【高职高专数学系列规划教材】

高等数学

（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编　毛建生　沈荣泸
副主编　熊开明　邓敏英

四川大学出版社

【高职高专数学系列规划教材】

高等数学

（下册）

GAODENG SHUXUE

主　编　毛建生　沈荣泸
副主编　熊开明　邓敏英

四川大学出版社

责任编辑:李川娜
责任校对:段悟吾
封面设计:李金兰
责任印制:李　平

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 下册 / 毛建生，沈荣泸主编. —成都：四川大学出版社，2009.8
ISBN 978－7－5614－4550－1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①毛…②沈…　Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材　Ⅳ. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 149924 号

书名　高等数学（下）

主　编	毛建生　沈荣泸
出　版	四川大学出版社
地　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　行	四川大学出版社
书　号	ISBN 978－7－5614－4550－1
印　刷	四川锦祝印务有限公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　张	16.25
字　数	397 千字
版　次	2009 年 9 月第 1 版
印　次	2009 年 9 月第 1 次印刷
印　数	0 001～3 000 册
定　价	28.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回出版社调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前 言

本书是我们多年来进行高等数学教学改革实践的结晶，是根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，并参考《全国各类成人高等学校专科起点本科班招生复习考试大纲(非师范类)》编写的. 全书分上、下两册，适用于高职高专工科类或经济管理类各专业，也可以作为“专升本”考试培训教材，还可以作为职业大学、成人大学和自学考试的教材或参考书.

全书分为上下两册，共 12 章，每章划分为四大模块，即学习目标、内容、习题、复习题. 上册内容主要包括：函数的极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程；下册内容主要包括：多元函数微积分、无穷级数、行列式与矩阵、线性方程组、概率、数理统计初步. 各章内容分模块、分层次编排，供工科类和经济管理类专业选用；用小号字编排的内容为“难度模块”，供数学基础较好的同学选用.

本套教材根据高职培养目标，遵循高职教学规律，坚持“以应用为目的，以必需、够用为度”的编写原则，突出高等数学的基础性与学生的主体性，具有以下特色：

第一，简明性. 考虑到高等数学课程的基础性与高职学生的数学基础，本书在内容的选择上，大胆删去传统高等数学中较为繁杂与技巧性较强的内容，突出基础数学知识与数学思想、数学方法的应用，使知识线条清楚明确，内容简化。

第二，易读性. 遵循以学生为主体的教学理念，在教材编写时，尽量使教材的呈现方式与编排顺序符合学生的数学基础与心理发展水平，突出可读性：引进数学概念时，尽量借助几何直观图形、物理意义与生活背景进行解释，使之切合学生认知水平；在部分定理证明时，采用描述性证明，去掉过多理论推导，保留主要的证明；在配制例题时，尽量做到每例均有思路分析，引导学生循序渐进，易学易懂，减少学生学习障碍.

第三，实用性. 高职主要培养生产第一线的应用型技术人才，为实现这一目标，本书注重数学能力的培养：一是培养用数学思想、概念和方法去认识、理解工程概念和工程原理的能力，二是培养把实际问题转化为数学模型的能力，三是培养求解数学模型的能力。无论是实例的引入，例题的讲解、习题的选择都贯穿这一特点.

第四，选择性. 针对高职高专各专业的实际编写，有较强的选择性. 高职高专教育专业繁多，且差异较大，为了适应各专业使用，对全部内容做了分层处理，选定各专业都必须使用的基本内容作为基本层，在此基础上用模块进行组装，构造出不同层次，使本书既适用于理工科类专业，也适用于经济管理类各专业，还适用于各类“专升本考试”培训，弹性大，可选择性强.

本教材的基本教学时数约 150 学时，标有 * 号的内容另行安排课时.

