

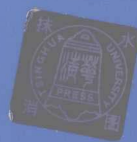
名校
名师
名作

第2版

线性代数 复习指导

——思路、方法与技巧

陈文灯 主 编
武海燕 李冬红 副主编



清华大学出版社

大学数学复习指导丛书

第2版

名校
名师
名作

线性代数 复习指导

——思路、方法与技巧

陈文彬
武海燕

内 容 简 介

全书共分 6 章, 包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值和特征向量、二次型等内容. 在概括讲述基本理论的基础上, 对各种题型进行了深入浅出的分析和讲解, 并对历年全国硕士研究生考试中线性代数的部分试题进行分析和解答, 旨在帮助读者在短期内掌握各种解题方法和技巧, 做到知识的融会贯通和触类旁通.

本书适用于理工科专业本科生扩大课堂的信息量, 扎实掌握相关知识点和解题技巧, 同时也是一本全面而又系统精炼的考研辅导用书.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签, 无标签者不得销售.

版权所有, 侵权必究. 侵权举报电话: 010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

线性代数复习指导——思路、方法与技巧/陈文灯主编. —2 版. —北京: 清华大学出版社, 2011.1
(大学数学复习指导丛书)

ISBN 978-7-302-24187-4

I. ①线… II. ①陈… III. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 243132 号

责任编辑: 陈仕云

封面设计: 刘 超

版式设计: 文森时代

责任校对: 姜 彦

责任印制: 何 芊

出版发行: 清华大学出版社

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

<http://www.tup.com.cn>

邮 编: 100084

社 总 机: 010-62770175

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者: 北京季蜂印刷有限公司

装 订 者: 三河市新茂装订有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185×260 印 张: 16.75 字 数: 387 千字

版 次: 2011 年 3 月第 2 版 印 次: 2011 年 3 月第 1 次印刷

印 数: 1~5000

定 价: 28.00 元

产品编号: 037010-01

丛书序

本丛书共三个分册：《高等数学复习指导——思路、方法与技巧》、《概率论与数理统计复习指导——思路、方法与技巧》、《线性代数复习指导——思路、方法与技巧》。自 2003 年出版以来，一直受到广大读者的欢迎，到目前已多次重印。在这几年的教学和考研培训中，我们又总结了一些新的解题方法与思维定势，同时我们也收到了一些读者提出的修订本书的建议。

本丛书是在 2003 年第一版的基础上修订而成的，本次修订的内容主要体现在以下几方面。

(1) 增加了几个思维定势。虽然思维定势对应试者确有一学就会，一试就灵之功效，但对于启迪思维就不一定能起到很好的作用，延伸初学者的知识链更不可能依靠思维定势。只有培养学生的发散性思维，使他们的思维活跃起来，从而对他们学好数学，并应用数学思维方法去学好其他课程才有裨益。

(2) 增加了大量新题型。这部分题型的增加不仅使本书的布局更合理、内容更丰满充实，同时也旨在帮助读者通过练习掌握更多的题型和解题思路。

(3) 删减和更新调整了大量例题。就说明问题而言，第一版中有些例题在不同章节中出现，我们的原意在于探索一题多解，不能说是重复性例题。本次修订中，我们根据部分读者提出的建议，对这部分例题进行了删除和调整。同时，对一些比较难掌握的解题方法与技巧，为示范作用增加了大量全新的例题。

本丛书旨在帮助读者全面、系统地复习相关知识点，深入理解基本概念和基本理论，学习和掌握解题方法及解题技巧。丛书主要特色如下。

(1) 根据国内经典版数学教材调整和完善内容框架，体系成熟完整。

(2) 对重要的概念、定理和公式进行剖析，有利于增强读者对这些内容的理解和记忆，避免犯概念性错误。

(3) 每章从基本概念、基本理论和基本方法的介绍入手，同时以大量题型为例，进行错解分析和难题解题技巧分析。

(4) 以题型为纲深入分析探究，总结出解题方法与技巧，使读者胸有成竹，有“法”可依，有“路”可循。

(5) 用“举题型讲方法”的格式代替“讲方法套题型”的方法，使读者做题时思路畅通、有的放矢。

(6) 广泛采用表格，使读者对要点一目了然，记忆深刻。

陈文灯

2010 年 11 月

第 2 版前言

根据读者反馈的建议以及作者近几年来教学经验的积累,我们在 2003 年第一版的基础上,对本书进行了修订.

