

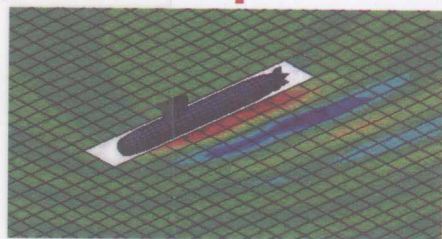
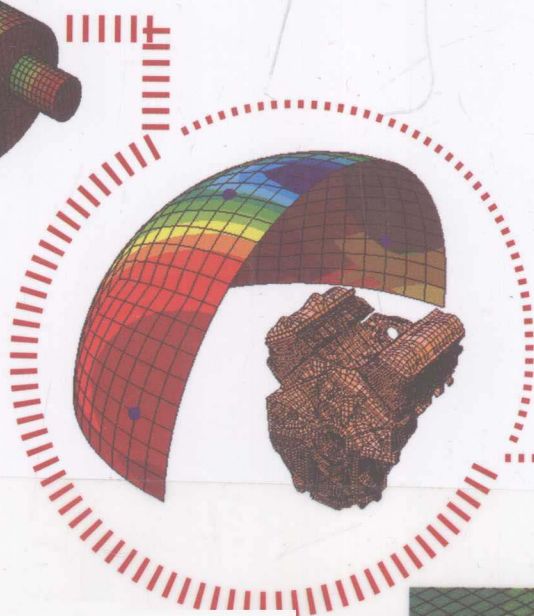
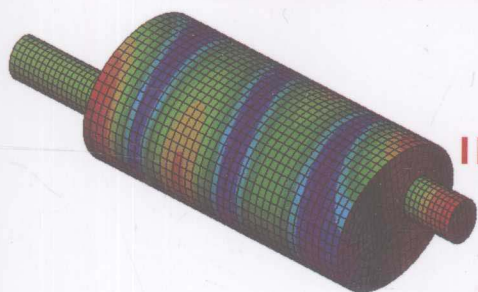
Virtual Lab Acoustics



随书附赠一张光盘

声学仿真计算 高级应用实例

李增刚 詹福良 编著



国防工业出版社

National Defense Industry Press

Virtual. Lab Acoustics

声学仿真计算高级应用实例

李增刚 詹福良 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书所介绍的 Virtual. Lab Acoustics 软件是专门从事噪声分析的 CAE 软件,它在 CATIA V5 平台上集成了原来的 SYSNOISE 功能,并开发出一些新的功能。本书主要讲解数值声学原理,包括声学有限元和声学边界元;如何在 Virtual. Lab 软件中进行声学计算,包括声学有限元的应用、声学边界元的应用、耦合声学有限元的应用、耦合边界元的应用和 ATV 的应用等,内容涉及汽车、发动机、消声器、飞机等,主要包括声学有限元、声学边界元、声学无限元、PML 方法、多级边界元、ATV 和 MATV、传递损失、气动声学、瞬态有限元和瞬态边界元等。

本书读者对象主要是高校的研究生、高年级本科生、高校老师、汽车发动机行业的 CAE 技术人员、航空航天行业的技术人员、船舶行业的技术人员、军工行业的技术人员、消声器厂技术人员、家电手机和其他民用行业的技术人员等,凡是关注结构噪声问题的读者,均可参考本书。

图书在版编目(CIP)数据

Virtual. Lab Acoustics 声学仿真计算高级应用实例/
李增刚,詹福良编著. —北京:国防工业出版社,2010. 8
ISBN 978-7-118-07035-4

I. ①V... II. ①李... ②詹... III. ①噪声控制—
计算机仿真—应用软件, Virtual. Lab Acoustics
IV. ①TB535—39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 163605 号

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 19¼ 字数 483 千字

2010 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 42.00 元(含光盘)

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764

前 言

随着经济和科学技术的不断发展,人们的生活水平越来越高,人类在享受现代文明所带来的快捷方便的同时,对社会环境提出了更高的要求。人们总是希望能在一个安静祥和的环境中工作和生活,但是由于社会的发展,出现了一些人们不想出现的现象,如环境污染、噪声污染等,如何消除这些负面影响,已经成为全世界共同关注的问题。

人们外出旅游、社会交往和上下班都会乘坐各种各样的交通工具,总是希望自己乘坐的交通工具安全舒适,噪声尽可能少;在家庭,当我们使用各种各样的家用电器时,总是希望家电的噪声越小越好;在办公室,人们希望周围的环境安静平和;在工厂,工人通常希望机器发出的噪声越小越好。噪声已经成为威胁人类生存的三大公害之一,许多国家都成立了噪声控制的专门机构,颁布了有关的法规,无论是生产还是管理部门,都应该重视噪声的控制工作。

