QQ教辅
QQJIAOFU

根据新课标编写　适合各种版本教材

新课标

点击专项

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

主编：李永哲

高中数学

圆锥曲线与方程

延边大学出版社

QQ教辅

QQJIAOFU

根据新课标编写 适合各种版本教材 新课标

点击专项

点击专项

DIANJIZHUANXIANG

高中数学

本册主编：李永哲

编　委：刘德广　王雪晶　徐　嵘　张　欣　刘金国　张　有　兰俊义　杨秀杰　赵传娟　张玉梅　石成合　郑明琴　王春花　高　琨　刘晓菲　张　伟　李业英　杜雪瑛　郑明媚　周广文　于黎春　曹艳菊

圆锥曲线与方程

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

点击专项·高中数学·圆锥曲线与方程/李永哲主编.—延吉:延边大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5634-2830-4

Ⅰ.点… Ⅱ.李… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 130271 号

点击专项·高中数学·圆锥曲线与方程

主编:李永哲

责任编辑:秀 豪

出版发行:延边大学出版社

社址:吉林省延吉市公园路977号　　**邮编**:133002

网址:http://www.ydcbs.com

E-mail:ydcbs@ydcbs.com

电话:0433-2732435　　**传真**:0433-2732434

发行部电话:0433-2133001　　**传真**:0433-2733266

印刷:大厂回族自治县兴源印刷厂

开本:880×1230　1/32

印张:15.125　　**字数**:278 千字

印数:1—12000

版次:2010 年 3 月第 1 版

印次:2010 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5634-2830-4

定价:24.00 元

前 言 Foreword

在数学这门学科中，知识的各个部分是有关联的，但各知识都有自己的特点。因此，在学习过程中，数学各专题知识独特的规律就需要学生们细心把握。

正因为如此，我们聘请多年在一线教学工作岗位的特高级教师，根据教育部颁布的新课标和新大纲的要求，编写了本书《点击专项——高中数学 圆锥曲线与方程》，目的是让学生们在学习本数学专题时对这部分知识内容有深刻的理解和掌握。

为使广大读者更方便地使用本书，本书按从易到难的梯度编写，这样，对本专题知识没有吃透的学生就可以迅速掌握本专题的知识；中等水平的学生在精读本书提高篇后会使自己更上一层楼；优秀的学生可以通过拓展篇的训练使自己处在更高的水平。

本书精选的大量不同难度的习题能让不同层次的学生有的放矢，并体验到学习的乐趣。

本书由如下版块构成：

知识归纳

本版块将圆锥曲线与方程的知识和规律进行总结和归纳，将其主要规律呈示出来，使学生们在学习中能在最短的时间内掌握本章节的内容。

典型例题及训练题

本版块分为例题和训练题两部分。基础篇较简单。学生通过基础篇的训练能尽快地掌握本章节的基本内容，对基本内容和概念加深理解并

熟练掌握。

提高篇具有相当的难度。学生通过提高篇的训练，不仅能更熟练地掌握本章节的基本内容，而且能对与本章节相关联的内容有一定的理解和掌握。

拓展篇的题难度很大，但这些题都是在本章节的基础知识之上进行变型和延伸的，因此，这些题是本章节内容的总结与拓展。学生通过拓展篇的训练，能够对本章节的内容有个明晰的认识。

参考答案

全书给出了标准答案，有一定难度的题还给出了解题思路和具体步骤。

充分阅读本书，通过这种阶梯式的训练，任何学生都能迅速有效地掌握本章节的内容，从而达到点击专项的目的。

目 录 Contents

第一章 圆锥曲线与方程

本章内容及要求

椭圆及其标准方程,椭圆的简单几何性质;双曲线及其标准方程,双曲线的简单几何性质;抛物线及其标准方程,抛物线的简单几何性质;直线与圆锥曲线的位置关系;曲线与方程,求曲线的方程;圆锥曲线的简单应用.

(1)了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

(2)经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程,掌握它们的定义、标准方程、几何图形及简单性质.

(3)了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,知道双曲线的有关性质.

(4)能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题(直线与圆锥曲线的位置关系)和实际问题.

(5)通过圆锥曲线的学习,进一步体会数形结合的思想.

(6)结合已学过的曲线及其方程的实例,了解曲线与方程的对应关系,进一步感受数形结合的基本思想.