本书旨在帮助读者全面、系统地复习线性代数的内容,深入理解基本概念和基本理论,同时通过大量例题的分析与讲解,配合课后训练,帮助读者学习和掌握解题方法及解题技巧,以达到举一反三、触类旁通的学习效果.在本次修订中,我们补充了大量新的例题和解题思路与方法,以帮助学生熟悉更多的题型,更好地提高学习效果.

与第一版相比较,本书的变化主要体现在以下几方面.

- (1) 增加矩阵可逆的几种证明方法.
- (2) 增加线性代数中的新思维定势.
- (3) 增加方阵 A 的 n 次方幂求法.
- (4) 增加大量新例题,同时对某些例题的解法进行改进和补充.
- (5) 增加大量最新的考研真题及解题分析.

参加本书修订工作的有陈文灯、武海燕、李冬红老师.

本书主要适用于高等院校在校本科生,同时对于电大、夜大学生以及专科学生也有较大参考价值,尤其对参加研究生备考的学生在短时间内提升数学成绩非常有帮助.

书中不当及错漏之处,恳请广大读者和数学同仁批评指正.

编者

2010 年 11 月

目 录

第 1 章 行列式	1
1.1 行列式的概念	1
1.1.1 排列与逆序	1
1.1.2 n 阶行列式的定义	2
1.2 性质、定理与公式	3
1.2.1 行列式的基本性质	3
1.2.2 行列式按行(列)展开定理	6
1.2.3 克莱姆(Cramer)法则	7
1.3 行列式的计算	9
1.3.1 几种特殊行列式的计算	9
1.3.2 行列式的计算方法	9
1.3.3 杂例	15
习题与答案	17
第 2 章 矩阵	20
2.1 矩阵的概念与运算	20
2.1.1 矩阵的概念	20
2.1.2 矩阵的运算	20
2.2 逆矩阵	23
2.2.1 逆矩阵的概念	23
2.2.2 利用伴随矩阵求逆矩阵	23
2.2.3 矩阵的初等变换与求逆	24
2.2.4 分块矩阵及其求逆	25
2.3 重要定理与公式	25
2.3.1 矩阵 A 可逆的充要条件	25
2.3.2 有关伴随矩阵 A^* 的定理与公式	25
2.3.3 关于逆矩阵的公式	26
2.3.4 分块矩阵求逆的公式	26
2.3.5 有关 A^T, A^{-1}, A^* 3 种运算的比较与联系	26
2.3.6 关于矩阵乘法的消去律	26
2.4 典型例题	26
2.4.1 矩阵求逆	27
2.4.2 涉及伴随矩阵 A^* 的计算或证明	27
2.4.3 已知条件为矩阵方程(或矩阵等式)的计算或证明	27
习题与答案	41

