



文登教育

Wendeng Education

2012

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学 复习指南

修订版

陈文灯 黄先开 主 编

- ◆ **全新改版**，内容把控全面提升。
- ◆ 新增**思维定势**，迅速提高应试技巧。
- ◆ “**化繁为简，变难为易**”，方法独到而有效。
- ◆ 买指南，送网校。**99课时**，价值**500元**的基础班视频**全额赠送**！
详见书内彩页说明！



北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



2012

文登教育集团课堂用书

(经济类)

考研数学 复习指南

修订版

陈文灯 主 编

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南. 经济类 / 陈文灯, 黄先开主
编. —北京: 北京理工大学出版社, 2011. 1
(文登教育)
ISBN 978-7-5640-4150-2

I. ①考… II. ①陈… ②黄… III. ①高等数学-研究生-入
学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 261286 号

出版发行 / 北京理工大学出版社

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京时代华都印刷有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 35

字 数 / 777 千字

版 次 / 2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 53.80 元

责任校对 / 王 丹

责任印制 / 母长新

陈文灯老师关于 2012 版考研数学复习指南系列图书出版情况的重要声明

亲爱的读者朋友们,为了更严格地控制图书质量,以便更好地为广大考生服务,由本人编写的《考研数学复习指南系列图书 2012 版》将由北京理工大学出版社出版,并于 2011 年初开始发行。

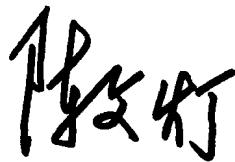
近期,世界图书出版公司出版并发行了同名图书,并声称此书是由本人署名并亲自编写的,这让我们特别吃惊,本人特在此敬告广大考生:世界图书出版公司出版的《考研数学复习指南系列图书 2012 版》未经本人授权,更不是本人亲自编写的,完全属于侵权产品,我对该书的内容不负任何责任,请广大考生出于维护知识产权的目的,更是为了珍惜自己宝贵的复习时间,切勿购买此书。对于这种赤裸裸的侵权行为,我们也一定拿起法律武器来维护自己的合法权益,相信很快就会给广大读者一个交代!

目前,把这本书写好,让书的质量更上一层楼才是我们的当务之急。趁这次更换出版社之机,我们不但对本书做了问世以来最大的修订(见本书前言),而且在营销方面,我们也从考生需求角度出发,力争给考生提供最好的帮助。

(1)与文登网校相配合,结合文登网校自身优势,以书为载体,网上网下全面互动。每购买一本《考研数学复习指南》都会全额赠送文登网校全套基础过关班视频,该视频价值 500 元,长度达 99 个课时,从基础辅导到习题训练,确保基础过关。促销力度在考研图书中是空前的。

(2)我们将与考研加油站(www.kaoyan.com)结成战略合作伙伴,从学生的实际需求出发,定期举办送书,讲座等活动。并在数学论坛开辟一个板块,由我或者文登学校的数学老师专门为学生答疑,在考研路上,为您扫除一切障碍!

最后,希望广大考生在 2012 年度研究生入学考试中能够取得好成绩,更希望我们的图书能给您的复习带来帮助!



2010 年 12 月

前言

本书从1995年出版以来,经历了十五六年,帮助许许多多考研学子圆了他们的梦想,帮助得益于本书的硕士和博士生们应用“数学的思维”方法在学习研究中而取得了优异成绩。这期间,有不少数学同仁为使本书更完臻至善提出了宝贵的意见,借此机会向他们表示感谢。

当然,最近几年也有人在某种利益的驱使下,对本书进行诋毁、攻击,有人说:

“书太难了,对考研没有帮助”。“难不难”不是凭谁的一句话,而是由“考试大纲”来确定,由最近几年的试题来印证的。要知道考研数学,是“水平+选拔”的考试,绝非只是水平考试。