第一节　曲线与方程

一、知识归纳

1. 曲线和方程

在直角坐标系中,如果某曲线 C(看作适合某种条件的点的集合或轨迹)上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下关系:

(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解;

(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点,那么这个方程叫做曲线的方程,这条曲线叫做方程的曲线.

注意:曲线的方程和方程的曲线是解析几何的重要概念,要了解曲线上的点集与方程的解集之间的一一对应关系,从而掌握这两个概念,要弄清曲线和方程的内在

联系：

①"曲线上的点的坐标都是这个方程的解"，阐明曲线上没有坐标不满足方程的点，也就是说曲线上所有的点都适合这个条件，毫无例外（纯粹性）；

②"以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点"，阐明适合条件的所有点都在曲线上，毫无遗漏（完备性）；

曲线与方程是同一关系的两种不同表现形式，曲线的性质完全可以反映在它的方程上；方程的性质又可以完全反映在它的曲线上，因此我们就可以通过方程来研究曲线，也可以利用曲线来研究方程，这正是解析几何处理问题的基本思想.

2. 直接法求曲线方程

解析几何的两大基本问题，一是已知曲线求方程，二是通过方程研究曲线的性质.

求曲线（图形）的方程，一般有下面几个步骤：

(1)建立适当的坐标系，用有序实数对，例如(x,y)表示曲线上任一点M的坐标；

(2)写出适合条件P的点M的集合$P=\{M|P(M)\}$；

(3)用坐标表示条件$P(M)$，列出方程$f(x,y)=0$；

(4)化方程$f(x,y)=0$为最简形式；

(5)证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

注意：求曲线方程时，步骤(2)常可省略不写，而直接建立方程，另外，若化简方程的过程都是同解变形过程，最后一步的验证也可省略不写，如有特殊情况，可以适当加以说明.

3. 求轨迹方程的常用方法

(1)直接法：如果题目中的条件有明显的等量关系或者可以推出等量关系，即可用求曲线方程的五个步骤直接求解，即建立坐标系、设点、列式、化简、证明（结论）.

(2)定义法：如果动点的轨迹满足某种已知曲线的定义，则可依定义写出轨迹方程.

(3)相关点法：如果动点$P(x,y)$依赖于另一动点$Q(x_1,y_1)$，而$Q(x_1,y_1)$又在某已知曲线上，则可先列出关于x,y,x_1,y_1的方程组，利用x、y表示x_1、y_1，把x_1、y_1代入已知曲线方程即得所求.

(4)参数法：如果动点$P(x,y)$的坐标之间的关系不易找到，可考虑将x、y用一个或几个参数来表示，消去参数即得其轨迹方程.

(5)交轨法：写出动点所满足的两个轨迹方程后，组成方程组消参即可解得，此法适用于求两动直线交点的轨迹方程.

4. 对称问题题型方法分析

(1)对称问题分为中心对称和轴对称两类，中心对称仅用中点坐标公式即可，轴对称中对称点连线的垂直平分线就是对称轴，根据中点坐标公式及斜率的关系列出方程组即可解决.

(2)解析几何中用对称知识解决的问题主要有两类:一是求对称点、对称曲线的问题,此时掌握一些特殊的对称很有必要,如关于原点对称、关于坐标轴对称、关于直线 $y=\pm x$ 对称以及关于斜率为 ± 1 的直线对称等;二是在一些数学问题中隐含着某种对称性,仔细挖掘这些条件,就可使问题得到解决.

5. 学法指导

曲线与方程的对应关系,是解析几何的最基本问题之一,特别是求曲线的方程是解析几何的重点内容,这方面的内容常见于高考试卷的某些中等题和难题之中.

(1)视曲线为点集,曲线上的点应满足的条件转化为动点坐标(x,y)所满足的方程,则曲线上的点集与方程的解集之间建立了一一对应关系.

(2)求曲线的方程是解析几何的基本内容,必须正确理解各种方法在什么情况下使用,常用方法:定义法、待定系数法、直接法、代入法、参数法,在解题时考虑顺序使用往往是寻求解题方法的思维程序.

应熟练掌握求轨迹方程的四种最常用、最主要的方法,即直译法、定义法、相关点法和参数法,求轨迹方程的一般步骤是:①建立适当的坐标系;②设动点的坐标为(x,y);③列出动点所具有的几何性质;④将上述几何性质坐标化,得到关于 x,y 的方程;⑤将上述方程化简、整理,得到动点(x,y)满足的轨迹方程 $f(x,y)=0$;⑥检验.