第3章 向量	48
3.1 基本概念	48
3.1.1 向量的概念与运算	48
3.1.2 向量间的线性关系	48
3.1.3 向量组的秩和矩阵的秩	49
3.2 定理与公式	50
3.3 例题分析	51
3.3.1 讨论向量组的线性相关性	51
3.3.2 讨论向量组的秩(包括求极大无关组)	55
3.3.3 综合计算证明题	58
习题与答案	69
第4章 线性方程组	74
4.1 基本内容	74
4.1.1 线性方程组的基本概念	74
4.1.2 线性方程组解的判定	75
4.1.3 非齐次组 $Ax=b$ 与齐次组 $Ax=0$ 解的关系	75
4.1.4 线性方程组解的性质	75
4.1.5 线性方程组解的结构	76
4.2 例题分析	77
习题与答案	93
第5章 特征值和特征向量	98
5.1 基本内容	98
5.1.1 矩阵的特征值和特征向量的概念	98
5.1.2 特征值与特征向量的计算方法	98
5.1.3 相似矩阵及其性质	98
5.1.4 对称矩阵及其性质	99
5.2 重要定理与公式	99
5.3 例题分析	100
习题与答案	115
第6章 二次型	119
6.1 基本概念与定理	119
6.1.1 二次型的概念	119
6.1.2 化二次型为标准形	119
6.1.3 用正交变换法化二次型为标准形	120
6.1.4 二次型和矩阵的正定性及其判别法	120
6.2 例题分析	121
习题与答案	127
附录1 线性代数解题的八种思维定势	130
附录2 历年全国硕士研究生入学考试线性代数试题解答	137

第 1 章 行 列 式

1.1 行列式的概念

1.1.1 排列与逆序

1. n 级排列

由 n 个自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个无重复的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 称为一个 n 级排列. n 级排列共有 $n!$ 个.

2. 逆序

在一个 n 级排列中, 如果一个较大数排在一个较小数之前, 就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 用 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 或 τ 表示排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数.

如果排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数为偶数, 则称它为偶排列; 如果排列的逆序数为奇数, 则称它为奇排列.

3. 对换

排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 交换任意两数 i_i 与 i_s 的位置, 称为一次对换. 对换改变排列的奇偶性. 任何一个排列都可经过若干次对换变成自然顺序, 并且所做对换的次数与这个排列有相同的奇偶性.

【解题提示】 任一排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数可计算如下:

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1 \text{ 后边比 } i_1 \text{ 小的数的个数} + i_2 \text{ 后边比 } i_2 \text{ 小的数的个数} \\ + \cdots + i_{n-1} \text{ 后边比 } i_{n-1} \text{ 小的数的个数}.$$

【例 1.1】 求下列排列的逆序数, 并确定它们的奇偶性.

$$(1) 5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4 \quad (2) n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \quad (3) 1 \ 3 \ 5 \cdots (2n-1) \quad 2 \ 4 \ 6 \cdots (2n)$$

【解】 (1) $\tau(5 \ 3 \ 2 \ 1 \ 4) = 4 + 2 + 1 + 0 = 7$, 此排列为奇排列.

$$(2) \tau(n(n-1) \cdots 2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

由于 $\frac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性需根据 n 而定, 故讨论如下:

当 $n = 4k$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+1$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 是偶数;

当 $n = 4k+2$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 是奇数;

当 $n = 4k+3$ 时, $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 是奇数.

综上所述,当 $n = 4k$ 或 $4k + 1$ 时,此排列为偶排列;当 $n = 4k + 2$ 或 $4k + 3$ 时,此排列为奇排列,其中 k 为任意非负整数.

(3) 该排列中前 n 个数 $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$ 之间不构成逆序,后 n 个数 $2, 4, 6, \dots, (2n)$ 之间也不构成逆序,只有前 n 个数与后 n 个数之间才构成逆序.

$$\tau(1\ 3\ 5\ \cdots\ (2n-1)\ 2\ 4\ 6\ \cdots\ (2n)) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

奇偶性情况与(2)完全一致.

1.1.2 n 阶行列式的定义

由 n^2 个元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) 组成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 其值是所有取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和, 各项的符号由 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 决定. 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为偶排列时, 对应项取正号; 当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 为奇排列时, 对应项取负号. 即

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中, $D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和, $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 为排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

注: n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$ 的项可以写成

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中, $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 都是 n 级排列.

