研究生教育精品教材

力学

FEITANXINGBENGOULILUN
JIQIYOUXIANYUANSHIXIAN

非弹性本构理论及其有限元实现

康国政　编著

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

研究生教育精品教材——力学

非弹性本构理论及其有限元实现

康国政　编著

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（CIP）数据

非弹性本构理论及其有限元实现 / 康国政编著. —成都：西南交通大学出版社，2010.8
研究生教育精品教材. 力学
ISBN 978-7-5643-0689-2

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①康… Ⅲ. ①弹性力学－本构关系－有限元分析 Ⅳ. ①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 113927 号

研究生教育精品教材——力学
非弹性本构理论及其有限元实现
康国政　编著

责任编辑	张宝华
封面设计	本格设计
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮编	610031
网址	http：//press.swjtu.edu.cn
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	170 mm×230 mm
印张	17.25
字数	309 千字
版次	2010 年 8 月第 1 版
印次	2010 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-0689-2
定价	32.00 元

图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

固体材料的本构理论研究是固体力学学科的一个重要的研究方向。材料本构理论的合理性和准确性是对固体材料与结构进行的力学行为的理论和数值模拟分析的基础。也就是说，材料的本构关系在固体材料和工程结构的强度、疲劳与断裂和安全性、可靠性评价分析中具有举足轻重的作用，一直是固体力学工作者致力于解决的关键问题，特别是针对复杂加载和复杂环境下材料的本构理论研究。

近年来，随着计算技术和计算条件的日新月异，越来越多的工程结构分析采用大型的有限元分析软件来进行，如 ABAQUS，ANSYS，MSC-NASTRAN 和 MSC-MARC 等。在这些有限元分析软件中，均为用户提供了一定的材料本构模型，对一些结构构件的弹塑性变形问题的分析提供了多种材料模型，以供选择。然而，这些分析软件的标准材料库里的材料模型大都是一些经典的弹性和非弹性本构模型，对于材料在复杂加载条件和复杂环境下的变形行为不能进行合理的描述。例如，对材料的循环变形行为，特别是近年来引起固体力学界广泛重视的棘轮变形行为，已有的标准材料模型并不能提供合理的描述，需要结合当前的最新研究成果将新发展的本构模型移植入大型有限元分析程序中。

因此，非常有必要对固体力学学科和相关工程学科专业（如机械、土木、航天航空和材料学科等）的研究生开设材料非弹性本构理论的相关基础知识，以及如何将发展的本构模型移植入大型有限元程序中这方面的课程。这样一方面能使学生掌握构建材料本构关系的基础理论知识和基本方法；另一方面又使学生了解本构方程如何在大型有限元分析中发挥作用，如何将新发展的本构模型在有限元程序中实现，进而对工程结构构件在复杂载荷和复杂环境下的变形行为以及相应的疲劳、断裂和安全性以及可靠性问题进行合理的数值模拟和评价。

为此，作者于 2003 年在西南交通大学应用力学与工程系（现改为力学与工程学院）面向全校工科专业研究生开设了《非弹性本构理论及其有限元实现》这门课程，专门讲解非弹性本构理论的构建基础和构建方法以及本构模

型的有限元实现中涉及的一些关键问题（如应力积分算法的构建和一致切线刚度矩阵的推导），目的是让学生在力学基础理论的建立和基础理论的工程应用这两方面的结合上有一个全面的认识。课程开设 6 年多来，学生反应良好，起到了不错的教学效果。另外，为了让学生更好地学习这门课程，作者在 2005 年 3 月参考 Simo 和 Hughes 于 1998 年出版的《Computational Inelasticity》一书和结合作者所在的研究小组在材料循环变形行为的实验和本构模型研究方面取得的最新研究成果，编写了一本《非弹性本构理论及其有限元实现》讲义。该讲义详细介绍了已有的经典塑性和粘塑性本构模型的理论体系和相应的应力积分算法，以及材料棘轮行为的实验研究和本构模型研究方面的最新成果，同时，特别强调了本构理论在工程结构分析方面的应用。