注意:第⑥步检验,就是检查轨迹的完备性和纯粹性,即检查轨迹是否有“漏掉”的点或“杂点”,补上漏点,去掉杂点.

(3)求曲线的方程与求轨迹是有区别的,若是求轨迹则不仅要求出方程,而且还需说明和讨论所求轨迹是什么样的图形,在何处,即图形的形状、位置、大小都需说明、讨论清楚.

二、典型例题及训练题

(一)基础篇

典例分析

题型一:有关曲线的方程、方程的曲线的定义问题

例1 命题“曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解”是正确的,下列命题中正确的是 (　　)

A. 方程 $f(x,y)=0$ 的曲线是 C

B. 方程 $f(x,y)=0$ 的曲线不一定是 C

C. $f(x,y)=0$ 是曲线 C 的方程

D. 以方程 $f(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上

分析:若设 $A=\{(x,y)\mid(x,y)\text{在}C\text{上}\}$, $B=\{(x,y)\mid f(x,y)=0\}$,则由题意,易知

$A\subseteq B$,但是 $B\subseteq A$ 不一定成立.

解:不论方程 $f(x,y)=0$ 是曲线 C 的方程,还是曲线 C 是方程 $f(x,y)=0$ 的曲线,都必须同时满足两层含义:曲线上的点的坐标都是方程的解;以方程的解为坐标的点都在曲线上. 所以 A、C、D 错误. 选 B. 举例如下:曲线 C:一、三象限角平分线,方程 $|x|=|y|$,显然满足已知条件,但 A、C、D 错.

点评

曲线的方程(方程的曲线)判定方法是充分利用定义进行判断,只有同时满足(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解;(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点时,即只有当集合 A 与 B 是一个集合的两种表示方法($A=B$)时才能说 B 是 A 的方程或 A 是 B 的曲线.

例 2 设方程 $f(x,y)=0$ 的解集非空,如果命题"坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点都在曲线 C 上"是不正确的,则下列命题正确的是 (　　)

A. 坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点都不在曲线 C 上

B. 曲线 C 上的点的坐标都不满足方程 $f(x,y)=0$

C. 坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点有些在曲线 C 上,有些不在曲线 C 上

D. 一定有不在曲线 C 上的点,其坐标满足 $f(x,y)=0$

分析:设 $A=\{(x,y)|f(x,y)=0\}$,$B=\{(x,y)|(x,y)$ 在 C 上$\}$ 由题意易知 $A\not\subseteq B$.

解:"坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点都在曲线 C 上不正确",即"坐标满足方程 $f(x,y)=0$ 的点不都在曲线 C 上"是正确的."不都在"包括"都不在"和"有的在,有的不在"两种情况,故 A、C 错. B 显然错. 选 D.

点评

由于曲线的方程和方程的曲线是一个集合的两种表现形式(一个用方程的解的集合表示,另一个用曲线上的点的集合表示)即两个集合是相等的集合,因此利用集合的观点,对曲线上的点集与方程的解集判断是否相等使问题较易解决.

题型二:判断方程的曲线与曲线的方程问题

例 3 已知 $A(1,0)$,$B(0,1)$,问线段 AB 的方程是不是 $x+y-1=0$? 为什么?

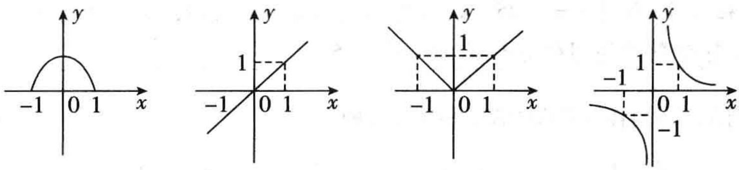
分析:要判断方程 $x+y-1=0$ 是不是线段 AB 的方程,既要判断 AB 上任意一点的坐标都是不是方程 $x+y-1=0$ 的解,又要判断以 $x+y-1=0$ 的解为坐标的点是否在线段 AB 上.

解:线段 AB 上任意一点坐标都是方程 $x+y-1=0$ 的解,但是以方程 $x+y-1=0$ 的解为坐标的点却不都在线段上,如点 $C(2,-1)$ 是以 $x+y-1=0$ 的解为坐标的点,但点 C 不在线段 AB 上,所以 $x+y-1=0$ 不是线段 AB 的方程.