【例 1.2】填空题

- (1) 在五阶行列式中, 项 $a_{12} a_{31} a_{54} a_{43} a_{25}$ 的符号应取_____;
- (2) 四阶行列式中, 带负号且包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项为_____;
- (3) 如果 n 阶行列式中负项的个数为偶数, 则 $n \geq$ _____;
- (4) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 $n^2 - n$, 那么此行列式的值为_____;
- (5) 在函数

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

中, x^3 的系数是_____.

【解】 (1) 正 (2) $a_{14} a_{23} a_{31} a_{42}$ (3) 3 (4) 0 (5) -1

【分析】 (1) 适当调整该项元素位置, 使第一个下标按自然顺序排列, 则第二个下标排列为 2 5 1 3 4, 其逆序数为 4, 故取正号. 或由 $\tau(1\ 3\ 5\ 4\ 2) + \tau(2\ 1\ 4\ 3\ 5) = 6$ 也知该项符号为正.

(2) 由行列式的定义可知, 包含因子 a_{23} 和 a_{31} 的项必为 $a_{1i}a_{23}a_{31}a_{4j}$, 其中 i, j 为 2, 4 或 4, 2, 又此项符号为负, 所以 $i 3 1 j$ 为奇排列, 从而 $i = 4, j = 2$.

(3) n 阶行列式中, 共有 $n!$ 项, 其中正、负项各占一半, 若负项的个数为偶数, 必有 $n \geq 3$.

(4) n 阶行列式中, 共有 n^2 个元素, 若等于零的元素个数大于 $n^2 - n$, 那么不等于零的元素个数就小于 n , 又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积, 所以必定为零, 从而此行列式的值也为零.

(5) 根据行列式的定义, 仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 4 个元素相乘才能出现 x^3 项, 这时该项排列的逆序数为 $\tau(2 1 3 4) = 1, (-1)^{\tau(2134)} a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} = -x^3$, 故含 x^3 项的系数为 -1 .

【例 1.3】 选择题

(1) 若 $a_{1i}a_{23}a_{35}a_{5j}a_{44}$ 是五阶行列式中带有正号的一项, 则 i, j 的值为 [].

- A. $i = 1, j = 3$ B. $i = 2, j = 3$
C. $i = 1, j = 2$ D. $i = 2, j = 1$

(2) 下列各项中, [] 为某五阶行列式中带有正号的项.

- A. $a_{13}a_{44}a_{32}a_{41}a_{55}$ B. $a_{21}a_{32}a_{41}a_{15}a_{54}$
C. $a_{31}a_{25}a_{43}a_{14}a_{52}$ D. $a_{15}a_{31}a_{22}a_{44}a_{53}$

(3) 设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式, 则第二对角线上元素的乘积 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$ 在行列式中的符号为 [].

- A. 正 B. 负 C. $(-1)^n$ D. $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

【解】 (1) C (2) D (3) D

【分析】 (1) 由行列式的定义知, 每一项应取自不同行不同列的五个元素之积, 因此 i, j 只能取 1, 2, 故可立即排除 A、B, 当 $i = 1, j = 2$ 时, $a_{11}a_{23}a_{35}a_{52}a_{44} = a_{11}a_{23}a_{35}a_{44}a_{52}$, 且 $\tau(1 3 5 4 2) = 4$ 为偶排列, 故 C 为正确答案; 当 $i = 2, j = 1$ 时, 此项应取负号, 故不正确.

(2) A 中有取自同一行的元素 a_{44}, a_{41} ; B 中有取自同一列的元素, 均不是行列式的项, C, D 虽均为五阶行列式的一项, 但 C 应取负号, 故只有 D 正确.

(3) 因为 $\tau(n(n-1)\cdots 21) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

故 D 为正确答案.

1.2 性质、定理与公式

1.2.1 行列式的基本性质

性质 1 行列式的行和列互换后, 行列式的值不变.

性质 2 行列式的两行(或两列)互换, 行列式改变符号.

推论 若行列式中有两行(或两列)完全相同, 则该行列式的值等于零.