然而，在编写的讲义中，为了与参考的外文教材相对应，对于原外文教材中采用的许多数学描述没有进行任何改动。这样使得原讲义中许多知识点因为不必要的数学描述而让工科学生不易理解，进而严重影响了学生的学习热情和自学过程，因此，有必要对此进行修改。另外，近几年来，棘轮行为的研究又取得了许多重要的研究进展，原讲义中未能包含这样的新知识，需要进行必要的增补。因此，作者在原有讲义的基础上进行了改编。在新教材中，作者对原讲义中的所有复杂的数学描述进行了删减，直接采用具体的文字描述来阐明一些理论公式的物理意义，在此基础上对理论公式进行了简化，这样更容易为固体力学专业以及其它工科专业学生所理解和接受。另外，新教材中加大了对材料循环变形行为最新研究进展的介绍，力图让学生了解如何发现实验结果的新现象、新规律进而构建相应的材料本构理论，以及如何在工程结构分析中使用这样一些反映材料新的变形行为的本构理论的具体应用。还有，结合其他关于塑性本构理论的相关书籍，对关于传统的、经典的本构模型及其数值实现的部分章节进行了修改，使之更加趋于完善和系统。

本书共分八章。第一章是绪论部分简单介绍了材料本构模型构建方面必须遵循的一些连续介质力学和热力学的基本原理以及有限分析方面的基础知识；第二章从最简单的经典一维塑性和粘塑性本构理论出发，介绍了一维本构理论的理论框架和构建过程以及数值实现方法；第三章讨论了三维形式下的经典塑性和粘塑性本构理论的理论框架；第四章则详细讨论了三维塑性和粘塑性本构模型的积分算法和数值实现过程；第五章和第六章则结合作者所在的课题组对材料循环本构理论方面的最新研究成果，以及材料的循环变形行为及其本构描述进行了详细的介绍，同时给出了这些先进本构模型的有限元实现过程；第七章和第八章则简单介绍了有限塑性理论方面的一些经典的

本构模型及其数值实现方法。相对于小变形理论来说，有限变形理论的发展至今仍未成熟，有待于大力发展。

在本书中，第二章、第三章、第四章是参考 Simo 和 Hughes 于 1997 年出版的《Computational Inelasticity》一书中的相关章节修改而成的；第七章、第八章则是参考 Simo 和 Hughes1998 年出版的《Computational Inelasticity》和 Khan 和 Huang 于 1995 年出版的《Continuum Theory of Plasticity》两书中的相关章节修改而成的。作者对上述两书的著者表示衷心的感谢，已在正文中对此进行了必要的引用标注。另外，本书的第五章、第六章的内容来自本课题组的最新研究成果，这些研究是在多个国家自然科学基金项目（19772041，10402037 和 10772153）的资助下完成的，于此也对国家自然科学基金委员会的资助表示感谢。

本书的出版得到了西南交通大学研究生特色教材出版基金的资助，作者对此深表感谢。另外，作者对本书中引用的所有研究成果的作者表示感谢，同时，感谢西南交通大学的高庆教授、杨翊仁教授、沈火明教授对本教材出版的支持，也感谢本课题组所有成员在材料循环本构关系研究方面做出的不懈努力。

康国政

2010 年元旦于德国波鸿

目　录

第一章　绪　论

第一节　非弹性本构理论概述

一、材料的本构理论

1. 本构理论的含义

本构理论，从广义上来讲，是指自然界中某一作用与该作用产生的效果两者之间的关系。例如，电压与在电压的作用下导体产生的电流之间的关系；温差与由温差在导热物体中引起的热流之间的关系；力和可变形物体在力的作用下产生的变形之间的关系；水力梯度和由此引起的土体材料渗流之间的关系等。

从狭义上来讲，在固体力学范畴讨论的材料本构理论是专指力和固体材料在力作用下产生的变形之间的关系，也称为材料的本构关系。简而言之，是讨论固体材料中的应力和应变之间的关系，而描述这一关系的数学表达式称为本构方程。最简单的本构关系就是我们在《材料力学》课程中涉及的广义 Hook 定律，即线性弹性本构关系。

采用连续介质力学方法求解工程问题时，所采用的材料本构关系能否较准确地反映工程材料的真实性状是能否得到合理解答的关键环节之一，而本构关系是进行固体材料与结构力学分析的基础。

