文登教育

Wendeng Education

2012

文登教育集团课堂用书

（经济类）

考研数学复习指南

修订版

陈文灯 黄先开 主编

- 全新改版，内容把控全面提升。
- 新增思维定势，迅速提高应试技巧。
- “化繁为简，变难为易”，方法独到而有效。
- 买指南，送网校。99课时，价值500元的基础班视频全额赠送！

详见书内彩页说明！

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

文登教育集团课堂用书

2012

（经济类）

考研数学复习指南

修订版

陈文灯 主 编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习指南.经济类 / 陈文灯,黄先开主编.—北京:北京理工大学出版社,2011.1
(文登教育)
ISBN 978-7-5640-4150-2

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… ②黄… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 261286 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 /(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京时代华都印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 35
字　　数 / 777千字
版　　次 / 2011年1月第1版　2011年1月第1次印刷　　责任校对 / 王　丹
定　　价 / 53.80元　　责任印制 / 母长新

陈文灯老师关于 2012 版考研数学复习指南系列图书出版情况的重要声明

亲爱的读者朋友们，为了更严格地控制图书质量，以便更好地为广大考生服务，由本人编写的《考研数学复习指南系列图书 2012 版》将由**北京理工大学出版社**出版，并于 **2011 年初**开始发行。

近期，**世界图书出版公司**出版并发行了同名图书，并声称此书是由本人署名并亲自编写的，这让我们特别吃惊，本人特在此敬告广大考生：**世界图书出版公司**出版的《考研数学复习指南系列图书 2012 版》未经本人授权，更不是本人亲自编写的，完全属于侵权产品，我对该书的内容不负任何责任，请广大考生出于维护知识产权的目的，更是为了珍惜自己宝贵的复习时间，切勿购买此书。对于这种赤裸裸的侵权行为，我们也一定拿起法律武器来维护自己的合法权益，相信很快就会给广大读者一个交代！

目前，把这本书写好，让书的质量更上一层楼才是我们的当务之急。趁这次更换出版社之机，我们不但对本书做了问世以来最大的修订（见本书前言），而且在营销方面，我们也从考生需求角度出发，力争给考生提供最好的帮助。

（1）与文登网校相配合，结合文登网校自身优势，以书为载体，网上网下全面互动。每购买一本《考研数学复习指南》都会**全额赠送文登网校全套基础过关班视频**，该视频价值 **500 元**，长度达 **99 个课时**，从基础辅导到习题训练，确保基础过关。促销力度在考研图书中是空前的。

（2）我们将与考研加油站（www. kaoyan. com）结成战略合作伙伴，从学生的实际需求出发，定期举办送书，讲座等活动。并在数学论坛开辟一个板块，由我或者文登学校的数学老师专门为学生答疑，在考研路上，为您扫除一切障碍！

最后，希望广大考生在 2012 年度研究生入学考试中能够取得好成绩，更希望我们的图书能给您的复习带来帮助！

陈文灯

2010 年 12 月

前言

本书从 1995 年出版以来，经历了十五六年，帮助许许多多考研学子圆了他们的梦想，帮助得益于本书的硕士和博士生们应用“数学的思维”方法在学习研究中而取得了优异成绩。这期间，有不少数学同仁为使本书更完臻至善提出了宝贵的意见，借此机会向他们表示感谢。

当然，最近几年也有人在某种利益的驱使下，对本书进行诋毁、攻击，有人说：

“书太难了，对考研没有帮助”。“难不难”不是凭谁的一句话，而是由“考试大纲”来确定，由最近几年的试题来印证的。要知道考研数学，是“水平＋选拔”的考试，绝非只是水平考试。

“书中的方法太玄妙，国家考试中心命题组组长不承认。”这是谎言，为慎重起见，编者还曾电话询问过，回答：绝无此事。

“书没有与时俱进，每一版没有什么变化。”应试书应该根据考试大纲的内容的变化而变化。实事求是地讲，大纲是没有什么根本性的变化，因此我的书也就不作大的修改，那种改换一个例题的做法并不是难事，但对广大读者来说又能起到多大的作用呢，我们不想用“朝三暮四”的耍猴方法糊弄读者。

趁这次更换出版社之机，我们对本书做了问世以来最大的修订，修订的地方包括以下几个方面：

(1)“拨乱反正”，把被人随意添加或改错的地方更正过来。例如，积分中值定理、无穷级数中的积分判别法等。

(2)体例上做了调整。每章中安排了一节思维定势及综合题解析。思维定势对应试考试很有用，根据题型特点，能很快找到解题突破口。综合题解析，是帮助同学们将各知识点“珠联璧合”，以提高考生分析问题和解决问题的能力。