点评

此题中曲线上的点都使方程成立. 但是有些方程的解(如$(2,-1)$)不在曲线上,因此$x+y-1=0$不是线段AB的方程,线段AB的方程是$x+y=1(0\leqslant x\leqslant 1)$.

例4 判断图中每个图下面的方程是否为图中曲线的方程.



$x^2+y^2=1$　　$x^2-y^2=0$　　$y=|x|$　　$\lg x-\lg y=0$

(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图1-1-1

分析:判断曲线与方程的关系,必须严格按照定义中叙述的两条一一验证,缺一不可.

解:图1-1-1(a)中由于$x^2+y^2=1$的解$x,y\in[-1,1]$,所以当$y<0$时,点(x,y)不在曲线上,不符合定义中的(2).

图1-1-1(b)中,由于$x^2-y^2=0$的解是$x=\pm y$,所以$y>0$时,$x=-y<0$,而$x<0$的点显然不在图象上,不符合定义中的(2).

图1-1-1(c)中既符合定义中的(1),又符合定义中的(2),故此方程为曲线的方程.

图1-1-1(d)中,由于$\lg x-\lg y=0$的定义域是$x>0,y>0$,所以图象中第三象限的点的坐标不是方程的解,不符合定义中的(1).

点评

解析几何要解决两类问题(1)已知曲线求方程,(2)已知方程画曲线,前者是这节要解决的问题,其次已知方程画曲线时要注意方程的对称性、取值范围及等量关系.

例5 以圆心为坐标原点,半径等于5的圆的方程是不是$y=\sqrt{25-x^2}$? 为什么?

分析:本题考查方程的曲线和曲线的方程的定义,关键看它们是否同时满足性质(1)和性质(2).

解:因为以方程$y=\sqrt{25-x^2}$的任意解$M(x_0,y_0)$为坐标的点满足$y_0=\sqrt{25-x_0^2}$,$x_0^2+y_0^2=25$,$\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-0)^2}=5$,于是$|OM|=5$,所以$M$在以原点为

圆心,5 为半径的圆上.

但是以原点为圆心,5 为半径的点,如$(0,-5)$不是方程$y=\sqrt{25-x^2}$的解. 所以方程$y=\sqrt{25-x^2}$不是以坐标原点为圆心,5 为半径的圆的方程.

点评

此题中方程的解构成的点都在曲线上,但是曲线上的点$(0,-5)$不能使方程成立. 因此$y=\sqrt{25-x^2}$不是以圆心为坐标原点、半径等于5的圆的方程. 符合题意的圆的方程是$x^2+y^2=25$.

例6 下列各组方程中表示相同曲线的是 ( )

A. $y=x,\dfrac{y}{x}=1$ B. $y=x,y=\sqrt{x^2}$ C. $|y|=|x|,\sqrt{x}=\sqrt{y}$ D. $|y|=|x|,x^2=y^2$

解:因为在 A 中,$y=x$表示一条直线,而$\dfrac{y}{x}=1$表示这条直线隐去一点$(0,0)$,在 B 中,$y=x$表示一条直线,而$y=\sqrt{x^2}$表示一条折线,在 C 中,$|y|=|x|$表示两条相交直线,而$\sqrt{x}=\sqrt{y}$表示一条射线,在 D 中$|y|=|x|$与$x^2=y^2$都表示两条相交直线,故选 D.

点评

两个方程是否表示相同的曲线要看两点:(1)是否具有相同的等量关系,(2)看变量是否具有相同的取值范围.

题型三:方程的曲线与曲线的方程的应用

例7 曲线$x^2-2xy+y^2+ay-b=0$经过两点$M_1(1,0)$,$M_2(0,-2)$,求a,b的值.

解:$\because M_1$、M_2在曲线上,$\therefore$一定满足曲线的方程.

由$M_1(1,0)$、$M_2(0,-2)$是曲线上的点可得

$$\begin{cases}1^2-2\cdot1\cdot0+0^2+a\cdot0-b=0\\0^2-2\cdot0\cdot(-2)+(-2)^2+a\cdot(-2)-b=0\end{cases}$$ 解之,得$\begin{cases}a=\dfrac{3}{2},\\b=1.\end{cases}$

点评

充分利用曲线上的点使方程成立的结论,经常能够求出方程中的待定系数.