“书中的方法太玄妙,国家考试中心命题组组长不承认。”这是谎言,为慎重起见,编者还曾电话询问过,回答:绝无此事。

“书没有与时俱进,每一版没有什么变化。”应试书应该根据考试大纲的内容的变化而变化。实事求是地讲,大纲是没有什么根本性的变化,因此我的书也就不作大的修改,那种改换一个例题的做法并不是难事,但对广大读者来说又能起到多大的作用呢,我们不想用“朝三暮四”的耍猴方法糊弄读者。

趁这次更换出版社之机,我们对本书做了问世以来最大的修订,修订的地方包括以下几个方面:

(1)“拨乱反正”,把被人随意添加或改错的地方更正过来。例如,积分中值定理、无穷级数中的积分判别法等。

(2)体例上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应试考试很有用,根据题型特点,能很快找到解题突破口。综合题解析,是帮助同学们将各知识点“珠联璧合”,以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)“变繁为简,变难为易”。将常考、考生感到棘手的内容进行归纳总结,得到所谓的“玄妙”,但又特别有效的解题方法和技巧。例如,连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明,尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的作法,经过我们的分析原题将变得非常“初等”,非常简单,只要仿效,即可获得成功。

最后回答考生们的问题:“如何有效地利用您的书提高复习效果,考好数学,书要看几遍?”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看,对基础部分要多下点功夫,做到概念、定理能用自己的语言叙述,习题应全部都做。高数的基础:极限、导数与微分、不定积

分;线性代数的基础:矩阵的初等变换,含有参数的线性方程组解的讨论,方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率,其中古典概型,条件概率与乘法公式,全概率公式与贝叶斯公式,贝努里概型,随机变量及其分布(特别是二维连续型),随机变量的数字特征(期望 $E(X)$ 、方差 $D(X)$ 、协方差 $\text{Cov}(X, Y)$, 相关系数 ρ_{xy})。如果是自学,先仔仔细细地看一遍,然后再看二三遍;参加辅导班的同学,最好应该与上课“同步”进行,课后再看一遍即可。书后的习题不要求全做,我们只给出答案或证明提示。给出习题的全部解答过程并不好,这个是我们不提倡的。

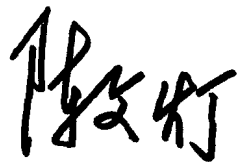
送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,

