21世纪高等师范院校数学教育教学系列教材

总主编 刘 影 程晓亮

本科数学教育 **必修课教材**

初等数学研究

CHUDENG SHUXUE YANJIU

主编 程晓亮 刘 影

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

21 世纪高等师范院校

数学教育教学系列教材 / 总主编　刘影　程晓亮

初等数学研究

主　编　程晓亮　刘　影

副主编　张运林　周仕荣　刘兴华

　　　　范兴亚　喇雪燕

编著者　刘　影　刘兴华　彭艳贵

　　　　周仕荣　张运林　喇雪燕

　　　　叶根福　陈建荣　王　乐

　　　　柳成行　由　勇　杨灿荣

　　　　马　云　程晓亮　范兴亚

　　　　贺　侠　李春鹏　赵　赫

　　　　张　蕲　王雅丽　刘　岩

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究/程晓亮,刘影主编. —北京:北京大学出版社,2011.1
(21世纪高等师范院校数学教育教学系列教材)
ISBN 978-7-301-18324-3

Ⅰ.①初… Ⅱ.①程… ②刘… Ⅲ.①初等数学—教学研究—师范大学—教材 ②初等数学—教学研究—中小学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第255021号

书 名:初等数学研究
著作责任者:程晓亮 刘 影 主编
责 任 编 辑:曾琬婷
封 面 设 计:张 虹
标 准 书 号:ISBN 978-7-301-18324-3/O·0831
出 版 发 行:北京大学出版社
地 址:北京市海淀区成府路205号 100871
网 址:http://www.pup.cn 电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电 话:邮购部62752015 发行部62750672 理科编辑部62765014 出版部62754962
印 刷 者:北京鑫海金澳胶印有限公司
经 销 者:新华书店
787mm×980mm 16开本 19.5印张 408千字
2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷
印 数:0001—3000册
定 价:35.00元

《21世纪高等师范院校数学教育教学系列教材》编委会

前言

初等数学研究是高等师范院校数学教育专业必选课程.北京、吉林、安徽、福建、陕西、黑龙江、辽宁、云南、河北、河南、四川、贵州、山西、山东、重庆、内蒙古、广西、青海等二十余个省、市、自治区的二十余所高等师范院校初等数学教学与研究的教师、中学数学一线教师参与了编写本教材的全过程.我们组成提议、编写、审阅委员会.本书内容全面结合中学数学课程改革的内容,借鉴最新初等数学研究方面的理论与实践成果,力求适应新世纪高等师范院校数学教育教学改革实践要求.本书分绪论和正文十章,绪论主要阐述代数学和几何学的发展史,正文的内容包括:数的理论、解析式与不等式、方程、函数、数列、平面几何、立体几何、统计与概率、平面解析几何和球面几何初步等内容.本书在阐述理论内容的同时,结合中学数学内容,特别是近几年高考、各种竞赛的试题等,给出具体的例子,并做详细解答.本书的基本内容包括以下几个方面:

1. 代数学的发展历史 ,几何学的发展历史.
2. 数系的五次扩充,自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集的相关理论.
3. 解析式,绝对值不等式的证明方法,条件不等式的求解,经典的不等式及其应用.
4. 方程与方程组的基本理论,中学常用的解方程(组)的方法,不定方程的理论,整除与同余.
5. 函数概念的三种定义,函数的表示方法,函数的超越性,基本初等函数与初等函数,函数的性质(单调性、有界性、奇偶性、周期性等),函数图像的画法,函数概念的教学.
6. 等差、等比数列的相关问题,求一般数列的通项公式、前 n 项和的方法,数列的差分与高阶等差数列,齐次与非齐次线性递归数列的理论及其应用.
7. 随机事件与样本空间,概率及其计算,统计初步.
8. 平面几何中的著名定理与不等式,平面几何问题的证明.
9. 直线与平面的平行、垂直关系的对偶性,空间向量的数量积和向量积的应用,求解立体几何问题的方法.
10. 曲线、方程与函数,曲线的生成与类型的判别,解析几何问题求解.
11. 球面几何的有关概念,球面三角形.