现代社会的工业日益发达,机器功率不断提高,交通日益发达,汽车速度不断提高,汽车保有量大幅度增加,相伴而来的就是噪声污染日益普遍和严重。噪声对人们的生理和心理都有严重的影响。较强噪声的持续作用,可使人听力下降,严重时导致永久性听力减退,不可恢复,日积月累会产生噪声性耳聋,猛烈的噪声可对人耳造成急性伤害。噪声对人的生理影响很广泛,并不局限于听觉器官,长期的噪声作用,对人的神经系统有显著影响,并引起病理改变;通过神经系统,噪声还影响和伤害人的心血管系统、消化系统、内分泌系统、血液以及视觉器官等。长期工作在高噪声环境中的人易患神经衰弱、眼痛、视力减退、贫血、胃功能紊乱、高血压和心脏缺血性疾病等病症。噪声使人产生紧张感、心情烦躁、易愤怒,工作效率明显降低。

在产品的开发设计阶段,如在汽车开发设计时,若能考虑汽车的噪声问题,可以提高汽车的乘坐舒适性,提高产品的市场竞争力,为企业带来良好的经济效益,对用户而言,可以更好地享受生活乐趣,提高生活质量。

本书介绍的 Virtual. Lab Acoustics 软件就是专门从事噪声分析方面的 CAE 软件,它在 CATIA V5 平台上集成了原来的 SYSNOISE 功能,并开发出了一些新的功能。Virtual. Lab Acoustics 应用范围广泛,用户利用 Virtual. Lab Acoustics 可以仿真计算有关设备噪声的各种数据,并能帮助设计开发者提出合理降低噪声的意见。Virtual. Lab Acoustics 操作简便,使用 Virtual. Lab Acoustics 的用户不必是声学方面的专家,从事噪声分析工作的一般人员都可以精通掌握 Virtual. Lab Acoustics。

Virtual. Lab Acoustics 可以建立声学有限元模型和声学边界元模型,使用者可以根据实际情况建立不同的分析模型,分析可以在时域内计算,也可以在频域内计算,还可以进行结构—声的耦合计算;Virtual. Lab Acoustics 有强大的计算分析能力,能够计算各种各样的声学数据,还

可以和其他 CAE 软件相结合进行数据交互;Virtual. Lab Acoustics 有较好的后处理功能,可以帮助使用者进行各种各样的数据分析。

本书在讲解 Virtual. Lab Acoustics 的各项功能时,为便于理解,用数学公式简单介绍了一些相关理论,如 ATV 理论,不过所介绍的理论都比较简单,很容易理解,用户不必理会这些理论也能较好地掌握 SYSNOISE。

本书内容全面详实,由浅入深,循序渐进,注重理论与操作相结合。全书共分为 10 章,第 1 章介绍数值声学的理论基础,包括声学方程、声学有限元法的理论、耦合声学有限元的理论、直接和间接边界元的理论以及耦合边界元的理论。第 2 章介绍 Virtual. Lab Acoustics 的一些基础知识和基本操作。第 3 章介绍声学有限元的应用,包括消声器的传递损失计算、车内声场的计算、声学无限元的计算以及 PML 方法计算等内容。第 4 章介绍声学边界元的应用,包括发动机的辐射声场、车内噪声的计算、板块贡献量的计算以及多级边界元的应用等内容。第 5 章介绍耦合声学有限元的应用,包括汽车内噪声耦合计算和考虑汽车内饰声场的计算等内容。第 6 章介绍耦合边界元的应用,包括金属盒子的辐射声场、车内声场和音箱的辐射声场的计算等内容。第 7 章介绍声学传递向量 ATV 的应用,包括多工况下的车内声场、发动机辐射声场的计算,以及用求逆的方法反推算结构的振动等内容。第 8 章介绍隔声量的计算,包括管道内金属薄片的格式量计算、双层玻璃的隔声量计算以及飞机舱壁的隔声量计算等内容。第 9 章介绍气动声学的计算,包括风扇噪声的计算和汽车后视镜的计算等内容。第 10 章介绍瞬态声学有限元和瞬态声学边界元的应用。读者如果能按照书中的步骤完成这些计算实例并理解每个步骤的用意,那么就完全掌握了 Virtual. Lab Acoustics 的主要功能。

由于本书作者水平有限以及写作时间仓促,书中难免存在缺点、错误,敬请读者批评指正,在使用本书的工程中如果遇到问题,请通过电子邮件 forengineer@126. com 或 forengineer@sohu. com 与本书作者联系。