2. 本构理论的分类

按照本构理论描述的材料变形行为的特性来分，大致可分为：弹性模型、粘弹性模型、塑性模型、粘塑性模型和损伤模型等。

弹性本构模型是建立在弹性理论基础上的本构模型，包括线性弹性本构模型（即广义胡克定律）和非线性弹性本构模型。其描述的是可恢复的变形，即弹性变形与外加应力之间的关系。

粘弹性本构模型是描述与时间相关的弹性变形行为的本构模型，即反映可恢复变形与外加应力及时间之间的关系。

塑性模型是建立在塑性理论基础上的一种与时间无关的本构模型，包括屈服面、流动准则和硬化准则。其描述的是不可恢复变形，即塑性变形与外加应力之间的关系，又可分为理想塑性模型和硬化塑性模型两大类。另外，也可将其分为刚性-塑性模型（即不考虑材料的弹性变形）和弹性-塑性模型（即通常提到的弹塑性本构模型）。

粘塑性模型是建立在粘塑性理论基础上的一种与时间相关的本构模型，它反映了塑性和粘性之间的共同作用，也可分为刚性-粘塑性本构模型和弹性-粘塑性本构模型（即通常说的粘弹塑性本构模型）。针对塑性和粘性之间的共同作用，也有两种处理方法，分别对应于两类粘塑性本构模型，即分离型和统一型粘塑性本构模型。分离型粘塑性本构模型是将塑性和粘性变形（即蠕变变形）分离开来，分别引入各自的流动准则；而统一型粘塑性本构模型（简称统一粘塑性模型）不再区分塑性和粘性变形，用一个统一的流动准则来反映与时间相关的塑性变形的演化。

损伤模型是建立在损伤力学基础上的本构模型，要考虑损伤与变形的耦合作用。

3. 本构原理

在讨论如何建立材料的本构关系之前，应理解以下几点:

(1) 材料的本构关系不能理解为仅仅是关于材料本身特性的描述，而应该是与其外部环境和外部作用过程紧密联系在一起的一种关系。

(2) 不同类型的材料具有不同的微观结构，研究材料中微观结构的基本特征及其在变形过程的演化规律，对建立合理的本构关系是十分重要的。从材料变形的微观机制出发来研究本构关系不仅可以更深入地认识材料变形和运动规律的本质，而且还可避免在本构关系中盲目地引进一些不必要的材料参数。因此，理想的本构模型应该是通过“宏观-细观-微观”相结合的方法来建立。

(3) 材料本构关系的建立不能理解为仅仅是对试验数据的简单拟合，而是应该结合实验揭示的演化规律，在一定的理论框架下通过引入一系列具有物理背景的演化方程来进行构建。

当然，试验研究是揭示材料变形特征和演化规律，进而建立本构模型所必需的一个前提条件。为了减少实验的盲目性，并确保所建立的本构关系的准确性，需对本构关系加以必要的限制条件，使其遵循一定的原则。这些原则即称为本构原理。几个比较常用的原理为:

（1）坐标不变性原理。

本构关系应该与坐标系的选取无关。当采用张量的绝对记法时，这一条件可自然满足。

（2）相容原理。

本构关系应该与守恒定律相一致，并满足热力学第二定律所要求的限制条件。

（3）关于材料对称性的不变性原理。

本构关系应满足与材料对称性有关的、在某些变换群下的不变性要求。

（4）决定性原理。

如果在 t_0 时刻物体中所有物质点的热力学状态是已知的，则该时刻物质点 $\boldsymbol{X}$ 在以后时刻 t 的应力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}, t)$ 完全由物体中全部质点自 t_0 到 t 的运动历史决定。

（5）局部作用原理。

t 时刻对应于物质点 $\boldsymbol{X}$ 的应力仅仅依赖于该物质点附近无限小邻域内物质点的运动历史，而与远离物质点的运动历史无关。

（6）客观性原理。

材料的本构关系不应随观测者的改变而改变，即在时空变换下，本构关系的形式是不变的，且本构关系中的张量应该是客观性张量。

张量的客观性定义（Khan 和 Huang，1995）：

对时空变换：$\{\boldsymbol{x}, t\}$ 和 $\{\boldsymbol{x}^*, t^*\}$，存在：

$$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}(t)\,, \quad t^* = t + a \tag{1.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{Q}(t)$ 和 $\boldsymbol{c}(t)$ 分别为正交张量和向量，a 为某一常数。实际上，$\boldsymbol{Q}(t)$ 为刚体转动，$\boldsymbol{c}(t)$ 为刚体平移。