本套教材由泸州职业技术学院数学教研室编写，上册主编为朱勤副教授、叶永春副教授；下册主编为毛建生副教授、沈荣泸副教授 . 其中，第 1 章由叶永春老师编写，第 2 章由胡频老师编写，第 3 章、第 6 章由李涛老师编写，第 4 章由朱勤老师编写，第 5 章由张玲老师编写，第 7

章由熊开明老师编写,第8章由邓敏英老师编写,第9章、第10章由毛建生老师编写,第11章和第12章由沈荣泸老师编写.老师们都有着较丰富的教学经验,既熟悉我国高职高专教育发展的现状,又了解本学科教与学的具体要求.为保证编写质量,对编写大纲进行了反复修改、讨论,并推选了一批教学水平高又有长期教材编写经验的老师参与教材的编写和审定.在本书的编审过程中,得到了同行专家的精心指导,得到了泸州职业技术学院领导的大力支持,谨在此表示衷心感谢.

由于成书仓促,编审人员水平有限,不足之处,请有关专家、学者及使用本书的老师指正.我们诚恳地希望各界同仁及广大教师关注并支持这套教材的建设,及时将教材使用过程中遇到的问题和改进意见反馈给我们,以供修订时参考.

编　者

2009年6月

目　录

第 7 章　多元函数微积分

学习目标

1. 了解空间直角坐标系的概念，掌握两点间的距离公式；了解向量的概念及线性运算、向量的数量积和向量积，了解曲面及其方程.
2. 理解多元函数及其二元函数极限的概念，理解连续、偏导数和全微分的概念，掌握偏导数、全微分和多元复合函数、隐函数的求导方法.
3. 了解微分在几何上的应用.
4. 知道多元函数极值的概念，了解函数极值的必要条件，会用充分条件判定二元函数的极值；了解条件极值的概念，掌握用拉格朗日乘数法求条件极值的方法，会求解一些简单的有关最大值和最小值的应用题.
5. 理解二重积分的概念和简单性质，掌握二重积分在直角坐标系与极坐标系中的计算法；会用二重积分计算曲面的面积和平面薄片的重心.

7.1　预备知识

7.1.1　空间直角坐标系

过空间一个定点 O，作三条互相垂直的数轴，它们都以 O 为原点，分别叫 **x 轴(横轴)**、**y 轴(纵轴)**、**z 轴(竖轴)**，统称**坐标轴**. 通常把 x 轴、y 轴放在水平面上，而 z 轴垂直水平面. 按右手系规定(右手系，又称右手螺旋法则，即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从正向 x 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 y 轴时，大拇指的指向就是 z 轴的正向) x 轴、y 轴、z 轴的正方向，三个坐标轴具有相同的单位长度. 这样就建立了一个**空间直角坐标系** $O-xyz$，点 O 叫坐标**原点**.

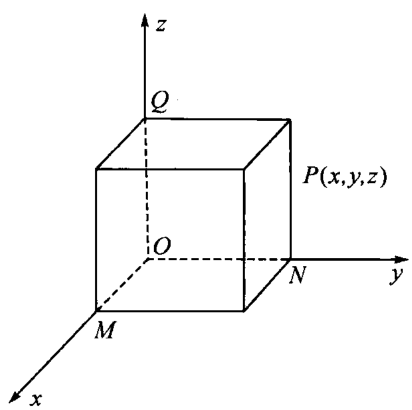

图 7—1

每两个坐标轴所确定的三平面称为**坐标平面**，它们分别是 ***xOy* 坐标平面**、***yOz* 坐标平面**、***zOx* 坐标平面**. 三个坐标平面，把整个空间分成八个部分，每一个部分称为一个**卦限**. 含有 x 轴、y 轴与 z 轴正半轴的卦限叫第一卦限，在 xOy 平面上方逆时针方向依次为第一至第四卦限，在 xOy 平面下方对应的依次为第五至第八卦限.

设 P 为空间任一已知点，过 P 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，并与 x 轴、y 轴、z 轴依次交于 M、N、Q，

(图 7－1). 这三点在 x、y、z 轴上的坐标分别为 x、y、z. 于是,空间的一点 P 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z).

反之,对已知任一有序数组 (x,y,z),我们在 x 轴、y 轴、z 轴依次取坐标为 x、y、z 的点 M、N、Q,然后过 M,N,Q 三点分别作垂直于 x 轴,y 轴、z 轴的平面. 这三个互相垂直的平面必相交于一点 P,则 P 就是与有序数组 (x,y,z) 对应的点.

这样,通过空间直角坐标系 $O-xyz$,建立了空间点 P 和有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系. 称数组 (x,y,z) 为点 P 的坐标. 其中 x、y、z 分别为点 P 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**.