作 者
2010 年 5 月

目 录

第 1 章 数值声学方法	1
1.1 声学基本量	1
1.1.1 声压	1
1.1.2 声波的能量	1
1.1.3 声功率和声强	2
1.1.4 声级	2
1.1.5 计权声压	3
1.2 声学 Helmholtz 波动方程	4
1.2.1 声波连续方程	4
1.2.2 声波的运动方程	5
1.2.3 声波的物态方程	6
1.2.4 声波的波动方程	6
1.3 边界条件	7
1.3.1 声场分类	7
1.3.2 边界条件	8
1.4 声学有限元法	10
1.4.1 形函数的表达式	10
1.4.2 声学有限元的系统矩阵	12
1.4.3 声学模态法	14
1.4.4 耦合声学有限元	15
1.5 直接边界元法	17
1.5.1 非耦合直接边界元	17
1.5.2 耦合直接边界元	19
1.6 间接边界元	21
1.6.1 非耦合声学边界元	21
1.6.2 耦合间接边界元	22
第 2 章 Virtual Lab Acoustics 基础	25
2.1 Virtual Lab Acoustics 概述	25
2.1.1 Virtual Lab 功能简介	25
2.1.2 Virtual Lab Acoustics	
功能简介	26
2.2 Virtual Lab 软件的安装	26
2.2.1 软件程序的安装	27
2.2.2 License 许可文件的	
安装	28
2.3 Virtual Lab 的基本操作	30
2.3.1 Virtual Lab 的	
界面操作	30
2.3.2 导入有限元模型	31
2.3.3 更改界面语言	32
2.3.4 更改背景颜色	32
2.3.5 保存模型	32
2.3.6 导入有限元模型的	
振动响应	33
2.3.7 导入有限元模型的	
结构模态	34
2.3.8 创建输入输出点	35
2.3.9 定义载荷	36
2.3.10 基于模态的强迫	
响应计算	40
2.3.11 组的创建	43
2.4 Virtual Lab Acoustics	
声学建模基本知识	46
2.4.1 Virtual Lab 的单位制	46
2.4.2 声学网格要求	47
2.4.3 声学计算的基本步骤	48
第 3 章 声学有限元的应用	49
3.1 消声器的传递损失计算	49
3.1.1 多腔消声器的传递	
损失计算	49
3.1.2 考虑流体流速时消声器	

传递损失的计算	58	5.2 汽车内噪声耦合	172
3.1.3 带穿孔板的消声器传递 的传递损失计算	62	5.3 考虑内饰材料的车内辐射 声场	181
3.2 车内声场的计算	72	5.3.1 多孔材料的参数	181
3.2.1 不考虑座椅的车内 声场计算	73	5.3.2 考虑内饰的汽车内 声场计算	182
3.2.2 考虑座椅的车内 声场计算	81	第6章 耦合声学边界元的应用	192
3.3 进气管声场计算	87	6.1 金属盖的透射声场	192
3.4 声学无限元的应用	92	6.2 用耦合间接边界元法计 算车内声场	198
3.4.1 声学无限元概述	92	6.3 音箱的辐射声场计算	207
3.4.2 发动机辐射声场	95	第7章 声学传递向量 ATV 的应用	214
3.4.3 轮胎声学无限元	101	7.1 ATV 方法简介	214
3.5 声学有限元板块贡献量的 应用	107	7.2 用 ATV 法计算车内声场	215
3.6 用 PML 方法计算外声场	113	7.3 用 MATV 法计算发动机的 辐射噪声	222
3.6.1 PML 方法简介	113	7.4 用 ATV 法计算板块贡献量	231
3.6.2 用 PML 方法计算涡轮 增压器的辐射声场	114	7.5 声学逆计算	236
第4章 声学边界元的应用	121	第8章 隔声量的计算	241
4.1 用直接边界元法计算 发动机辐射噪声	121	8.1 管道中金属薄片的隔声量	241
4.2 用直接边界元法计算汽 车内噪声	129	8.2 双层玻璃的隔声量	250
4.3 用间接边界元法计算 开口盒子的辐射声场	136	8.3 机舱壁隔声量的计算	257
4.4 油阀盖的辐射噪声	143	第9章 气动声学的计算	266
4.5 汽车板块贡献量分析	147	9.1 风扇噪声	266
4.6 多极边界元的应用	152	9.2 汽车后视镜的声场计算	272
4.6.1 用多极边界元计算 车内声场	153	第10章 瞬态有限元和瞬态边界元 的应用	281
4.6.2 用多极边界元计算 发动机辐射声场	156	10.1 轮胎瞬态声学有限元	281
4.7 潜艇散射声场的计算	161	10.2 空气夹层的反射和干涉	287
第5章 耦合声学有限元的应用	166	10.3 瞬态声源的辐射声场	291
5.1 封闭金属盒子的耦合	166	10.4 碰撞传感器的瞬态声场	295

第1章 数值声学方法

数值声学主要分为声学有限元法 (Finite Element Method, FEM) 和声学边界元法 (Boundary Element Method, BEM), 数值声学的基本方程仍是 Helmholtz 方程, 声学有限元法和声学边界元法就是如何用声学有限元和声学边界元求解 Helmholtz 方程。本章主要介绍与声学有关的一些术语和 Helmholtz 声学方程, 以及如何用声学有限元法和声学边界元法求解声学方程。

本章主要内容如下:

- 如何建立 Helmholtz 方程;
- Helmholtz 方程的边界元条件;
- 如何用声学有限元法求解 Helmholtz 方程;
- 如何用声学边界元法求解 Helmholtz 方程;
- 如何求解场点方程。