在满足（1.1.1）式的两个作相对刚体运动的时空参考系中，若标量场 ρ，向量场 $\boldsymbol{l}$ 和二阶张量场 $\boldsymbol{e}$ 分别满足：

$$\rho^* = \rho\,, \quad \boldsymbol{l}^* = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{l}\,, \quad \boldsymbol{e}^* = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{1.1.2}$$

则分别称 ρ，$\boldsymbol{l}$ 和 $\boldsymbol{e}$ 是客观的。

二、热力学基础

由于材料的应力-应变行为也是一种典型的热力学过程，应该满足基本的

热力学方程，因此，本节将简单地介绍在讨论材料的变形行为及其本构方程建立过程中涉及的一些基本的热力学方程。系统的热力学基础介绍参见其他关于连续介质与热力学方面的书籍，如范镜泓和高芝晖（1987）、黄克智和黄永刚（1999）、黄筑平（2003）出版的相关论著。

1. 守恒定律及热力学第一定律

由于在讨论可变形固体材料在外力作用下的变形行为及其应力-应变关系的建立过程中，必然涉及物体、运动和力这三个物理过程中的基本要素，因此，可变形固体材料的变形过程也应该满足控制一般物理过程的一些基本守恒定律。现简述如下，详细讨论请参见文献（黄克智和黄永刚（1999），黄筑平（2003））。

（1）质量守恒定律：

在物体受外力作用而产生的运动过程中，不发生物体质量的损失或增加，即在运动过程中物体的质量保持不变，称为质量守恒定律。可用数学公式表述为

$$\dot{\rho}+\rho\nabla_{x}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{1.1.3}$$

其中ρ是物体当前时刻的密度，$\boldsymbol{v}$为物体当前时刻的速度矢量，∇_x为梯度算子。

（2）动量守恒定律：

动量守恒定律是指物体中所有点的总动量的变化率等于作用在该物体上的所有外力的矢量和，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{T}\mathrm{d}s \tag{1.1.4}$$

其中$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$表示物质导数；$\Omega$为物体当前时刻的体积；$\partial\Omega$为物体边界面；$\boldsymbol{f}$为单位质量上物体所受的体力向量；$\boldsymbol{T}$为作用在物体边界面上的张力向量，且有

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$$

其中$\boldsymbol{\sigma}$为物体的应力张量，$\boldsymbol{n}$是边界面的外法线方向向量。

利用散度定理：$\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{T}\mathrm{d}s=\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=\int_{\Omega}\nabla_{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega$，则（1.1.4）式可写成

$$\int_{\Omega}\left(\nabla_{x}\cdot\boldsymbol{\sigma}+\rho\boldsymbol{f}-\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}\Omega=0 \tag{1.1.5}$$

由此可得

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} = \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1.1.6}$$

这就是 Cauchy 运动方程。对于静力平衡情形，$\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t = \boldsymbol{0}$，则由（1.1.6）式可得静力平衡方程：

$$\nabla_x \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{1.1.7}$$

（3）动量矩守恒定律：

动量矩守恒定律是指物体中所有点的总动量矩的变化率等于作用在该物体上的所有矩的矢量和，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}(\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{v})\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}(\boldsymbol{r}\times\rho\boldsymbol{f})\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T})\mathrm{d}s \tag{1.1.8}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 是所考虑物体点的位置向量。利用如下积分定理

$$\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T})\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s = \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s = \int_{\Omega}\nabla_x\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Omega \tag{1.1.9}$$

可得

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} \tag{1.1.10}$$

这就是应力张量的对称性。

（4）能量守恒定律（热力学第一定律）**：**

能量守恒定律是指对于一个封闭系统，所有外部作用对系统所做的总功率必须等于系统总能量的增加率。系统的能量包含机械能、化学能、电能、磁能及热能，但对于本书讨论的材料在外力作用下的变形来说，我们只关心机械能和热能。