特别地,原点的坐标为 $(0,0,0)$.

x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$,y 轴上点的坐标为 $(0,y,0)$,z 轴上点的坐标为 $(0,0,z)$. 一般情况下,坐标轴上点的坐标特征分别是:横坐标 $x\neq0$,纵坐标 $y\neq0$,竖坐标 $z\neq0$.

xOy 坐标面上点的坐标为 $(x,y,0)$,yOz 坐标面上点的坐标为 $(0,y,z)$,zOx 坐标面上点的坐标为 $(x,0,z)$. 坐标面上点的坐标特征分别是:竖坐标 $z=0$,横坐标 $x=0$,纵坐标 $y=0$.

空间中两点间的距离公式:

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$ 是空间任意两点,过 P_1,P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面,构成以 P_1P_2 为对角线的长方体,如(图 7－2)所示. 在长方体中三条棱长 $|BC|=|x_2-x_1|$,$|BA|=|y_2-y_1|$,$|BP_2|=|z_2-z_1|$,由勾股定理得

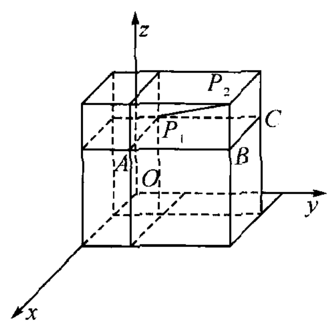

图 7－2

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地,点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

例 1 在 xOz 坐标面上,求与三个点 $A(1,3,2)$,$B(-2,4,-2)$,$C(5,0,1)$ 等距离的点的坐标.

解 设 xOz 坐标面上所求点为 $P(x,0,z)$,由题意有

$$|PA|=|PB|=|PC|,$$

从而
$$\sqrt{(x-1)^2+(0-3)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(0-4)^2+(z+2)^2},$$
$$\sqrt{(x-1)^2+(0-3)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(0-0)^2+(z-1)^2}.$$

等式两边同时平方,联立解得 $x=1$,$z=-2$. 故所求点 P 的坐标为 $(1,0-2)$.

7.1.2 向量代数简介

7.1.2.1 向量的概念

人们在日常生活和生产实践中常遇到两类量:一类如温度、距离、体积、质量等,这种只有大小没有方向的量称为**数量**,也称为**纯量**或**标量**;另一类如力、位移、速度、力矩等它们不但有大小而且有方向,这种既有大小又有方向的量称为**向量**,也称为**矢量**.

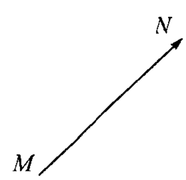

图 7－3

一般地,几何上常用有向线段表示向量,起点为 M,终点为 N 的向量记为 $\overrightarrow{MN}$,见图 7－3;也可用黑体小写字母表示,如 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 等(而在书写中,则用带箭头的小写字母 $\vec{a}$,$\vec{b}$).

向量的大小称为向量的模，用 $|\boldsymbol{a}|$，$|\boldsymbol{b}|$，$|\overrightarrow{AB}|$，$|\overrightarrow{MN}|$ 表示向量的模.

特别地，模为 1 的向量称为单位向量，模为 0 的向量称为零向量，记为 $\mathbf{0}$，规定零向量的方向为任意方向.

一个向量经平行移动后，模和方向都不变，即认为还是同一个向量，这种向量叫**自由向量**. 自由向量只与模和方向有关，而与向量的始点位置无关. 本章讨论的向量均为自由向量.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相同，称这两个向量相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$（图 7－4）. 如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，方向相反，称这两个向量互为负向量，记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$（图 7－5）.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反，则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.

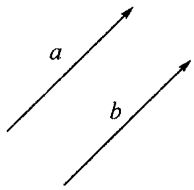

图 7—4

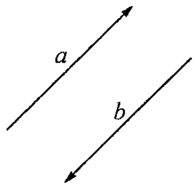

图 7—5

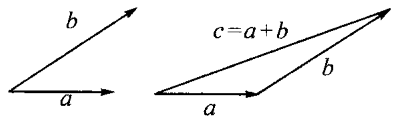

图 7—6

7.1.2.2　向量的加减法

定义 7.1.1　已知两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将 $\boldsymbol{b}$ 平移使其始点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则以 $\boldsymbol{a}$ 的始点为始点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

如图 7－6 所示，这一方法叫做向量加法的三角形法则. 三角形法则还可以推广到求空间中任意有限个向量的和.