性质 3 数乘行列式等于用这个数乘该行列式中的某一行(或一列).

推论 若行列式中有一行(或一列)元素全为零, 则该行列式的值为零.

性质 4 若行列式中有两行(或两列)元素对应成比例, 则该行列式的值为零.

性质 5 如果行列式的某一行(或一列)的所有元素都可表示为两项之和, 则该行列式等于两个加数所在行列式的和, 这两个行列式的这一行(或列)的元素分别为对应的两个加

数之一,其余各行(列)的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 将行列式某行(或列)的 k 倍加到另一行(或列),其值不变.

注:(1) 设 A, B 均为 n 阶矩阵,一般地 $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$.

(2) 设 A, B 均为 n 阶矩阵一般地, $AB \neq BA$, 但 $|AB| = |BA| = |A| \cdot |B|$.

(3) 设 A 为 n 阶矩阵,则 $|kA| = k^n |A|$, 需特别注意 $|kA| \neq k|A|$.

(4) $|A^T| = |A|$, 特别地,若 A 为 n 阶反对称矩阵,即 $A^T = -A$, 则当 n 为奇数时, $|A| = 0$.

【例 1.4】 填空题

(1) 设 A 为 3×3 矩阵, B 为 4×4 矩阵,且 $|A| = 1, |B| = -2$, 则 $||B|A| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 A 为 3×3 矩阵, $|A| = -2$, 把 A 按列分块为 $A = (A_1, A_2, A_3)$, 其中 $A_j (j = 1, 2, 3)$ 是 A 的第 j 列, 则 $|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设 α, β, γ 是方程 $x^3 + px + q = 0$ 的 3 个根, 则行列式 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 (1) -8 (2) 6 (3) 0

【分析】 (1) 因为 $||B|A| = |B|^3 |A| = (-2)^3 \cdot 1 = -8$, 注意 $||B|A| = |B||A| = (-2) \cdot 1 = -2$ 是错误的.

(2) 此题需要综合应用行列式的性质.

$|A_3 - 2A_1, 3A_2, A_1| = |A_3, 3A_2, A_1| + |-2A_1, 3A_2, A_1|$, 对于 $|-2A_1, 3A_2, A_1|$, 第一列和最后一列对应元素成比例, 故其值为零, 而

$$|A_3, 3A_2, A_1| = -|A_1, 3A_2, A_3| = -3|A_1, A_2, A_3| = -3|A| = 6.$$

(3) 由根与系数的关系知 $\alpha + \beta + \gamma = 0$, 于是

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha + \beta + \gamma & \beta & \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha + \beta + \gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

【例 1.5】 选择题

(1) 设四阶矩阵 $A = [\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4], B = [\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$, 其中 $\alpha, \beta, \gamma_2, \gamma_3$ 和 γ_4 均为 4 维列向量, 且已知行列式 $|A| = 4, |B| = 1$, 则行列式 $|A + B| = [\quad]$.

A. 5 B. 4 C. 50 D. 40

(2) 设 A 为四阶矩阵, 且 $|A| = 2$, 把 A 按列分块为 $A = [A_1, A_2, A_3, A_4]$, 其中 $A_j (j = 1, 2, 3, 4)$ 是 A 的第 j 列, 则 $|-A_2, -A_1, -A_4, -A_3| = [\quad]$.

A. -2 B. 2 C. 1 D. 0

(3) 设 $|A|$ 是三阶矩阵 A 的行列式, A 中 3 个列向量以 A_1, A_2, A_3 表示, 即 $|A| =$

$|A_1, A_2, A_3|$, 则 $|A|$ 等于 [].

A. $|A_3, A_2, A_1|$

B. $| -A_1, -A_2, -A_3 |$

C. $|A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1|$

D. $|A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3|$

(4) 设 A 是三阶方阵且 $|A| = 2$, 则 $| -A | |A| = []$.