技巧演练靠题型。

勤学苦练强磨砺,

功到高分自然成。



2010. 11. 22

目 录

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续 1

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 1

一、函数的基本性质 1

二、分段函数 5

三、反函数 5

四、复合函数 6

五、初等函数 9

六、函数的极限及其连续性 9

七、重要公式和定理 12

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 19

题型一 未定式的定值法 19

题型二 类未定式的计算 23

题型三 数列的极限 24

题型四 极限式中常数的确定(重点) 29

题型五 函数连续或间断点的判定 32

第 3 节 思维定势及综合题解析 34

一、思维定势 34

二、综合题解析 38

习题一 39

第二章 导数与微分 43

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 43

一、导数与微分的定义 43

二、重要定理 45

三、导数与微分的运算法则 45

四、基本公式 45

五、高阶导数的定义与基本公式 46

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 46

题型一 求复合函数的导数或微分 46

题型二 求隐函数的导数或微分 48

题型三 求幂指函数的导数或微分 48

题型四 求表达式为若干因子连乘积、乘方、开方或商形式的函数的导数或微分 49

题型五 求分段函数的导数或微分 49

题型六 求高阶导数 51

第 3 节 思维定势及综合题解析 54

一、思维定势 54

二、综合题解析 54

习题二 56

第三章 不定积分 60

第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析 60

一、不定积分的基本概念 60

二、基本性质 60

三、基本公式 61

四、基本积分法 62

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧 75

题型一 有理函数的不定积分 75

题型二 简单无理函数的不定积分 76

题型三 三角有理式的不定积分 77

题型四 含有反三角函数的不定积分 81

题型五 抽象函数的不定积分 81

题型六 分段函数的不定积分	82
第 3 节 思维定势及综合题解析	83
一、思维定势	83
二、综合题解析	84
习题三	86
第四章 定积分及反常积分	90
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	90
一、基本性质	90
二、定理和公式	93
三、定积分的计算法	96
四、反常积分的基本概念	100
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	101
题型一 分段函数的定积分	101
题型二 被积函数带有绝对值符号的定积分	103
题型三 被积函数中含有“变限积分”的定积分	104
题型四 对称区间上的定积分	106
题型五 被积函数的分母为两项,而分子为其中一项的定积分	107
题型六 由三角有理式与其他初等函数通过四则运算或复合而成的定积分	108
题型七 已知一定积分,求另一一定积分	109
题型八 定积分等式的证明	110
题型九 定积分不等式的证明	118
题型十 计算反常积分	123
题型十一 反常积分的判敛	124
第 3 节 思维定势及综合题解析	125
一、思维定势	125
二、综合题解析	126
习题四	127
第五章 微分中值定理	131
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	131

第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	132
题型一 闭区间上连续函数命题的证明	132
题型二 证明给出的函数 $f(x)$ 满足某中值定理	135
题型三 证明某个函数恒等于一个常数的命题	136
题型四 命题 $f^{(n)}(\xi)=0$ 的证明	137
题型五 欲证结论:至少存在一点 $\xi \in (a, b)$,使得 $f^{(n)}(\xi)=k(k \neq 0)$ 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式成立	138
题型六 欲证结论:在 (a, b) ,内至少存在 $\xi, \eta(\xi \neq \eta)$ 满足某个代数式	141
第 3 节 思维定势及综合题解析	142
一、思维定势	142
二、综合题解析	144
习题五	146
第六章 常微分方程与差分方程	148
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	148
一、基本概念	148
二、二阶线性微分方程解的结构	148
三、二阶常系数线性微分方程	150
四、 n 阶常系数线性微分方程	150
五、差分方程	153
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	153
题型一 一阶微分方程的计算	153
题型二 计算二阶线性微分方程	161
题型三 计算一阶线性差分方程	164
题型四 微分方程的应用	166
第 3 节 思维定势及综合题解析	167
一、思维定势	167
二、综合题解析	168

习题六	169
第七章 一元微积分的应用	172
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	172
一、函数的单调增减性定理	172
二、函数的极值与最值	173
三、函数凹凸性的判别与函数的拐点	174
四、微元法及其应用	176
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	177
题型一 求函数的极值	177
题型二 求函数的最值	178
题型三 关于方程根的讨论	179
题型四 函数渐近线的求解	184
题型五 函数作图	184
题型六 求平面图形的面积	185
题型七 求旋转体的体积	187
第 3 节 思维定势与综合题解析	188
一、思维定势	188
二、综合题解析	190
习题七	192
第八章 无穷级数	195
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	195
一、无穷级数的基本概念和性质	195
二、数项级数敛散法	196
三、函数项级数的概念	201
四、幂级数的概念和性质	201
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	203
题型一 正项级数的判敛	203
题型二 任意项级数的判敛	205
题型三 级数的证明或判敛	207
题型四 计算函数项级数收敛域	209
题型五 求幂级数的收敛域、收敛半径	210
题型六 函数在某点的幂级数展开	212

题型七 幂级数求和	214
题型八 数项级数求和	218
第 3 节 思维定势及综合题解析	221
一、思维定势	221
二、综合题解析	222
习题八	223
第九章 多元函数微分学	227
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	227
一、二元函数的定义	227
二、二元函数的极限及连续性	228
三、偏导数、全导数及全微分	229
四、基本定理	230
五、多元函数的极值	232
六、条件极值与无条件极值	233
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	233
题型一 简单显函数 $u=f(x,y,z)$ 的微分法	233
题型二 复合函数微分法	234
题型三 隐函数微分法	237
题型四 求无条件极值	240
题型五 求条件极值	241
题型六 求最值	242
第 3 节 思维定势及综合题解析	243
一、思维定势	243
二、综合题解析	243
习题九	244
第十章 二重积分	247
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	247
一、基本概念	247
二、性质	247
三、二重积分的解题技巧	249
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	251
题型一 更换二重积分的积分次序	251