1.1 声学基本量

1.1.1 声压

在流体中某点处, 静止状态时的压强为 p_0 , 在受到外界的扰动后, 压强由 p_0 变化为 p , 则由扰动引起的逾量压强为

$$p' = p - p_0 \quad (1-1-1)$$

又称为声压, 在声波传播过程中, 在同一时刻, 不同点处的声压是不一样的; 对于同一点, 在不同时刻的声压也是不一样的, 所以声压是空间和时间的函数, 即 $p' = p'(x, y, z, t)$ 。同样地, 由于声的传播或声扰动引起的流体介质的密度 ($\rho' = \rho - \rho_0$) 也是空间和时间的函数, 即 $\rho' = \rho'(x, y, z, t)$ 。

1.1.2 声波的能量

某一 $dx dy dz$ 微元体初始体积为 V_0 , 初始压强为 p_0 , 密度为 ρ_0 , 由于受到声扰动, 该微元体的振动速度为 v , 压强为 $p_0 + p'$, 体积为 V , 微元体的动能和势能分别为

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 v^2 \quad (1-1-2)$$

$$E_p = - \int_{V_0}^V p' dV \quad (1-1-3)$$

由于 $m = \rho V$ ，可以得到 $d\rho/\rho = -dV/V$ ，由于 $\rho = \rho_0 + \rho'$ ， $V = V_0 + dV$ ，在小振幅条件下 $\rho' \ll \rho$ ， $dV \ll V$ ，因此有 $d\rho'/\rho_0 = -dV/V_0$ ，由物态方程两边微分得到 $d\rho = c_0^2 d\rho'$ ，所以 $dV = -\frac{V_0}{\rho_0 c_0^2} d\rho$ ，因此势能为

$$E_p = -\int_{V_0}^V p dV = \int_0^p \frac{V_0}{\rho_0 c_0^2} p dp = \frac{V_0}{2\rho_0 c_0^2} p^2 \quad (1-1-4)$$

微元体内的总声能量为

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2} \rho_0 V_0 (v^2 + \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} p^2) \quad (1-1-5)$$

通常定义单位体积的声能量为声能密度 (Sound Energy Density)，即

$$w = \frac{E}{V_0} = \frac{1}{2} \rho_0 (v^2 + \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2} p^2) \quad (1-1-6)$$

1.1.3 声功率和声强

声波的传播过程实际上是声能量的传播过程。声源在单位时间内辐射出的总声能量称为声功率 (Sound Power)，单位时间内通过垂直于声传播方向上面积为 S 的平均声能量，称为平均声能量流或平均声功率 (Average Sound Power)。因为声能量是以声速传播的，所以平均声功率等于声场中面积为 S ，高度为 c_0 的圆柱体内所包含的平均声功率，即

$$W = w c_0 S \quad (1-1-7)$$

声强 (Sound Intensity) 是指在垂直于传播方向的单位面积上通过的平均声能量流，即

$$I = \frac{W}{S} = w c_0 \quad (1-1-8)$$

需要注意的是，声强是有方向的，即

$$I = I_+ + I_- \quad (1-1-9)$$

式中： I_+ 表示正向声强； I_- 表示负向声强；如果前进波与反射波相等，那么 $I=0$ ，这就是主动消声的机理。

1.1.4 声级

由于人耳能听到的声强的范围非常大，用声压或声强的绝对值来衡量声音的强弱很不方便。所以，人们普遍采用对数标度来度量声压、声强和声功率，分别称为声压级、声强级和声功率级。

声压级 (Sound Pressure Level) 定义为声压的有效值与基准声压的有效值之比 (取分贝)，即

$$L_p = 20 \lg \frac{p_e}{p_r} \quad (1-1-10)$$

式中： p_e 为测量的声压； p_r 为参考声压，通常取 $p_r=2 \times 10^{-5} \text{Pa}$ ，是人耳对 1kHz 空气声所能感觉到的最低声音的声压。

声强级 (Sound Intensity Level) 定义为声强和参考声强之比的常用对数的 10 倍, 即

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad (1-1-11)$$

式中: 基准声强 $I_0=10^{-12} \text{W/m}^2$, 为可听最小声强。

声功率级 (Sound Power Level) 定义为声功率与基准声功率之比的常用对数的 10 倍, 即

$$L_w = 10 \lg \frac{W}{W_0} \quad (1-1-12)$$

式中: 基准声功率 $W_0=10^{-12} \text{W}$ 。

声压级、声强级和声功率级三者之间的基本关系如下:

$$L_I = L_p + 10 \lg \left(\frac{\rho'_0 c'_0}{\rho_0 c_0} \right) \quad (1-1-13)$$

$$L_w = L_I + 10 \lg S \quad (1-1-14)$$

$$L_w = L_p + 10 \lg S + 10 \lg \left(\frac{\rho'_0 c'_0}{\rho_0 c_0} \right) \quad (1-1-15)$$