全书的编写框架结构由吉林师范大学数学学院刘影、程晓亮确定,编写、审稿分工如下:绪论由刘兴华、刘影编写并审阅;第一章由彭艳贵、刘影编写并审阅;第二、三章由周仕荣编写,刘影、杨灿荣审阅;第四章由喇雪燕、程晓亮编写并审阅;第五章由叶根福、程晓亮编写并

审阅；第六章由陈建荣、程晓亮编写并审阅；第七章由程晓亮、刘影编写并审阅；第八章由王乐、张莉、程晓亮编写并审阅；第九章由柳成行编写，杨灿荣审阅；第十章由由勇、赵赫、杨灿荣编写，程晓亮审阅. 参加编写修改、图文处理工作的还有张运林、范兴亚、马云、戴莹、李春鹏、贺侠、赵红霞、王雅丽、刘岩. 全书最后由刘影、程晓亮统稿并经讨论、修改后定稿.

在本书的编写过程中，全国十余所师范院校初等数学教学与研究专家，二十多所中学一线教师看了我们的初稿，提出了许多宝贵的建议，我们在此表示诚挚的谢意. 主编刘影、程晓亮得到了东北师范大学高夯教授的热情鼓励，以及吉林师范大学教务处的支持. 本书数学史与中学数学教学相结合内容的素材是黑龙江省哈尔滨市阿城区第七中学对新课程改革的实践探索成果，是集体智慧的结晶，感谢田芳、才雪亮、刘燕、张晓红、王冬梅、陶颖等同志的大力支持和帮助. 各编写者也得到相应省市、学校的支持和资助，全体编者向给予支持和资助的单位和个人表示衷心的感谢. 本书的出版得到北京大学出版社的大力支持，在此我们表示诚挚的谢意.

本书既可作为高等师范院校数学教育专业本、专科初等数学研究的教材，也可作为中学数学教师继续教育以及其他各级、各类数学教育教学工作者的教学科研参考书.

本书内容虽然经过各编委多次讨论、审阅、修改，但限于编者的水平，不妥之处仍然会存在，诚恳希望广大同行和读者给予批评指正.

刘　影　程晓亮

2010 年 8 月

目 录

绪 论

正如德国数学家希尔伯特(D. Hilbert)所言:"数学科学是一个不可分割的整体,它的生命正是在于各个部分之间的联系."数学根据自身发展过程中不同时期表现出的不同特点,分为初等数学和高等数学;根据数学问题研究的内容特点分为代数学、几何学、概率与统计学等等.作为教育任务的数学内容,则从知识结构和逻辑关系进行编排整理,分为不同门类,以便于让学生理解和掌握具体的数学概念与数学问题.从数学史发展的角度重新认识所教授的数学内容,从数学文化新视角开展教学活动,以崭新的数学发展历史来解释数学形成过程,达到数学教学与数学真实的和谐统一,对学生未来的发展是大有益处的.

第一节 代数学发展简史

一、代数学概述

公元 8 世纪,阿拉伯第一位伟大的数学家阿尔·花拉子米(al-Khowārizmi)的著名数学著作《还原和对消计算》(或翻译成《论复位及调整》),是代数学成为数学独立分支的重要标志.此书名由阿拉伯文译为拉丁文"Ludus algebrae et almucgrabalaeque",简称为"algebra". 1859 年,我国清代数学家李善兰首次把"algebra"译成"代数学".