例8 证明以$C(0,3)$为圆心,以2为半径的圆的方程$x^2+(y-3)^2=4$,并判断点$M(\sqrt{3},4)$,$N(1,3+\sqrt{3})$,$P(0,1)$,$Q(1,0)$是否在圆上.

分析:根据曲线的方程和方程的曲线的定义,本题应证明两点:(1)证明圆上任一点$M(x_0,y_0)$的坐标(x_0,y_0)都是方程$x^2+(y-3)^2=4$的解,即${x_0}^2+(y_0-3)^2=4$;

(2)证明以方程 $x^2+(y-3)^2=4$ 的解为坐标的点 $M(x_0,y_0)$ 都在圆上,即 $|MC|=2$.

证明:(1)设 $M'(x_0,y_0)$ 是圆上的任一点,即 $|M'C|=2$, $\therefore\ \sqrt{x_0^2+(y_0-3)^2}=2$,即 $x_0^2+(y_0-3)^2=4$. $\therefore$ (x_0,y_0) 是方程 $x^2+(y-3)^2=4$ 的解.

(2)设 (x_0,y_0) 是方程 $x^2+(y-3)^2=4$ 的解,设 $M'(x_0,y_0)$,则 $x^2+(y_0-3)^2=4$.

$\therefore\ \sqrt{x_0^2+(y_0-3)^2}=2\quad \therefore\ |M'C|=2$.

故点 $M'(x_0,y_0)$ 到 C 点的距离等于2,点 M' 在以 C 为圆心,2为半径的圆上.

由(1)、(2)可知,以点 $C(0,3)$ 为圆心,2为半径的圆的方程 $x^2+(y-3)^2=4$.

把点 M 的坐标代入方程 $x^2+(y-3)^2=4$,左右两边相等,即 $(\sqrt{3},4)$ 是方程的解,所以 M 点在这个圆上,同理可判断点 N,P 在圆上,而点 $Q(1,0)$ 不在这个圆上.

点评

在(2)的证明中,数"凑"成能表达其几何性质的形式,促成数到形的转化,需要确定具体的目标.判断点是否在曲线上,利用方程所呈现的数量关系即能完成,初步得出由数研究形的思想方法.

题型四:曲线方程的求法(直接法)

例9 已知点 M 到两定点 A、B 的距离之和为12,且 $|AB|=8$,求点 M 的轨迹方程.

分析:原题中没有建立直角坐标系,因此首先建立直角坐标系.

解:以 AB 中点为坐标原点,直线 AB 为 x 轴建立直角坐标系,那么, $A(4,0)$、$B(-4,0)$. 设 $M(x,y)$ 为轨迹上任意一点,则 $M\in\{M\mid |MA|+|MB|=12\}$,

$\therefore\ \sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=12$. 化简得 $5x^2+9y^2-180=0$.

点评

原题中没有确定坐标系,此时必须首先选取适当的坐标系,坐标系选取得适当,可使运算过程简单,所得的方程也较简单,常选对称轴为轴,对称中心为原点,再如中点,三角形的内心、外心、重心等作原点.

例10 已知两点 $A(0,1)$、$B(1,0)$,且 $|MA|=2|MB|$,求点 M 的轨迹方程.

分析:设出 M 点的坐标 (x,y),利用两点间的距离公式,将 $|MA|$, $|MB|$ 具体化,转化为含有 x,y 的方程,进一步证明所求方程为符合条件的轨迹方程.

解:设点 M 的坐标为 (x,y),由两点间的距离公式,得:

$|MA|=\sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}$, $|MB|=\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$.

又 $|MA|=2|MB|\quad\therefore\ \sqrt{(x-0)^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}$.

两边平方,并整理得 $3x^2+3y^2+2y-8x+3=0$

即 $(x-\frac{4}{3})^2+(y+\frac{1}{3})^2=\frac{7}{9}$.

点评

由条件得出 $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,不整理虽然也是所求的轨迹方程,但不是最简形式,也不利于判断轨迹的形状,因此注意化简.

例 11 线段 AB 与 CD 互相垂直平分,$|AB|=2a$,$|CD|=2b$.动点 M 满足 $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$,求动点 M 的轨迹方程.