题型二 选择二重积分的积分次序	253
题型三 二重积分坐标系的选择	255
题型四 含绝对值、最值符号的二重积分的计算	257
题型五 无界区域上简单二重积分的计算	260
题型六 二重积分等式的证明	261
题型七 二重积分不等式的证明	262
第3节 思维定势及综合题解析	264
一、思维定势	264
二、综合题解析	265
习题十	266
第十一章 函数方程与不等式证明	269
第1节 函数方程	269
一、利用函数表示法与用何字母表示无关的“特性”求解方程	269
二、利用极限求解函数方程	270
三、利用导数的定义求解方程	271
四、利用变限积分的可导性求解方程	271
五、利用连续函数的可积性及原函数的连续性求解	272
第2节 不等式的证明	273
一、引入参数法	273
二、利用微分中值定理	274
三、利用函数的单调增减性(重点)	276
四、利用函数的极值与最值	278
五、利用函数图形的凹凸性	279
六、利用泰勒展开式	280
七、杂 例	281
习题十一	282
第十二章 微积分在经济中的应用	285
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	285
第2节 重要题型的解题方法和技巧	286
题型一 一元微积分在经济中的应用	286

题型二 二元微分学在经济中的应用	291
习题十二	292

第二篇 线性代数

第一章 行列式	293
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	293
一、排列与逆序	293
二、 n 阶行列式的定义	294
三、行列式的基本性质	295
四、行列式按行(列)展开定理	298
五、重要公式与结论	299
第2节 重要题型的解题方法和技巧	300
题型一 抽象行列式的计算	300
题型二 低阶行列式的计算	301
题型三 n 阶行列式的计算	302
第3节 思维定势与综合题解析	308
一、思维定势	308
二、综合题解析	308
习题一	310
第二章 矩阵	313
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	313
一、矩阵的概念	313
二、矩阵的运算	313
三、逆矩阵的概念	316
四、利用伴随矩阵求逆矩阵	316
五、矩阵的初等变换与求逆	317
六、分块矩阵及其求逆	318
七、矩阵的秩及其求法	319
第2节 重要题型的解题方法和技巧	319
题型一 求逆矩阵	319
题型二 求矩阵的高次幂 A^m	321
题型三 有关初等矩阵的命题	323
题型四 解矩阵方程	324

题型五 求矩阵的秩	326	二、综合题解析	363
题型六 关于矩阵对称、反对称命题的证明	327	习题三	364
题型七 关于方阵 A 可逆的证明	327	第四章 线性方程组	368
题型八 与 A 的伴随阵 A^* 有关联的命题的证明	328	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	368
题型九 关于矩阵秩的命题的证明	329	一、克莱姆法则	368
第3节 思维定势与综合题解析	331	二、线性方程组的基本概念	368
一、思维定势	331	三、线性方程组解的判定	369
二、综合题解析	333	四、非齐次线性方程组与其导出组的解的关系	370
习题二	333	五、线性方程组解的性质	370
第三章 向量	339	六、线性方程组解的结构	370
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	339	第2节 重要题型的解题方法和技巧	371
一、向量的概念与运算	339	题型一 基本概念题(解的判定、性质、结构)	371
二、向量间的线性关系	339	题型二 含有参数的线性方程组解的讨论	375
三、向量组的秩和矩阵的秩	340	题型三 讨论两个方程组的公共解	379
四、向量空间	341	题型四 有关基础解系的证明	381
五、重要定理与公式	342	第3节 思维定势与综合题解析	382
六、小结	343	一、思维定势	382
第2节 重要题型的解题方法和技巧	343	二、综合题解析	383
题型一 讨论向量组的线性相关性	343	习题四	387
题型二 有关向量组线性相关性命题的证明	347	第五章 特征值和特征向量	392
题型三 判定一个向量是否可由一组向量线性表示	353	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	392
题型四 有关向量组线性表示命题的证明	355	一、矩阵的特征值和特征向量的概念	392
题型五 求向量组的极大线性无关组	356	二、相似矩阵及其性质	392
题型六 有关向量组或矩阵秩的计算与证明	357	三、矩阵可相似对角化的充要条件	393
题型七 与向量空间有关的命题	361	四、实对称矩阵及其性质	393
第3节 思维定势与综合题解析	362	五、重要公式与结论	393
一、思维定势	362	第2节 重要题型的解题方法和技巧	394
		题型一 求数值矩阵的特征值与特征向量	394