代数学从广义而言,是研究符号形式的运算的科学.其发展经历了三个阶段:文辞阶段、缩写阶段、符号阶段.文辞阶段的代数特点就是完全不用符号.缩写阶段的代数,首先在埃及发展起来的,用某些常用的字逐渐缩写来表示运算,缩写已经成为一种符号.公元 3 世纪,希腊数学家丢番图(Diophantus)在著作《算术》中用的全部符号都是缩写.丢番图将符号引入到数学中,研究的对象就变为一个完全抽象物,成为某一指定运算的运算符号.公元 7 世纪,印度数学家和天文学家婆罗摩笈多(Brahmagupta)创造了一套用颜色表示未知数的符号,即用相应颜色名称的字头作为

未知数的符号.我国古代也曾用不同字表示常数(已知数)或未知数,在南宋数学家李冶的著作中,用"元"表示未知数,"太"表示已知数.代数学史的转折点是16世纪法国人弗朗西斯科·维叶德(Franciscus Vieta)用A或其他大写字母表示未知量,使代数学进入了符号化时代.直到十六七世纪,法国数学家韦达(F. Vieta)在前人经验的基础上,有意识、系统地用字母表示数.在他的作品《分析入门》中,把代数学看做一门完全符号化的科学,引入了抽象的符号,用元音字母表示未知数,用辅音字母表示已知数.他被西方人称为"代数之父".1637年法国数学家笛卡儿(Descartes)用小写字母$a,b,c,\cdots$表示已知数,用$x,y,z,\cdots$表示未知数,初步建立了代数学符号系统,发展成为今天的习惯用法.初等代数是算术的推广,即用字母表示数,进行数、字母与表达式之间的运算.字母将代数学从字句的制约下解放出来,使得方程的研究获得了新的生命.方程的解法使人们获得了打开未知世界的金钥匙.由此,方程的研究成为代数学研究的中心问题之一.

在方程发展与完善的历史长河中,随着字母表示数参与的运算体系的形成,直到十六七世纪,代数方程体系在韦达奠定的基础上,由笛卡儿基本完成.伴随数域的扩张,方程理论跨入了现代化.代数的发展由古代的算术、代数、几何的相互交融的初等代数时期,逐渐发展到了高等代数和抽象代数的广阔领域.

二、代数学的发展

1. 代数学的发展基础——算术

算术是数学中最古老的一个分支,它的一些结论是在长达数千年的时间里,缓慢而逐渐地建立起来的.算术有两种含义,一种是从中国传下来的,相当于一般所说的"数学",如《九章算术》中的"算术".另一种是从欧洲数学翻译过来的,源自希腊语,有"计算技术"之意.现在一般所说的"算术",往往指自然数的四则运算.如果是在高等数学中,则有"数论"的含义.作为现代小学课程内容的算术,主要讲的是自然数、正分数以及它们的四则运算,并通过由计数和度量而引出的一些最简单的应用题加以巩固.

《九章算术》是世界上最早系统叙述了分数运算的著作,其中"盈不足"的算法更是一项令人惊奇的创造;"方程"章还在世界数学史上首次阐述了负数及其加减运算法则.在代数方面,《九章算术》在世界数学史上最早提出负数概念及正、负数加减运算法则.现在中学讲授的线性方程组的解法和《九章算术》介绍的方法大体相同.《九章算术》是我国几代人共同劳动的结晶,它的出现标志着我国古代数学体系的形成.后世的数学家,大多数都是从《九章算术》开始学习和研究数学知识的.

19世纪中叶,德国数学家格拉斯曼(Grassmann)第一次成功地挑选出一个基本公理体系,来定义加法与乘法运算,而算术的其他命题,可以作为逻辑的结果,从这一体系中被推导出来.后来,意大利数学家皮亚诺(G. Peano)进一步完善了格拉斯曼的体系,形成了皮亚诺公理.

算术的基本概念和逻辑推论法则，以人类的实践活动为基础，深刻地反映了世界的客观规律性. 尽管它是高度抽象的，但由于它概括的原始材料是如此广泛，因此我们几乎离不开它. 同时，它又构成了数学其他分支的最坚实的基础.

2. 代数学成为独立分支——初等代数

作为中学数学课程主要内容的初等代数，其中心内容是方程理论. 代数方程理论在初等代数中是由一元一次方程向两个方面扩展的：其一是增加未知数的个数，考查由几个未知数的若干个方程所构成的二元或三元方程组（主要是一次方程组）；其二是增高未知数的次数，考查一元二次方程或准二次方程（即双二次方程，其一般形式为 $ax^4+bx^2+c=0(a,b\neq0)$）. 初等代数的主要内容在 16 世纪便已基本上发展完备.

