率在1706年首先被威廉·琼斯叫做π.琼斯是安格尔西岛一个威尔士农民的儿子.
- π也在许多与圆毫无关系的重要公式中出现,这在以后将会看到.

后来有人就利用这段引文，并以《圣经》正确无误为理由，认为 π 必然确切地是 3. 可是任何教条和法规都不能抹煞 π 略小于 $3\frac{1}{7}$ 这一事实. 事实上 π 是一个无理数，就是说它的值是不能表示成用整数写出的一个分数的.

任何牵涉到圆的自然现象必然牵涉到 π. 然而 π 也能在与圆的联系不大明显时出现. 例如 π 出现在计时中. 一个从容地摆动的钟摆走过一个循环的时间被下面这首五行打油诗概括得很巧妙：



L 是钟摆的长度米数，g 是重力加速度，在地球上约是 9.8 米/秒^2. 这公式在任何行星上都适用，又因为 π 在宇宙中到处具有恒定值，所以利用钟摆可以简单地算出一个行星上的重力有多强. 1 米长的钟摆在地球上时 1 秒钟 1 个滴或 1 个答，而在月球上时 1 个滴需要 2.5 秒.

18 世纪的生物学家乔治斯·布丰关于物质世界中的 π 的另一发现也是诱人的. 如果使一枚针从高处落到画着一些平行线的平面上，平行线之间的间隙正好是针的长度，那么针碰着线的机会正好是 $\frac{2}{\pi}$（约 64%）. 一百年后，数学家奥古斯塔斯·德摩根让他的一个学生测试了这一结果. 这位学生使一枚针落下 600 次，结果 382 次碰着线，所得 π 值是 3.14，可以说准确得可疑. 但是如果你被困在荒岛上，要想尽可能准确地计算 π，你可以有一个很怪的估算方法. 你只要找到一根棒，并在沙上画出一些线，你需要做的事情就是计数了. 提醒你一下，为了保证准确到 3 位小数，你必须使棒落下几万次.