(3)“变繁为简，变难为易”。将常考、考生感到棘手的内容进行归纳总结，得到所谓的“玄妙”，但又特别有效的解题方法和技巧。例如，连续函数在闭区间上的性质、微分中值定理、定积分等式与不等式的证明、函数方程与不等式的证明，尤其是文字不等式的证明。特别值得一提的是那些辅助函数的作法，经过我们的分析原题将变得非常“初等”，非常简单，只要仿效，即可获得成功。

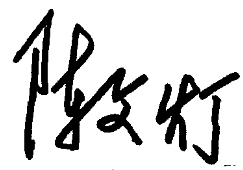
最后回答考生们的一个问题：“如何有效地利用您的书提高复习效果，考好数学，书要看几遍？”

看我们的书是要有铺垫的。先把大学里学过的四本书看一看，对基础部分要多下点功夫，做到概念、定理能用自己的语言叙述，习题应全部都做。高数的基础：极限、导数与微分、不定积

分;线性代数的基础:矩阵的初等变换,含有参数的线性方程组解的讨论,方阵的特征值与特征向量;概率论与数理统计的基础:事件的概率,其中古典概型,条件概率与乘法公式,全概率公式与贝叶斯公式,贝努里概型,随机变量及其分布(特别是二维连续型),随机变量的数字特征(期望 E(X)、方差 D(X)、协方差 Cov(X,Y),相关系数 ρ_{xy})。如果是自学,先仔仔细细地看一遍,然后再看二三遍;参加辅导班的同学,最好应该与上课"同步"进行,课后再看一遍即可。书后的习题不要求全做,我们只给出答案或证明提示。给出习题的全部解答过程并不好,这个是我们不提倡的。

送给考研朋友一首诗:

数学基础树的根,
技巧演练靠题型。
勤学苦练强磨砺,
功到高分自然成。



2010.11.22

目 录

第二篇　线性代数

第三篇　概率论与数理统计

第一篇 微积分

第一章 函数、极限和连续

第1节 重要概念、定理和公式的剖析

一、函数的基本性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称区间 X 上有定义，如果对于 $\forall x \in X$ 恒有

$$f(x) = f(-x) \quad (\text{或 } f(x) = -f(-x)),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数(或 $f(x)$ 为奇函数).

偶函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，奇函数 $f(x)$ 的图像关于坐标原点对称.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇函数的代数和仍为奇函数；偶函数的代数和仍为偶函数.

(2) 偶数个奇(或偶)函数之积为偶函数；奇数个奇函数的积为奇函数.

(3) 一奇一偶的乘积为奇函数.

常见的偶函数：$|x|, \cos x, x^{2n}$(n 为正整数)$, e^{|x|}, e^{x^2}, \cdots$.

常见的奇函数：$\sin x, \tan x, \dfrac{1}{x}, x^{2n+1}, \arcsin x, \arctan x, \cdots$.

提示 判别给定函数的奇偶性，主要是根据奇偶性的定义，有时也用其运算性质.

注 (1) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(2) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数.

【例 1.1】 判别下列函数的奇偶性.

(1) $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$；　　(2) $y = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为奇函数；

(3) $y = F(x)\left(\dfrac{1}{a^x - 1} + \dfrac{1}{2}\right)$，其中 $a > 0, a \neq 1, F(x)$ 为奇函数.

【解】 (1) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$，有 $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1})$，

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

故 $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

(2) 令 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{令 t=-u} \int_0^{x}f(-u)(-\mathrm{d}u)$$

$$=-\int_0^{x}f(-t)\mathrm{d}t=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t \quad (因为\ f(x)\ 为奇函数)$$

$$=F(x),$$

故 $y=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数.

(3) 令 $g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$,则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2},$$

$$g(x)+g(-x)=\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}-\frac{a^x}{a^x-1}+\frac{1}{2}=0,$$

所以 $g(x)$ 为奇函数,又 $F(x)$ 为奇函数.

故 $y=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$为偶函数.

2. 周期性

设函数 $f(x)$ 在区间 X 上有定义,若存在一个与 x 无关的正数 T,使对于任一 $x\in X$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数,把满足上式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质:

(1) 若 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(ax+b)$ 的周期为$\dfrac{T}{|a|}$.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 均是以 T 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数.

(3) 若 $f(x),g(x)$ 分别是以 $T_1,T_2,T_1\neq T_2$ 为周期的函数,则 $f(x)\pm g(x)$ 是以 T_1,T_2 的最小公倍数为周期的函数.

常见函数的周期:$\sin x,\cos x$,其周期 $T=2\pi$;

$\tan x,\cot x,|\sin x|,|\cos x|$,其周期 $T=\pi$.

提示 判别给定函数 $f(x)$ 是否为周期函数,主要是根据周期的定义,有时也用其运算性质.