公元前 19 世纪—前 17 世纪，古巴比伦人解决了一次和二次方程问题. 欧几里得（Euclid）的《几何原本》（公元前 4 世纪）中有用几何形式解二次方程的方法. 我国的《九章算术》（公元 1 世纪）中有三次方程和一次联立方程组的解法，并运用了负数. 3 世纪丢番图用有理数求一次、二次不定方程的解. 13 世纪我国出现的天元术（见李冶的《测圆海镜》）是有关一元高次方程的数值解法. 16 世纪意大利数学家塔尔塔利亚（N. Tartaglia）、费拉里（L. Ferrari）先后成功地得到了三次和四次方程的求根公式. 16 世纪法国数学家韦达开始有意识地系统使用数学符号，他不仅用字母表示未知数及其方幂，而且还用字母表示方程的系数和常数项. 韦达认为，代数与算术是不同的，算术仅研究关于具体数的计算方法，而代数则研究关于事物的类或形式的运算方法. 字母表示数的思想方法是代数学发展史上的一个重大转折，从此，代数从算术中很快分离出来，成为一门独立的学科.

3. 代数学的深化阶段——高等代数

随着生产力的进一步发展，许多数量关系问题，都被归结为代数方程的求解问题. 人们开始把注意力集中到关于方程和方程组求解的一般理论研究上. 对二次以上方程求解问题的研究发展成为多项式理论；对一次方程组（即线性方程组）求解问题的研究发展成为线性代数理论.

16 世纪初，人们开始研究五次以至更高次代数方程的根式解法. 在随后的三个世纪中，许多数学家为此付出了大量的精力，最后由挪威数学家阿贝尔（Abel）完成了定理“次数大于四的一般代数方程不可能有根式解”的证明. 在 1830 年，法国数学家伽罗瓦（E. Galois）解决了方程有根式解的充分必要条件这个意义更为广泛的问题，创立了伽罗瓦理论. 代数方程的另一个极其重要的成果是代数学基本定理，即：一元 n 次复系数多项式方程在复数域内有且只有 n 个根（重根按重数计算）. 在瑞士数学家欧拉（Euler）、法国数学家达朗贝尔（d'Alembert）研究的基础上，由德国数学家高斯（Gauss）在 1799 年圆满地完成了它的证明.

17 世纪日本数学家关孝和（Seki Kowa）提出了行列式的概念，他在 1683 年写了一部叫做《解伏题之法》的著作，意思是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已

经有了清楚的叙述.而在欧洲,第一个提出行列式概念的是德国的数学家、微积分学奠基人之一——莱布尼茨(Leibnitz).17世纪下半叶,从研究线性方程组的解法出发,在莱布尼茨、英国数学家凯莱(Cayley)等人的努力下,建立了以行列式、矩阵、线性变换等为主要内容的线性代数.这标志着高等代数理论体系的建立.

1750年瑞士数学家克莱姆(Cramer)在他的《线性代数分析导言》中发表了求解线性系统方程的重要基本公式(即人们熟悉的克莱姆法则).

1764年,法国数学家贝祖(Bezout)把确定行列式每一项的符号的方法系统化.对给定含n个未知量的n个齐次线性方程,贝祖证明了系数行列式等于零是这方程组有非零解的条件.法国数学家范德蒙(Vandermonde)是第一个对行列式理论进行系统阐述(即把行列式理论与线性方程组的求解相分离)的人,并且给出了一条法则,用二阶子式和它们的余子式来展开行列式.针对行列式本身进行研究这一点而言,他是这门理论的奠基人.1772年,法国数学家拉普拉斯(Laplace)在《对积分和世界体系的探讨》中证明了范德蒙的一些规则,并推广了行列式展开的方法:在n阶行列式中,任意取定r行(列)($1\leqslant r\leqslant n$),由这r行或列组成的所有r阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于其行列式.这个方法现在仍然以他的名字命名,称为拉普拉斯定理.1841年,德国数学家雅可比(Jacobi)总结并提出了行列式的最系统的理论.另一个研究行列式的是法国最伟大的数学家柯西(Cauchy),他大大发展了行列式的理论.在行列式的记号方面,他把元素排成方阵并首次采用了双重足标的新记法;与此同时他发现两行列式相乘的公式,还改进并证明了拉普拉斯的展开定理.