对以 $\partial\Omega$ 为边界、体积为 Ω 的物体，设

（1）E 为内能，e 为比内能，则有 $E = \int_{\Omega}\rho e\mathrm{d}\Omega$；

（2）K 为动能，则 $K = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega$；

（3）Q 为物体 Ω 的热能吸收率，可以由内部热源产生，也可以由外界通过热传递产生，即 $Q = \int_{\Omega}\rho r\mathrm{d}\Omega - \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$，其中 r 为内热的质量密度，$\boldsymbol{q}$ 是热流矢量，$\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的外法线方向；

（4）$P_{(e)}$ 是外力的实际功率，即 $P_{(e)} = \int_{\Omega}\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega + \int_{\partial\Omega}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s$，

则**热力学第一定律为：**

$\forall\Omega$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(E+K)=P_{(e)}+Q \tag{1.1.11}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\left(e+\frac{1}{2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\right)\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+r)\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s \tag{1.1.12}$$

利用散度定律，有

$$\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n})\mathrm{d}s=\int_{\partial\Omega}[(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}]\mathrm{d}s=\int_{\Omega}\nabla_x\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q})\mathrm{d}\Omega \tag{1.1.13}$$

利用（1.1.13）式，由（1.1.12）式可得

$$\int_{\Omega}\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Omega=\int_{\Omega}\left[\rho(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}+r)+\nabla_x\cdot(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{q})-\rho\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}\Omega \tag{1.1.14}$$

再利用前面建立的动量守恒定律，即（1.1.6）式，代入上式可得

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}+\rho r-\nabla_x\cdot\boldsymbol{q} \tag{1.1.15}$$

写成分量形式为

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\sigma_{ij}D_{ij}+\rho r-q_{i,i} \tag{1.1.16}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 为变形率张量。在小变形假设下，（1.1.16）式可写成

$$\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}=\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\rho r-q_{i,i} \tag{1.1.17}$$

其中 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\dot{\varepsilon}_{ij})$ 为应变率张量。

2. 热力学第二定律：Clausius–Duhem 不等式

在实际的物理过程中，有的不仅要满足能量守恒定律，还要遵循特定的能量转移方向。例如，热量只能由体系中的高温位置转移到体系中的低温位置，而不可能由低温位置转移到高温位置。再如，一个物体的动能可以通过摩擦转换成热量，物体的运动会由于摩擦阻力而逐渐停止下来，但是，摩擦生成的热永远也不可能转化为物体的动能而推动物体的运动。热力学第二定律正是控制能量转换方向的基本定律。热力学第二定律认为在一个物质体系中存在一个热力学状态变量——熵，熵的变化决定了系统中能量转移的方向。

熵反映的是一种与温度变化相关的能量变化。对域 Ω 有

$$S=\int_{\Omega}\rho s\mathrm{d}\Omega \tag{1.1.18}$$

其中 S 即为熵，而 s 为比熵密度。

热力学第二定律： 热力学第二定律指出，熵的生成率总是大于或等于热吸收率除以温度，即$\forall\Omega$，有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}\geqslant\int_{\Omega}\frac{\rho r}{T}\mathrm{d}\Omega-\int_{\partial\Omega}\frac{\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}}{T}\mathrm{d}s \tag{1.1.19}$$

也可由散度定理写成

$$\int_{\Omega}\left(\rho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\nabla_x\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{T}-\frac{\rho r}{T}\right)\mathrm{d}\Omega\geqslant 0 \tag{1.1.20}$$

由于 $\forall\Omega$ 都成立，则由上式可得

$$\rho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\nabla_x\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{T}-\frac{\rho r}{T}\geqslant 0 \tag{1.1.21}$$

利用能量守恒定律，消去上式中的 ρr 可得

$$\rho\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}+\nabla_x\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{T}-\frac{1}{T}\left(\rho\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}-\boldsymbol{\sigma}:D+\nabla_x\cdot\boldsymbol{q}\right)\geqslant 0 \tag{1.1.22}$$

由于 $\nabla_x\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{T}=\frac{\nabla_x\cdot\boldsymbol{q}}{T}-\frac{\boldsymbol{q}\cdot\mathbf{grad}(T)}{T^2}$，再乘以 $T\,(>0)$，可得

$$\rho\left(T\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}\right)+\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}-\boldsymbol{q}\cdot\frac{\mathbf{grad}(T)}{T}\geqslant 0 \tag{1.1.23}$$