向量的加法运算同数量的加法运算不同，向量的加法运算既要考虑到方向，又要考虑到模. 由图 7－6 知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，向量 $\boldsymbol{c}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，它既有大小又有方向，这里 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\neq|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$ 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的模不等于 $\boldsymbol{a}$ 的模加 $\boldsymbol{b}$ 的模，只有当 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为同向平行向量时才有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

向量的加法满足：

交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

结合律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

因为 $-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，所以 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即为向量 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

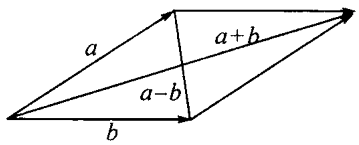

图 7—7

从图 7－7 可知，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为一组邻边的平行四边形中，一条对角线为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，另一条对角线为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

7.1.2.3　向量的数乘

定义 7.1.2　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，称为 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；$\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

数乘向量满足：

交换律　$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\lambda$；

结合律　$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$；

分配律　$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法运算和数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

7.1.2.4　向量的分解与向量的坐标

起点在坐标原点 O，终点为 P 的向量 $\overrightarrow{OP}$，称为点 P 的向径，记作 $r(p)=\overrightarrow{OP}$.

在坐标系中分别与 x 轴、y 轴、z 轴正向相同的单位向量称为基本单位向量，分别用 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，

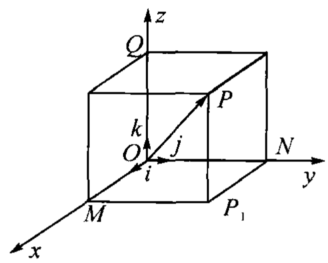

图 7—8

$\boldsymbol{k}$ 表示,如图 7—8 所示.

设点 P 的坐标(x,y,z),则有

$$\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i},\quad \overrightarrow{ON}=y\boldsymbol{j},\quad \overrightarrow{OQ}=z\boldsymbol{k}.$$

于是　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OQ}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$

式 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 称为向径 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标表示式,简记为 $\{x,y,z\}$,即 $\overrightarrow{OP}=\{x,y,z\}$.

例 2　设起点为 $M_1(x,y_1,z_1)$,终点为 $M_2(x_2,y_2,z_2)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

解　如图 7—9 有　$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}$,

从而　$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$

$$=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})$$
$$=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

简记为　$\overrightarrow{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$.

这就是任意向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标表示式.

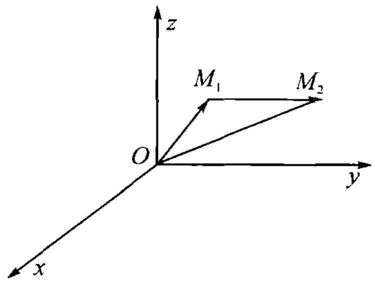

图 7—9

7.1.2.5　坐标表示下的向量运算

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$,有:

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\boldsymbol{i}+(a_2+b_2)\boldsymbol{j}+(a_3+b_3)\boldsymbol{k}$;

(2)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\boldsymbol{i}+(a_2-b_2)\boldsymbol{j}+(a_3-b_3)\boldsymbol{k}$;

(3)$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\boldsymbol{i}+\lambda a_2\boldsymbol{j}+\lambda a_3\boldsymbol{k}$;

(4)$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$;

(5)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

例 3　已知 $\boldsymbol{a}=\{3,5-1\},\boldsymbol{b}=\{2,2,3\},\boldsymbol{c}=\{4,-1,-3\}$,求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}$.

解　$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=2\{3,5,-1\}-3\{2,2,3\}+4\{4,-1,-3\}$

$$=\{6,10,-2\}-\{6,6,9\}+\{16,-4,-12\}=\{16,0,-23\}.$$

注意　向量的坐标与向量坐标表示式的区别.向量的坐标是一组有序数,向量的坐标表示式是一个向量.例如:$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$ 是向量坐标表示式,其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的系数是$(x_2-x_1),(y_2-y_1),(z_2-z_1)$,是向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

7.1.2.6　向量的数量积

定义 7.1.3　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量,其夹角为 θ,乘积$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积,也称为点积、内积.记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.