式中: $\rho'_0 c'_0$ 为参考状态的空气特性阻抗, 通常取 $400 \text{Pa}\cdot\text{s/m}$, 一般情况下 $\rho_0 c_0$ 接近 $400 \text{Pa}\cdot\text{s/m}$, 所以 $L_I \approx L_p$ 。

1.1.5 计权声压

人对声音的主观感受受频率的影响, 为了使声音的度量与人耳的听觉感受一致, 通常对声学量的分贝数值进行过滤, 对声音按频带设定一定的衰减加权或补偿来模拟人耳的听觉特性。常用的加权声压有四种, 分别为 dBA、dBB、dBC 和 dBD, 用于不同的行业中。在加权分贝中, dBA 最能反映人耳声音响度的频率响应, 它与噪声对人们语言交流的干扰、对听力的损伤、对健康的危害以及引起人们的烦躁程度都有良好的相关性, dBD 主要用于航空噪声测量中模拟人耳的响度感觉, 10kHz~20kHz 之间的 A、B、C 和 D 加权曲线如图 1-1 所示。

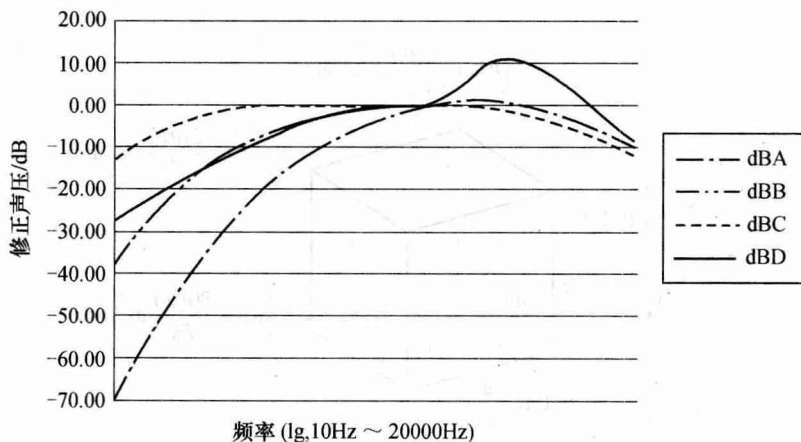


图 1-1 声压加权曲线

1.2 声学 Helmholtz 波动方程

下面通过声波的连续方程、运动方程和物态方程来推导 Helmholtz 波动方程。

1.2.1 声波连续方程

在推导声学波动方程时，假定流体介质是理想的非黏性介质。流体中的声学响应，如声压和声强等，可以看作是在一个稳定的流体场的基础上叠加了一个扰动量。因此流体中的总声压 p 、流体的密度 ρ 和流体的振动速度 v 在任意时刻 t 和任意位置 (x, y, z) 可以分别表示如下：

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, z, t) + p'(x, y, z, t) \quad (1-2-1)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z, t) + \rho'(x, y, z, t) \quad (1-2-2)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0(x, y, z, t) + v'(x, y, z, t) \quad (1-2-3)$$

式中： p_0 、 ρ_0 和 v_0 分别为静态情况下的声压、密度和速度； p' 、 ρ' 和 v' 分别为由外界扰动引起的流体声压、密度和速度的变化量； $v = v_x i + v_y j + v_z k$ 。

如图 1-2 所示的流体微元体，在 x 轴的两个侧面上的介质的流动速度分别为 v_x 和 $v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx$ ，因此在 x 轴方向上流入微元体的质量为 $\rho v_x dydz$ ，流出微元体的质量为 $\rho(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx) dydz$ ，在 x 轴方向上介质流动引起的微元体的质量改变量为 $-\rho \frac{\partial v_x}{\partial x} dx dydz$ ，同理在 y 轴和 z 轴上引起的微元体的质量改变量分别为 $-\rho \frac{\partial v_y}{\partial y} dx dydz$ ， $-\rho \frac{\partial v_z}{\partial z} dx dydz$ ，由于质量不会产生也不会消失，即微元体质量的改变应等于微元体质量的变化率，即

$$-\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) \quad (1-2-4)$$

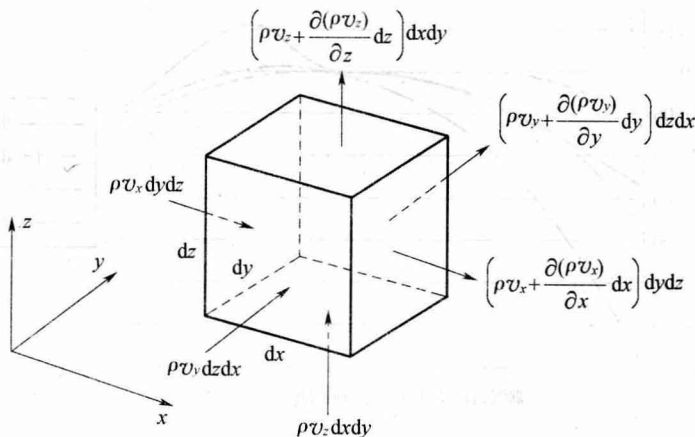


图 1-2 流体微元体

将 $\rho = \rho_0 + \rho'$ 代入式(1-2-4), 并引进 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ 符号, 得