题型二 求抽象矩阵的特征值、特征向量	396
题型三 特征值、特征向量的逆问题	397
题型四 相似的判定及其逆问题	398
题型五 判断 A 是否可对角化	400
题型六 有关特征值、特征向量的证明题	403
第 3 节 思维定势与综合题解析	405
一、思维定势	405
二、综合题解析	405
习题五	410
第六章 二次型	414
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	414
一、二次型及其矩阵表示	414
二、化二次型为标准型	414
三、配方法和正交变换法	415
四、二次型和矩阵的正定性及其判别法	416
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	419
题型一 二次型所对应的矩阵及其性质	419
题型二 化二次型为标准形	420
题型三 已知二次型通过正交变换化为标准形,反求参数	424
题型四 有关二次型及其矩阵正定性的判定与证明	425
第 3 节 思维定势与综合题解析	427
一、思维定势	427
二、综合题解析	428
习题六	429

第三篇 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	431
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	431

一、随机试验和随机事件	431
二、事件的关系及其运算	432
三、事件的概率及其性质	434
四、条件概率与事件的独立性	435
五、重要概型	436
六、重要公式	436
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	437
题型一 古典概型与几何概型	437
题型二 事件的关系和概率性质的命题	441
题型三 条件概率与积事件概率的计算	442
题型四 全概率公式与 Bayes 公式的命题	443
题型五 有关 Bernoulli 概型的命题	446
第 3 节 思维定势与综合题解析	447
一、思维定势	447
二、综合题解析	449
习题一	449
第二章 随机变量及其分布	453
第 1 节 重要概念、定理和公式的剖析	453
一、概念与公式一览表	453
二、重要的一维分布	457
三、重要的二维分布	459
第 2 节 重要题型的解题方法和技巧	459
题型一 一维随机变量及其分布的概念、性质的命题	459
题型二 求一维随机变量的分布律、概率密度或分布函数	463
题型三 求一维随机变量函数的分布	466
题型四 二维随机变量及其分布的概念、性质的考查	469
题型五 求二维随机变量的各种分布与随	

机变量独立性的讨论	471	二、中心极限定理	524
题型六 求两个随机变量的简单函数的分布	478	三、重要公式与结论	525
第3节 思维定势与综合题解析	483	四、注意	525
一、思维定势	483	第2节 重要题型的解题方法和技巧	525
二、综合题解析	485	题型一 有关切比雪夫不等式与大数定律的命题	525
习题二	486	题型二 有关中心极限定理的命题	527
第三章 随机变量的数字特征	494	习题四	530
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	494	第五章 数理统计的基本概念	531
一、一维随机变量的数字特征(表3-1)	494	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	531
二、二维随机变量的数字特征	496	一、几个基本概念	531
三、几种重要的数学期望与方差(表3-3)	497	二、三个抽样分布—— χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	532
四、重要公式与结论	498	三、正态总体下常用统计量的性质	532
第2节 重要题型的解题方法和技巧	498	四、重要公式与结论	533
题型一 求一维随机变量的数字特征	498	五、经验分布函数	533
题型二 求一维随机变量函数的数学期望	503	第2节 重要题型的解题方法和技巧	534
题型三 求二维随机变量及其函数的数字特征	505	题型一 求统计量的数字特征或取值的概率、样本的容量	534
题型四 有关数字特征的证明题	512	题型二 求统计量的分布	535
题型五 数字特征在经济中的应用	513	第3节 思维定势	537
第3节 思维定势与综合题解析	516	习题五	538
一、思维定势	516	第六章 参数估计	540
二、综合题解析	516	第1节 重要概念、定理和公式的剖析	540
习题三	519	一、矩估计与最大似然估计	540
第四章 大数定律和中心极限定理	524	第2节 重要题型的解题方法和技巧	541
第1节 重要概念、定理和公式的剖析	524	题型一 求矩估计和最大似然估计	541
一、切比雪夫不等式	524	习题六	545

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续

第1节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义, 如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称, 奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质:

- (1) 奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数.
- (2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数; 奇数个奇函数的积为奇函数.
- (3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数: $|x|, \cos x, x^{2n} (n \text{ 为正整数}), e^{|x|}, e^{x^2}, \dots$.