由数量积的定义可得:

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2,|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(2)两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角的余弦为 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

(3)如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由此,三个基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的数量积为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0,\quad \boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1.$$

数量积是从常力做功中抽象出来的,常力做功就是力 $\boldsymbol{f}$ 与位移 $\boldsymbol{s}$ 的数量积,即 $w=\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{s}$.

数量积的运算规律:

交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

结合律　$m(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(m\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})$.

分配律　$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

数量积的坐标表示式：

设$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\cdot(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_2b_3\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\&\quad+a_3b_1\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_1b_1+b_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

这就是利用向量的坐标表示式求两向量数量积的公式，也称为两向量数量积的坐标表示式，表明两向量的数量积等于其对应坐标积的和.

由两向量数量积的定义及其坐标表示式可得向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角余弦公式为

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\cdot\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}.$$

这时两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件可表示为 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

例 4　(1)已知$|\boldsymbol{a}|=3$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 方向相反，求：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

(2)已知$|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且两向量的夹角 $\theta=\frac{\pi}{3}$，求$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

解　(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\pi=-3$.

(2)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})&=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-6\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=3|\boldsymbol{a}|^2-4|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}||\cos\frac{\pi}{3}-4|\boldsymbol{b}|^2\\&=3\times4-4\times2\times5\times\frac{1}{2}-4\times25=-108.\end{aligned}$$

例 5　已知三点 $A(2,1,-2)$，$B(1,2,-2)$，$C(1,1,-1)$，求向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$的数量积及夹角.

解　$\overrightarrow{AB}=\{1-2,2-1,-2-(-2)\}=\{-1,1,0\}$，　$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2}$；

$\overrightarrow{BC}=\{0,-1,1\}$，　$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$；

所以
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-1)\times0+1\times(-1)+0\times1=-1.$$

设$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BC}$的夹角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=-\frac{1}{2},\quad 即\ \theta=\frac{2}{3}\pi.$$

7.1.2.7　向量的向量积

上面讲了向量的四种运算，这里讲向量乘向量. 向量乘向量，相乘结果是一个向量的乘法叫向量积.

定义 7.1.4　若由两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的一个向量 $\boldsymbol{c}$ 满足下列条件：

(1)$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，其方向按 $\boldsymbol{a}$ 到 $\boldsymbol{b}$ 的右手定则所确定，

(2)$\boldsymbol{c}$ 的大小为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，

则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积，记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 向量积也称为外积或叉积.

由向量积的定义可得：

(1)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$；

(2)$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ (其中$|\boldsymbol{a}|\neq0$，$|\boldsymbol{b}|\neq0$).

对于三个基本单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 之间的向量积有

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}.$$

又,向量 $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为两个邻边的平行四边形的面积,这就是向量积的几何意义.

向量积是从力矩等问题中抽象出来的.例如,当用扳手去拧螺丝帽时,如果扳手逆时针方向转动,则螺丝帽沿螺栓朝上方向移动而拧松.如果扳手顺时针方向转动,则螺丝帽沿螺栓朝下方向移动而拧紧.这就是力矩的方向,力矩的大小等于力臂乘以力.

向量积的运算规律:

反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

数乘结合律 $\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$;

分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}$.

向量积的坐标表示式:

设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1b_3\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+a_2b_1\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+a_2b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&\quad+a_2b_3\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+a_3b_1\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+a_3b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+a_3b_3\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

这就是向量坐标表示下的向量积计算坐标公式.为便于记忆,引入记号:

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\text{(称二阶行列式)}$$

及

$$\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}-a_2\begin{vmatrix}b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\text{(称三阶行列式)},$$

这样向量积计算坐标公式可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

上式还说明,两个非零向量平行的充要条件是它们的对应坐标成比例,即:

$$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}\quad\text{(若分母为零,则认为分子也为零)}.$$

例 6 已知向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,求:

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$;

(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$;

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{i}$.

解 (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$;