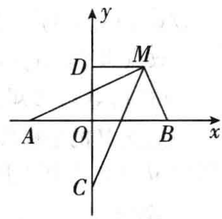


图 1-1-2

分析:题目中没有坐标系,应先考虑建立适当的坐标系,然后设出动点的坐标,求出定点的坐标,把几何条件具体化,从而求出轨迹的方程.

解:以 AB 的中点 O 为坐标原点,直线 AB 为 x 轴,建立直角坐标系,如图 1-1-2.设 M 点的坐标为 (x,y),由 $|AB|=2a$,$|CD|=2b$,可求得 $A(-a,0)$,$B(a,0)$,$C(0,-b)$,$D(0,b)$.

由 $|MA|\cdot|MB|=|MC|\cdot|MD|$ 得

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y+b)^2}\cdot\sqrt{x^2+(y-b)^2}.$$

整理,化简得 $x^2-y^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2)$,不难证明,此为所求的轨迹方程.

点评

1.从例 11 可以看出,求曲线的方程,一般有下面几个步骤:

(1)建立适当的直角坐标系,用 (x,y) 表示曲线上任意一点 M 的坐标(通常称为建系设点,建系往往依赖于直角、中点等);

(2)写出适合条件 P 的点 M 的集合 $P=\{M|P(M)\}$(称为列几何等式或特征);

(3)用坐标表示条件 $P(M)$,列出方程 $f(x,y)=0$(称为几何条件或等式代数化或坐标化);

(4)化方程 $f(x,y)=0$ 为最简形式(便于参与代数运算);

(5)证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点(具备纯粹性和完备性).

2.(1)除个别情况外,化简过程都是同解变形过程,步骤(5)可省略不写,如有特殊情况,应予以说明.有时,也可根据实际情况,省略步骤(2),直接列出曲线方程.

(2)上述求曲线方程的方法,其实就是列方程解几何题,称之为"直译法",也有的称为"五步法",其实质就是几何条件代数化(坐标化).

基础训练

1. 方程 $xy^2-x^2y=8x$ 所表示的曲线　　（　　）

A. 关于 y 轴对称　　B. 关于直线 $x+y=0$ 对称

C. 关于直线 $x-y=0$ 对称　　D. 关于原点对称

2. 图1－1－3所表示的曲线方程为(　　)

A. $|x|+y=0$　　B. $\frac{|x|}{y}=-1$

C. $x+|y|=0$　　D. $\frac{x}{|y|}=-1$

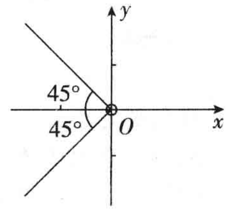


图1－1－3

3. 方程 $(x^2-4)^2+\sqrt{y^2-4}=0$ 表示的图形是　　（　　）

A. 两条直线　　B. 两个点

C. 四个点　　D. 四条直线

4. 到两坐标轴的距离的积等于3的点的轨迹方程是　　（　　）

A. $xy=3$　　B. $xy=-3$　　C. $xy=9$　　D. $|xy|=3$

5. 方程 $|y-x|=x$ 表示的曲线是　　（　　）

A. 一条直线　　B. 一条射线　　C. 两条射线　　D. 两条直线

6. 到直线 $x+y+1=0$ 的距离等于 $4\sqrt{2}$ 的动点 M 的轨迹方程是　　（　　）

A. $x+y+9=0$　　B. $x+y-7=0$

C. $x+y+9=0$，或 $x+y-7=0$　　D. $x-y-7=0$

7. 已知点 $A(1,-2)$，动点 P 满足 $|PA|=3|PO|$，O 为坐标原点，则 P 点的轨迹方程是　　（　　）

A. $8x^2+8y^2+2x-4y-5=0$　　B. $8x^2+8y^2-2x-4y-5=0$

C. $8x^2+8y^2+2x+4y-5=0$　　D. $8x^2+8y^2-2x+4y-5=0$

8. 到两定点 $A(0,0)$，$B(3,4)$ 距离之和为5的点的轨迹方程是________.

9. 等腰三角形一腰的两端点分别是 $A(4,2)$ 和 $B(3,5)$，试求此三角形第三个顶点的轨迹方程.