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} = -(\rho_0 + \rho') \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1-2-5)$$

此方程是在没有声源情况下的声波连续方程。

如果在微元体内有单位体积的体积速度 q 引起的附加质量, 即

$$q(x, y, z, t) = q_0(x, y, z, t) + q'(x, y, z, t) \quad (1-2-6)$$

并且假定 $q_0(x, y, z, t) = 0$, 这时候声波连续方程为

$$\frac{\partial(\rho_0 + \rho')}{\partial t} = (\rho_0 + \rho') q' - (\rho_0 + \rho') \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1-2-7)$$

1.2.2 声波的运动方程

根据牛顿第二定律, x 轴方向上的动力学方程为

$$\rho dx dy dz \frac{dv_x}{dt} = p dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz \quad (1-2-8)$$

将 $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$ 代入式(1-2-8), 即

$$(\rho_0 + \rho') \frac{dv_x}{dt} = - \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x} \quad (1-2-9)$$

其中, $\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x$, 式(1-2-9)变为

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_x = - \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial x} \quad (1-2-10)$$

在 y 轴和 z 轴方向上, 同理可以得到

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_y = - \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial y} \quad (1-2-11)$$

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) v_z = - \frac{\partial(p_0 + p')}{\partial z} \quad (1-2-12)$$

将式(1-2-10)~式(1-2-12)合写为矢量的形式为

$$(\rho_0 + \rho') \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = - \nabla(p_0 + p') \quad (1-2-13)$$

这就是声波的运动方程。

1.2.3 声波的物态方程

由于声传播速度比热传播速度快得多, 因此可以认为声波传播过程是绝热的, 一定质量的理想气体的声压和速度之间有如下关系:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \quad \text{或} \quad p = f(\rho) = C \cdot \rho^\gamma \quad (1-2-14)$$

式中: γ 为气体定压比热容与定容比热容之比, $\gamma = c_p / c_v$, 对于空气 $\gamma = 1.402$; C 为常数, $C = p_0 / \rho_0^\gamma$ 。

将式(1-2-14)用泰勒级数展开为

$$p = \left(f\Big|_{\rho=\rho_0}\right) + \left(\frac{df}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0}\right)(\rho - \rho_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2f}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0}\right)(\rho - \rho_0)^2 + \dots \quad (1-2-15)$$

将 $p = p_0 + p'$ 和 $\rho = \rho_0 + \rho'$ 代入式(1-2-9), 可以得到声波的物态方程为

$$p' = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \rho' + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2\rho_0^2} \cdot (\rho')^2 + \dots \quad (1-2-16)$$

1.2.4 声波的波动方程

将式(1-2-7)、式(1-2-13)和式(1-2-16)中的高阶小量去掉, 只保留线性部分, 可以得到

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = \rho_0 q' - \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1-2-17)$$

$$\rho_0 \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{p}' \quad (1-2-18)$$

$$p' = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \cdot \rho' \quad (1-2-19)$$

将式(1-2-17)对时间 t 求偏导得

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial q'}{\partial t} - \rho_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1-2-20)$$

由式(1-2-18)得到 $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla \cdot \mathbf{p}'}{\rho_0}$, 代入式(1-2-20)得

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial q'}{\partial t} + \nabla^2 \cdot \mathbf{p}' \quad (1-2-21)$$

将式(1-2-19)对时间求二次偏导, 得到 $\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{\gamma p_0} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}$, 代入式(1-2-21), 可以得到

在均匀介质、非黏性和绝热状态下流体内的纵向波的线性声学波动方程为

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\rho_0 \frac{\partial q'}{\partial t} \quad (1-2-22)$$

式中：拉格朗日算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ； $c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$ 为声波在流体介质中的传播速度， c 与

时间 t 的关系为 $c \approx 331.6 + 0.6t$ 。

下面利用变量分离方法求解式(1-2-22)。通常情况下，人们感兴趣的是在稳定的简谐激励下引起的稳定的声场，因为相当多的声源都是做简谐振动的，另外，根据傅里叶级数或者傅里叶变换，任意随时间的振动都可以看作是多个简谐振动的叠加或积分。设

$$p' = p(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \quad (1-2-23)$$

$$q' = q(x, y, z) \cdot e^{j\omega t} \quad (1-2-24)$$

将式(1-2-23)和式(1-2-24)代入式(1-2-22)中，得到 Helmholtz 方程为

$$\nabla^2 p(x, y, z) - k^2 p(x, y, z) = -j\rho_0 \omega q(x, y, z) \quad (1-2-25)$$

式中： $k = \omega/c = 2\pi f/c$ 为波数； $\omega = 2\pi f$ 为角频率； f 为频率 (Hz)，对应的波长是 $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega = c/f$ 。