常见的奇函数: $\sin x, \tan x, \frac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \dots$.

例 1.1 判别给定函数的奇偶性, 主要是根据奇偶性的定义, 有时也用其运算性质.

● (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若定义域关于原点不对称, 则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性.

$$(1) y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}); \quad (2) y = \int_0^x f(t) dt, \text{ 其中 } f(x) \text{ 为奇函数};$$

$$(3) y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right), \text{ 其中 } a > 0, a \neq 1, F(x) \text{ 为奇函数}.$$

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, 有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1})$,

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 为奇函数.

$$(2) \text{ 令 } F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \stackrel{\text{令 } t=-u}{=} \int_0^x f(-u)(-du) \\ &= -\int_0^x f(-t) dt = \int_0^x f(t) dt \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 为奇函数}) \\ &= F(x), \end{aligned}$$

故 $y = \int_0^x f(t) dt$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2}$, 则

$$g(-x) = \frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{a^x}{1 - a^x} + \frac{1}{2} = -\frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数, 又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y = F(x) \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right)$ 为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义, 若存在一个与 x 无关的正数 T , 使对于任一 $x \in X$, 恒有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数, 把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期. 周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(ax+b)$ 的周期为 $\frac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 均是以 T 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x), g(x)$ 分别是以 $T_1, T_2, T_1 \neq T_2$ 为周期的函数, 则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1, T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期: $\sin x, \cos x$, 其周期 $T = 2\pi$;

$\tan x, \cot x, |\sin x|, |\cos x|$, 其周期 $T = \pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数, 主要是根据周期的定义, 有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x , 有 $f\left(\frac{1}{2} + x\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$, 则 $f(x)$ 是周期为 _____ 的周期函数.

$$\begin{aligned} \text{【解】} f\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + x\right)\right] &= \frac{1}{2} + \sqrt{f\left(\frac{1}{2} + x\right) - f^2\left(\frac{1}{2} + x\right)} \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - f(x) + f^2(x)} \\ &= \frac{1}{2} + \left[f(x) - \frac{1}{2}\right] = f(x), \quad (\text{由题设 } f(x) \geq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

即 $f(1+x) = f(x)$, 故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是以 T 为周期的连续函数,

故 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$, 可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x) = \frac{\lg x}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上为

(A) 有上界无下界.

(B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$.

(D) 有界且 $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}$.

【 】

【解】 $f(x) = \frac{\lg x}{x}, f'(x) = \frac{x \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{1}{x^2} (\lg e - \lg x)$.

因为 $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, 所以 $f'(x) > 0$. 故 $f(x)$ “ $\uparrow$ ”.

因此, $\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \lg 1$, 即 $2\lg \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 0$, 可知, 该选(C).

4. 单调性

设函数 $y = f(x)$ 在区间 X 上有定义, 如果对 $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2$, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (\text{或 } f(x_1) > f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导, 则其单调性的判别用定义; 若 $f(x)$ 在区间 X 上可导, 则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有定义, $x_1 > 0, x_2 > 0$. 求证:

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降, 则 $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$;

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升, 则 $f(x_1 + x_2) \geq f(x_1) + f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1 > 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 < x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2} \leq \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow x_1 f(x_2) \leq x_2 f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1 + x_2)}{x_1 + x_2} \leq \frac{f(x_2)}{x_2} \Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_1 f(x_2) + x_2 f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2 f(x_1 + x_2) \leq x_2 f(x_1) + x_2 f(x_2) \Rightarrow f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 令

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}, & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

证明: $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 在 $(0, +\infty)$ 内 $F'(x) > 0$ 即可.