A. 4

B. -4

C. 16

D. -16

(5) A 是 n 阶矩阵, k 是非零常数, 则 $|(kA)^*| = []$.

A. $k|A|^{n-1}$

B. $|k||A|^{n-1}$

C. $k^{n(n-1)}|A|^{n-1}$

D. $k^{n-1}|A|^{n-1}$

(6) 行列式 $\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = []$.

A. 1000

B. -1000

C. 2000

D. -2000

【解】 (1) D (2) B (3) D (4) D (5) C (6) C

【分析】 (1) 这里首先应区分矩阵相加是对应元素相加, 而行列式相加(或拆分), 只有一行(列)不同, 其余各行(列)都相同时才能相加(或拆分). 另外应注意 $|A+B| \neq |A| + |B|$, 正确计算如下:

$$\begin{aligned} |A+B| &= |\alpha + \beta, 2\gamma_2, 2\gamma_3, 2\gamma_4| = 8|\alpha + \beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| \\ &= 8[|\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4| + 8|\beta, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4|] = 8(4+1) = 40 \end{aligned}$$

故选 D.

(2) 利用行列式的性质有

$$\begin{aligned} | -A_2, -A_1, -A_4, -A_3 | &= (-1)^4 |A_2, A_1, A_4, A_3| \\ &= |A_2, A_1, A_4, A_3| = -|A_1, A_2, A_4, A_3| \\ &= |A_1, A_2, A_3, A_4| = |A| = 2. \end{aligned}$$

故 B 为正确答案.

(3) 同(1)、(2)题类似, 有

$$\begin{aligned} |A_3, A_2, A_1| &= -|A_1, A_2, A_3| = -|A|; \\ | -A_1, -A_2, -A_3 | &= (-1)^3 |A_1, A_2, A_3| = -|A|; \\ |A_1 + A_2, A_2 + A_3, A_3 + A_1| &= |2(A_1 + A_2 + A_3), A_2 + A_3, A_3 + A_1| \\ &= 2|A_1 + A_2 + A_3, -A_1, -A_2| \\ &= 2|A_1, -A_1, -A_2| + 2|A_2 + A_3, -A_1, -A_2| \\ &= 2|A_2, -A_1, -A_2| + 2|A_3, -A_1, -A_2| \\ &= 2|A_3, -A_1, -A_2| \\ &= 2|A_3, A_1, A_2| = 2|A_1, A_2, A_3| \\ &= 2|A|. \end{aligned}$$

这里先把后两列加到第一列; 提取公因子之后, 又把第一列的 (-1) 倍加到第二、三列; 最后利用行列式的加法性质.

$$|A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3| = |A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2| + |A_1, A_1 + A_2, A_3|$$

$$\begin{aligned}
 &= |A_1, A_1 + A_2, A_3| \\
 &= |A_1, A_1, A_3| + |A_1, A_2, A_3| \\
 &= |A_1, A_2, A_3| = |A|
 \end{aligned}$$

故 D 为正确答案.

$$(4) | -A | = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8 \times 2 = -16.$$

$$(5) (kA)^* = k^{n-1} A^*, |(kA)^*| = |k^{n-1} A^*| = (k^{n-1})^n |A^*| = k^{n(n-1)} |A|^{n-1}.$$

(6) 把第二列的 (-1) 倍加到第一列, (-2) 倍加到第三列得

$$\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 100 & 4 \\ -1 & 200 & -5 \\ 1 & 300 & 0 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2000.$$

【例 1.6】 选择题

(1) 设 A, B 是 $n (n \geq 2)$ 阶方阵, 则必有 [].

- A. $|A+B| = |A| + |B|$ B. $|AB| = |BA|$
 C. $||A||B| = ||B||A|$ D. $|A-B| = |B-A|$

(2) 设 A 为 n 阶方阵, 则 $|A| = 0$ 的必要条件是 [].