1.3 边界条件

对于式(1-2-25)的解，需要根据不同的边界条件来确定。下面首先讨论声场的范围和计算声学的分类。

1.3.1 声场分类

1. 内声场与外声场的问题

内声场通常是指在一个封闭的流体空间，周围被结构或固体所包围，周围的结构产生振动向封闭的流体空间中辐射声音，例如把汽车的车门关闭后，车内的空气就构成了一个内声场的问题。

外声场是指一个封闭的结构或固体的外侧的流体空间，这个空间是从结构或固体的外表面到无限远处，因此是一个无限大空间。例如汽车上的发动机的外声场，汽车的外壳产生振动，向外声场中辐射声音，这个声场是无限大的。

有些时候结构不完全封闭，内声场和外声场不能严格区分，例如一个开口的金属盒子、车门打开后等构成的声场就不能完全区分内声场和外声场。

2. 耦合与非耦合的问题

结构放到流体中，例如办公室中的桌椅等是在空气中，就会和流体产生接触。结构的振动就会推动与之接触的流体的振动，从而产生声压，声音的传播就会作用到与流体接触的结构上，在结构上产生压力，引起结构的振动。所以结构的振动和声音的传播是相互的过程，

结构振动可以产生声音，声音也可以产生振动。结构与声音之间相互作用的程度会有所不同，当结构的刚度比较小，而周围的流体介质的密度比较大的时候，结构与声音的相互作用就比较大，例如音箱中振膜的振动与空气的相互作用就比较大；反过来，结构的刚度比较大，而流体介质的密度比较小的时候，结构与声音的相互作用就比较小。例如汽车发动机，由于发动机的刚度很大，而空气的密度较小，发动机和空气之间的耦合作用就很小。

耦合问题就是结构和流体之间的相互作用比较大，必须考虑结构和流体之间的相互作用，如果忽略任何一方对另一方的作用，计算出来的结果与实际的结果就会有很大误差。非耦合作用就是结构和流体之间的相互作用比较小，忽略任何一方对另一方的作用，计算出来的结果与实际的结果不会有很大误差。结构与流体之间相互作用是单向的，这时候可以分为两种情况，一是结构振动产生声音，声音对结构的影响是可以忽略的，例如前面提及的发动机的问题；另外一种情况就是声音引起结构振动，结构对声音的影响是可以忽略的，例如汽车经过时，引起的房屋上玻璃的振动问题。耦合问题中，声音和结构必须在一个环境中考虑，而非耦合问题中，声音和结构需要分别处理，可以在两个不同的环境中考虑。

在耦合问题中，可以使用一个耦合系数 λ_c 来确定是否需要考虑耦合作用，即

$$\lambda_c = \frac{\rho_0 c}{\rho_1 T \omega} \quad (1-3-1)$$

式中： ρ_0 为流体的密度； c 为声音在流体中的传播速度； ρ_1 为结构的密度； T 为结构的等效厚度； ω 为角频率。

当 $\lambda_c > 1$ 时，可以认为是耦合的；当 $\lambda_c \ll 1$ 时，可以认为是非耦合的。

1.3.2 边界条件

对于式 (1-2-25) 所表示的 Helmholtz 方程，只要确定边界条件，其解就是唯一的。由于计算声场可以分为内声场和外声场，所以可以从声场的边界是否封闭来分类。

1. 边界封闭的内声场的边界条件

如图 1-3 所示，内声场的边界一定是封闭的，内声场的边界区域可以分为三类：声压边界条件 Ω_p 、速度边界条件 Ω_v 和声阻抗边界条件 Ω_z 。在声压边界条件 Ω_p 上，Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 应满足

$$p(\mathbf{r}) = \bar{p}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_p \quad (1-3-2)$$

式中： $\bar{p}(\mathbf{r})$ 为 Ω_p 上的已知声压值。

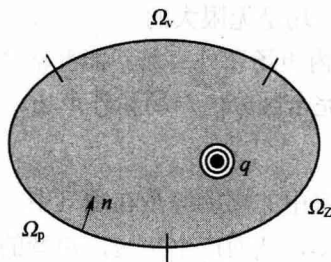


图 1-3 边界封闭的内声场的边界条件

在速度边界条件 Ω_v 上, Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 应满足

$$v_n(\mathbf{r}) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} = \bar{v}_n(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_v \quad (1-3-3)$$

式中: n 为边界的法线方向; $\bar{v}_n(\mathbf{r})$ 为 Ω_v 上的法线速度。

在声阻抗边界条件 Ω_Z 上, Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 应满足

$$p(\mathbf{r}) = \bar{Z}(\mathbf{r}) \cdot v_n(\mathbf{r}) = \frac{j\bar{Z}(\mathbf{r})}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_Z \quad (1-3-4)$$