（二）提高篇

典例分析

题型一：有关曲线的方程、方程的曲线的定义问题

例1 命题 p：曲线 C 上的点的坐标都是方程 $f(x,y)=0$ 的解，命题 q：曲线 C 是方程 $f(x,y)=0$ 的曲线，则 p 成立是 q 成立的　　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　　　　　　　　　　　D. 既不充分又不必要条件

分析：由曲线方程的概念，称曲线 C 是方程 $f(x,y)=0$ 的曲线，是指曲线 C 上的点的坐标都是这个方程的解；反之，以这个方程的解为坐标的点都在曲线 C 上.

解：q 成立时 p 一定成立，p 成立时 q 不一定成立，故选 B.

点评

曲线和方程是解析几何中最重要的概念，为保证曲线上的点集和以方程的解为坐标的点集是相同的，两个条件缺一不可. 若设曲线上的点集为 A，以方程的解为坐标的点集为 B，则(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解，即为 $A\subseteq B$；(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点，即为 $B\subseteq A$，两个条件都具备，则 $A=B$.

题型二：判断方程的曲线与曲线的方程问题

例 2　方程 $\sqrt{1-|x|}=\sqrt{1-y}$ 表示的曲线是　　（　　）

A. 两条线段　　　　　　B. 两条直线

C. 两条射线　　　　　　D. 一条射线和一条线段

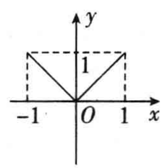


图 1-1-4

分析：由已知得 $1-|x|=1-y$，$1-y\geqslant0$. $\therefore y=|x|$，$y\leqslant1$. 如图 1-1-4.

答案：A

点评

此类问题特别要注意取值范围.

例 3　方程 $(x+y-1)\sqrt{x-1}=0$ 表示什么曲线？

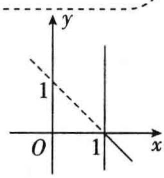


图 1-1-5

解：由方程 $(x+y-1)\sqrt{x-1}=0$，

可得 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\x+y-1=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x-1\geqslant0,\\\sqrt{x-1}=0.\end{cases}$

即 $x+y-1=0(x\geqslant1)$，或 $x=1$.

表示直线 $x=1$ 和射线 $x+y-1=0(x\geqslant1)$（如图 1-1-5 所示）.

点评

为了判断方程表示什么曲线，当给出的方程不易看出表示什么曲线时，需对原方程变形，变形过程一定要注意与原方程的等价性，否则变形后的方程表示的曲线，就不是原方程的曲线了.

题型三：方程的曲线、曲线的方程的应用

例 4　函数 $y=ax^2+1$ 的图象与直线 $y=x$ 相切，则 a 等于　　（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

解:由$\begin{cases} y=x, \\ y=ax^2+1, \end{cases}$得 $ax^2-x+1=0$,$\Delta=0$ 得 $a=\frac{1}{4}$.

答案:B

点评

由曲线上点的坐标和它的方程的解之间的对应关系可知,两条曲线的交点的坐标,应该是由这两条曲线的方程所组成的方程组的实数解. 方程组有几组实数解,这两条曲线就有几个交点. 本题考查直线与抛物线的位置关系.

例5　求直线 $y=x+\frac{3}{2}$ 被曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 截得的线段的长.

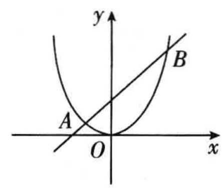


图1-1-6

解:解法一　先求交点 A、B,如图1-1-6.

由$\begin{cases} y=x+\frac{3}{2}, \\ y=\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$消去 y,得 $x^2-2x-3=0$.

解得$\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=\frac{1}{2}, \end{cases}$或$\begin{cases} x_2=3, \\ y_2=\frac{9}{2}. \end{cases}$

$\therefore A\left(-1,\frac{1}{2}\right)$、$B\left(3,\frac{9}{2}\right)$.

直线被曲线截得的线段长 $|AB|=\sqrt{(3+1)^2+\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}=4\sqrt{2}$.

点评

(1)本题是直线与抛物线相交,它们的方程组有两解,故有两个交点.

(2)一般的,直线被二次曲线所截得的线段,通常称为“弦”.

解法二　设交点的坐标为 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则 $y_1=x_1+\frac{3}{2}$,$y_2=x_2+\frac{3}{2}$.

$\therefore y_1-y_2=x_1-x_2$.　由$\begin{cases} y=x+\frac{3}{2}, \\ y=\frac{1}{2}x^2. \end{cases}$消去 y,得 $x^2-2x-3=0$.

$\therefore x_1+x_2=2$,$x_1x_2=-3$.