- A. 两行(列) 元素对应成比例 B. 必有一行为其余行的线性组合
 C. A 中有一行元素全为零 D. 任一行为其余行的线性组合

【解】 (1) B (2) B

【分析】 (1) 一般地, $|A+B| \neq |A| + |B|$; $|A-B| = |-(B-A)| = (-1)^n |B-A|$; $||A||B| = |A|^n |B|$, $||B||A| = |B|^n |A|$, 故 $||A||B| \neq ||B||A|$; 只有 $|AB| = |A||B| = |B||A| = |BA|$ 正确.

(2) A、C、D 均为 $|A| = 0$ 的充分条件, 而非必要条件, 故选 B.

1.2.2 行列式按行(列) 展开定理

设 $D = |a_{ij}|$ 为 n 阶行列式, 则有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = a_{i1} A_{k1} + a_{i2} A_{k2} + \cdots + a_{in} A_{kn} = \begin{cases} D, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = a_{1j} A_{1k} + a_{2j} A_{2k} + \cdots + a_{nj} A_{nk} = \begin{cases} D, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

其中, A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

k 阶子式: n 阶行列式中, 任取 k 行 k 列, 这 k 行 k 列交点处元素按原来的顺序位置组成的 k 阶行列式称为原 n 阶行列式的 k 阶子式, 记为 M_s .

k 阶子式的代数余子式: 划去 k 阶子式所在的 k 行 k 列元素, 剩下的元素按原来的顺序位置组成的 $n-k$ 阶行列式称为 k 阶子式的余子式, 记为 N_s , 若 k 阶子式所在行的序数是 $i_1 i_2 \cdots i_k$, 列的序数是 $j_1 j_2 \cdots j_k$, 则称

$$A_s = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N_s$$

为 M_s 的代数余子式.

行列式按 k 行(列)展开(又称拉普拉斯展开):

在行列式 D 中,任意取定 k 行或 k 列($1 \leq k \leq n-1$),则这 k 行或 k 列中所有的 k 阶子式(共有 $C_n^k = t$ 个,记为 $M_1, M_2, \dots, M_t$)分别与它们对应的代数余子式的乘积之和等于该行列式,即

$$D = \sum_{i=1}^t M_i A_i = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \dots + M_t A_t$$

注:(1) 记 $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵,则有

$$AA^* = A^*A = |A|E$$

此公式对于涉及到伴随矩阵 A^* 的计算或证明题非常有用,应当牢记.

(2) 设 A 为 n 阶可逆矩阵,则

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

(3) 设 A^* 是 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵,则

$$|A^*| = |A|^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

(4) 设 A 为 m 阶方阵, B 为 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} A & * \\ O & B \end{vmatrix} = |A| |B|, \quad \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A| |B|$$

但应注意

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A| |B|$$

1.2.3 克莱姆(Cramer)法则

方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

称为 n 元非齐次线性方程组,当其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

时,此方程组有唯一解,且可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中 D_j ($j = 1, 2, \dots, n$) 是将行列式 D 中第 j 列元素换成常数 $b_1, b_2, \dots, b_n$,其余元素不变而得到的行列式的值.

当 $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ 时,对应方程组称为 n 元齐次线性方程组.

注:(1) 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

(2) n 元非齐次线性方程组,当系数行列式 $D \neq 0$ 时有唯一解;当系数行列式 $D = 0$ 时,克莱姆法则失效,方程组可能有解也可能无解.

(3) n 元齐次线性方程组, 当系数行列式 $D \neq 0$ 时, 有唯一零解; 当系数行列式 $D = 0$ 时, 齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

【例 1.7】 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

其中 $a_i \neq a_j (i \neq j; i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

则线性方程组 $A^T X = B$ 的解是_____.

【解】 因为 $|A^T| \neq 0$

所以 $A^T X = B$ 有唯一解 $x_j = \frac{D_j}{D} (j = 1, 2, \cdots, n)$

显然 $D_1 = |A^T| = D, D_2 = \cdots = D_n = 0$

所以有解为 $(1, 0, \cdots, 0)^T$.