【例 1.2】 设对一切实数 x,有 $f\left(\dfrac{1}{2}+x\right)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$,则 $f(x)$ 是周期为________的周期函数.

【解】 $$f\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+x\right)\right]=\frac{1}{2}+\sqrt{f\left(\frac{1}{2}+x\right)-f^2\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$

$$=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(x)+f^2(x)}$$

$$=\frac{1}{2}+\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=f(x),\left(由题设\ f(x)\geqslant\frac{1}{2}\right)$$

即 $f(1+x)=f(x)$,故可知 $f(x)$ 的周期为 1.

【例 1.3】 设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上是以 T 为周期的连续函数,

(1) 如果 $f(x)$ 是奇函数，则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 T 为周期的周期函数；

(2) 如果 $\int_a^T f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，则函数 $G(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表示成线性函数与以 T 为周期的周期函数之和.

【证】(1) 由周期函数及奇函数的积分性质得

$$F(x+T)=\int_0^{x+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

所以，$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数.

(2) 对于任意的常数 k，有

$$G(x)=\int_a^x[f(t)-k+k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+k(x-a).$$

因为 $k(x-a)$ 是线性函数，所以，只需证明当 k 取某一值时，$g(x)=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t$ 以 T 为周期即可.

由周期函数的定积分性质得

$$g(x+T)=\int_a^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t=\int_a^x[f(t)-k]\mathrm{d}t+\int_x^{x+T}[f(t)-k]\mathrm{d}t$$
$$=g(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT,$$

取 $k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，有 $g(x+T)=g(x)$，即 $g(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

3. 有界性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果 $\exists M>0$，使得对于一切 $x\in X$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上有界；若不存在这样的 M，则称 $f(x)$ 在区间 X 上无界.

注 函数 $f(x)$ 是否有界是相对于某个区间而言的.

六个常见的有界函数	$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$,	$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$,	$x\in(-\infty,+\infty)$
	$\lvert\arcsin x\rvert\leqslant\frac{\pi}{2}$,	$\lvert\arccos x\rvert\leqslant\pi$,	$x\in[-1,1]$
	$\lvert\arctan x\rvert<\frac{\pi}{2}$,	$\lvert\operatorname{arccot}x\rvert<\pi$,	$x\in(-\infty,+\infty)$

提示 判别函数的界，一般先要对函数取绝对值，然后用不等式放缩法求解；或借助导数利用求最大(小)值法处理.

【例 1.4】 函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在定义域内为

(A) 有上界无下界.　　(B) 有下界无上界.

(C) 有界，且 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$.　　(D) 有界且 $-2\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant 2$.　　【　】

【解】 $|f(x)|=\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{|x|}{2|x|}=\frac{1}{2}$ （因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$），

故 $-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{2}$， 可知(C)入选.

【例 1.5】函数 $f(x)=\frac{\lg x}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上为

(A) 有上界无下界. (B) 有下界无上界.

(C) 有界且 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$. (D) 有界且 $\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant -\frac{1}{4}$. 【 】

【解】$f(x)=\frac{\lg x}{x}, f'(x)=\frac{x\frac{1}{x\ln 10}-\lg x}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\lg e-\lg x)$.

因为 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$， 所以 $f'(x)>0$. 故 $f(x)$“↑”.

因此，$\frac{\lg\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\leqslant f(x)\leqslant\frac{\lg 1}{1}$， 即 $2\lg\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 0$，可知，该选(C).

4. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 X 上有定义，如果对 $\forall x_1,x_2\in X, x_1<x_2$，恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))，$$

则称 $f(x)$ 在区间 X 上是单调增加(或单调减少)的.

提示 若 $f(x)$ 在区间 X 上没有告知为可导，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 X 上可导，则利用导数判别更简便.

【例 1.6】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义，$x_1>0, x_2>0$. 求证：

(1) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调下降，则 $f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2)$；

(2) 若 $\frac{f(x)}{x}$ 单调上升，则 $f(x_1+x_2)\geqslant f(x_1)+f(x_2)$.

【证】(1) 设 $x_1>0, x_2>0$，且 $x_1<x_2$. 于是

$$\frac{f(x_2)}{x_2}\leqslant\frac{f(x_1)}{x_1}\quad\Rightarrow x_1f(x_2)\leqslant x_2f(x_1),$$

$$\frac{f(x_1+x_2)}{x_1+x_2}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}\quad\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_1f(x_2)+x_2f(x_2)$$

$$\Rightarrow x_2f(x_1+x_2)\leqslant x_2f(x_1)+x_2f(x_2)\Rightarrow f(x_1+x_2)\leqslant f(x_1)+f(x_2).$$

(2) 的证明略.

【例 1.7】设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)>0$，令

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}, & x>0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：$F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加.

【分析】只需证明 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 内 $F'(x)>0$ 即可.