式中: $\bar{Z}(\mathbf{r})$ 为 Ω_Z 上的已知声阻抗值。

2. 边界封闭的外声场的边界条件

如图 1-4 所示, 外声场的边界由两部分构成, 封闭的边界和无限远处的边界。在封闭的边界上, 也可以分为声压边界条件 Ω_p 、速度边界条件 Ω_v 和声阻抗边界条件 Ω_Z , Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 分别满足式 (1-3-2)、式 (1-3-3) 和式 (1-3-4)。在无限远的边界 Ω_∞ , Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 应满足

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} |r| \cdot \left(\frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial |r|} + jkp(\mathbf{r}) \right) = 0 \quad (1-3-5)$$

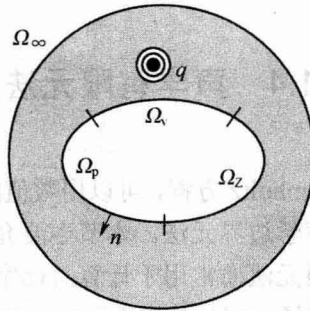


图 1-4 边界封闭的外声场的边界条件

3. 边界开口的内外声场的边界条件

如图 1-5 所示, 边界开口的内外声场的边界由三部分构成: 一部分是在无限远处的边界条件, Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 满足应满足式 (1-3-5); 第二部分是在开口边界的外表面; 第三部分是在开口边界的内表面, Helmholtz 方程的解 $p(\mathbf{r})$ 满足下面的表达式:

$$p(\mathbf{r}) = \bar{p}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_p^+ \quad (1-3-6)$$

$$p(\mathbf{r}) = \bar{p}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_p^- \quad (1-3-7)$$

$$v_{n+}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} = \bar{v}_{n+}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_v^+ \quad (1-3-8)$$

$$v_{n-}(\mathbf{r}) = \frac{j}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n} = \bar{v}_{n-}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Omega_v^- \quad (1-3-9)$$

$$p(\mathbf{r}) = \bar{Z}^+(\mathbf{r}) \cdot v_n(\mathbf{r}) = \frac{j\bar{Z}^+(\mathbf{r})}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_Z^+ \quad (1-3-10)$$

$$p(\mathbf{r}) = \bar{Z}^-(\mathbf{r}) \cdot v_n(\mathbf{r}) = \frac{j\bar{Z}^-(\mathbf{r})}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad \mathbf{r} \in \Omega_Z^- \quad (1-3-11)$$

式中：上标“+”和“-”符号分别表示边界的正面和负面，正面是边界的法线方向。

4. 边界封闭的内外声场的边界条件

如图 1-6 所示，边界封闭的内外声场的边界也是由三部分构成，无限远处的边界、封闭边界的外表面和内表面，它的边界条件分别满足式 (1-3-5) ~ 式 (1-3-11)。

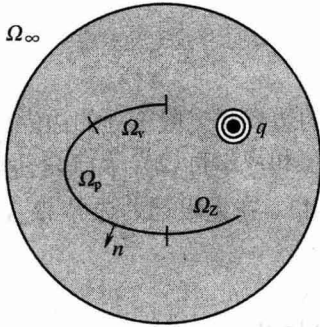


图 1-5 边界开口的内外声场的边界条件

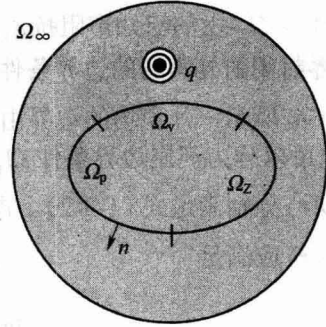


图 1-6 边界封闭的内外声场的边界条件

1.4 声学有限元法

对于式 (1-2-25) 所表示的 Helmholtz 方程，可以用数值的方法得到其满足边界条件的解。数值方法通常有声学有限元法和声学边界元法。本节主要介绍声学有限元法的理论，下节介绍声学边界元法的理论。声学有限元法通常用于计算封闭空间中声场，不过它可以采用一些特殊的方法来计算开放空间中的声场，例如使用无限元方法。

用声学有限元法解 Helmholtz 方程，首先需要把计算的声场 \$V\$ 离散成一定数量的小声场 \$V_e\$，每个小声场称为单元 (Element)，单元之间通过一定数量的顶点相互首尾连接，这些顶点称为节点(Node)。每个单元内的声场由属于这个单元的节点上的声压确定，这时候必须提前定义单元内任意点的声压与节点声压的关系，这种关系称为形函数(Shape Function)或权重函数 (Weighted Function)，根据所使用的单元类型的不同，形函数的表达式也不同。这时候声场 \$V\$ 内的声压分布就转换成如何确定所有节点上声压的问题。对于三维声场，常用的单元有四面体单元(Tetrahedral Element)和六面体单元(Hexahedral Element)，对于二维模型，常用的单元有三角形单元(Triangular Element)和四边形单元(Rectangular Element)。

1.4.1 形函数的表达式

对于如图 1-7(a) 所示的线性四边形单元，其形函数可以定义为

$$N_i^e = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1-4-1)$$

对于如图 1-7(b) 所示的线性三角形单元，其形函数可以定义为