【例 1.8】 选择题

(1) 设线性方程组 $\begin{cases} bx - ay = -2ad \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$, 则[].

A. 当 a, b, c 取任意实数时, 方程组均有解

B. 当 $a = 0$ 时, 方程组无解

C. 当 $b = 0$ 时, 方程组无解

D. 当 $c = 0$ 时, 方程组无解

(2) 对于非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

以下结论中, [] 不正确.

A. 若方程组有解, 则系数行列式 $D \neq 0$

B. 若方程组无解, 则 $D = 0$

C. 若方程组有解, 或者有唯一解, 或者有无穷多解

D. $D \neq 0$ 是方程组有唯一解的充分必要条件

【解】 (1) A (2) A

【分析】

(1) 方程组的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc$

当 $abc \neq 0$ 时, 方程组有唯一解; 当 $a = 0$ 或 $b = 0$ 或 $c = 0$ 时, 代入方程后, 易知方程组均有无穷多解, 故 A 正确.

$$(2) \text{ 比如方程组 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

的系数行列式为零,此方程组显然有解,故 A 是错的,应选 A. 易证明 B、C、D 都是正确的.

1.3 行列式的计算

1.3.1 几种特殊行列式的计算

$$(1) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}$$

1.3.2 行列式的计算方法

- (1) 直接利用行列式的定义进行计算.
- (2) 利用行列式的性质化为三角形行列式算法,包括上、下三角形行列式.
- (3) 降阶法:利用按行(列)展开定理,化行列式为较低阶行列式的计算.
- (4) 递推公式法:应用行列式的性质,把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式,再根据此关系式递推求得所给 n 阶行列式的值.
- (5) 用数学归纳法进行计算或证明.
- (6) 利用已知行列式进行计算,其中最重要的已知行列式是范德蒙行列式.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

以上方法中,前三种是最基本的算法,应熟练掌握.需要指出的是,一个行列式的计算方法往往不是唯一的,有时甚至需多种方法交叉使用.

【解题提示】 由于行列式的计算方法很多,具体到一个题目用什么方法去求解往往不是一件容易决定的事情.我们从不从方法的角度去进行分析,而是从所求行列式的特征去进行归纳,掌握了行列式的特征,也就自然找到了求解方法.

特征 1 非零元素特别少(一般不多于 $2n$ 个),可以直接利用行列式的定义求解.

【例 1.9】 计算下列行列式

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix}; \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}.$$

【解】 (1) 此行列式刚好只有 n 个非零元素 $a_{1, n-1}, a_{2, n-2}, \cdots, a_{n-1, 1}, a_{n, n}$, 故非零项只有一

项: $a_{1, n-1} a_{2, n-2} \cdots a_{n-1, 1} a_{n, n}$, 又 $\tau((n-1)(n-2)\cdots 1n) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, 因此

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1997 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1998 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1 \cdot 2 \cdots 1997 \cdot 1998 = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} 1998!$$

(2) 由行列式的定义可知, 此行列式的非零项只有两项, 即 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 和 $a_{12} a_{23} \cdots a_{n-1, n} a_{n1}$, 故

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12\cdots n)} a \cdot a \cdots a + (-1)^{\tau(23\cdots n1)} b \cdot b \cdots b \\ = a^n + (-1)^{n-1} b^n$$

特征 2 对于所有行(或列)对应元素相加后相等的行列式, 可把第二至 n 行(或列)加到第一行(或第一列), 提取公因子后再化简计算.

【例 1.10】 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

【分析】 所有行对应元素相加后都等于 $a + (n-1)b$, 所有列对应元素相加后也都等于 $a + (n-1)b$, 符合特征 2.

【解】 将第二列至第 n 列加到第一列, 然后提出公因子 $a + (n-1)b$, 则

$$D_n = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

再将第一行的 (-1) 倍加到下面各行, 得