引入一个新的变量，即比自由能 $\Psi\,(\Psi=e-Ts)$，可得如下 Clausius-Duhem 不等式：

$$\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{D}-\rho\left(\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}+s\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\right)-\boldsymbol{q}\cdot\frac{\mathbf{grad}(T)}{T}\geqslant 0 \tag{1.1.24}$$

在小变形假设下可以写成

$$\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\rho(\dot{\Psi}+s\dot{T})-\boldsymbol{q}\cdot\frac{\mathbf{grad}(T)}{T}\geqslant 0$$

或

$$\sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho(\dot{\Psi} + s\dot{T}) - q_i \frac{T_i}{T} \geqslant 0 \tag{1.1.25}$$

如果该物理过程是一个等温绝热过程，如不考虑温度变化的小变形范围内的弹塑性变形过程，则 Clausius-Duhem 不等式简化为如下形式：

$$\sigma_{ij} : \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho\dot{\Psi} \geqslant 0 \tag{1.1.26}$$

三、线性弹性本构理论

最简单的材料本构理论就是线性弹性本构理论，它反映的是一种可恢复的变形与外加载荷之间的线性关系。实际上在《材料力学》课程中接触到的广义 Hook 定律就是线性弹性本构理论在不考虑温度影响时的具体形式。对线性弹性固体，起作用的状态变量是温度和弹性应变。如果是等温过程，则只剩下唯一的状态变量——弹性应变，即为总应变$\boldsymbol{\varepsilon}$。对于小变形，初始构形可和即时构形相等同。

1. 热力学

为了得到线性弹性本构关系，可选择应变张量分量的正定二次型作为凸的热力学势，即

$$\Psi = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.1.27}$$

其中ρ为体积密度；$\boldsymbol{C}$ 为一个四阶张量，其分量是与温度有关的弹性常数。由连续介质力学理论，则应力张量可定义为

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.1.28}$$

张量 $\boldsymbol{C}$ 常称为弹性张量，为一个对称张量，即

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \tag{1.1.29}$$

（1.1.28）式就是线性弹性介质的广义 Hook 定律。

另一方面，也可以定义一个对偶势，使得

$$\Psi^* = \frac{1}{\rho}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} \tag{1.1.30}$$

由此可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\sigma} \tag{1.1.31}$$

张量 $\boldsymbol{A}$ 是一个四阶对称张量，称为柔度张量。

2. 各向同性线性弹性本构关系

由于各向同性和线性的限制，势 Ψ 应该是应变张量的二次不变量，即为第一不变量的平方 $(J_{\mathrm{I}}^2=[\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})]^2)$ 和第二不变量 $\left(J_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})^2\right)$ 的线性组合，即

$$\Psi=\frac{1}{2\rho}(\lambda J_{\mathrm{I}}^2+4\mu J_{\mathrm{II}}) \tag{1.1.32}$$

进而由（1.1.28）式可得

$$\boldsymbol{\sigma}=\rho\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}=\lambda\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.1.33}$$

或

$$\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij}$$

其中λ和μ是两个 Lame 常数。

另外，通过其对偶形式的运算可得

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma}-\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{1} \tag{1.1.34}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}-\frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

其中 E 为杨氏模量，ν是泊松比。

将应力和应变张量的球形部分（平均值）定义为

$$\sigma_H=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}),\quad \varepsilon_H=\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{1.1.35}$$

将应力和应变张量的偏量部分定义为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{\sigma}-\sigma_H\mathbf{1},\quad \boldsymbol{e}=\boldsymbol{\varepsilon}-\varepsilon_H\mathbf{1} \tag{1.1.36}$$

则有

$$\boldsymbol{S}=2G\boldsymbol{e},\quad \sigma_H=k\varepsilon_H \tag{1.1.37}$$

其他关于各向异性、正交各向异性和横观各向同性材料的线性弹性本构理论参见弹性力学的相关书籍（如徐芝纶（2006），徐秉业等（2007），杨桂通（1998），程昌钧等（2005）编写的《弹性力学》教程）。本书着重讨论已有的非弹性本