1848年,英格兰的西尔维斯特(J. J. Sylvester)首先提出了"矩阵"这个词,它来源于拉丁语,代表一排数.在1855年矩阵代数得到了凯莱的进一步发展.凯莱研究了线性变换的组成并提出了矩阵乘法的定义,使得复合变换$\boldsymbol{ST}$的系数矩阵变为矩阵$\boldsymbol{S}$和矩阵$\boldsymbol{T}$的乘积.他还进一步研究了那些包括矩阵的逆在内的代数问题.1858年,凯莱在他的矩阵理论文集中提出著名的Cayley-Hamilton理论:在矩阵$\boldsymbol{A}$的特征方程中,以$\boldsymbol{A}$代替变量,则得到一个零矩阵.利用单一的字母$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$等来表示矩阵对矩阵代数发展是至关重要的.在发展的早期,公式$\det(\boldsymbol{AB})=\det(\boldsymbol{A})\det(\boldsymbol{B})$为矩阵代数和行列式之间提供了一种联系.柯西首先给出了特征方程的术语,并证明了阶数超过三的矩阵有特征值及任意阶实对称矩阵都有实特征值;给出了相似矩阵的概念,并证明了相似矩阵有相同的特征值;研究了代换理论.

矩阵的发展是与线性变换密切相连的,到19世纪它还仅占线性变换理论形成中有限的空间.第二次世界大战后随着现代数字计算机的发展,矩阵又有了新的含义,特别是在矩阵的数值分析等方面.由于计算机的飞速发展和广泛应用,许多实际问题可以通过离散化的数值计算得到定量的解决.于是作为处理离散问题的线性代数,成为从事科学研究和工程设计的科技人员必备的数学基础.

4. 代数学的抽象化阶段——抽象代数

抽象代数又称近世代数,它产生于19世纪.抽象代数是研究各种抽象的公理化代数系

统的数学学科.由于代数可处理实数与复数以外的物集,例如向量、矩阵、变换等的集合,这些物集分别是依它们各有的演算定律而定,而数学家将个别的演算经由抽象手法把共有的内容升华出来,并因此而达到更高层次,这就诞生了抽象代数.抽象代数包含群论、环论、伽罗瓦理论、格论、线性代数等许多分支,并与数学其他分支相结合产生了代数几何、代数数论、代数拓扑、拓扑群等新的数学学科.抽象代数已经成了当代大部分数学的通用语言.

被誉为天才数学家的伽罗瓦是近世代数的创始人之一.他深入研究了一个方程能用根式求解所必须满足的本质条件,他提出的"伽罗瓦域"、"伽罗瓦群"和"伽罗瓦理论"都是近世代数所研究的最重要的课题.伽罗瓦群理论被公认为19世纪最杰出的数学成就之一,它给方程可解性问题提供了全面而透彻的解答,解决了困扰数学家们长达数百年之久的问题.伽罗瓦群论还给出了判断几何图形能否用直尺和圆规作图的一般方法,圆满解决了三等分任意角或倍立方体的问题都是不可解的.最重要的是,群论开辟了全新的研究领域,以结构研究代替计算,把从偏重计算研究的思维方式转变为用结构观念研究的思维方式,并把数学运算归类,使群论迅速发展成为一门崭新的数学分支,对近世代数的形成和发展产生了巨大影响.同时这种理论对于物理学、化学的发展,甚至对于20世纪结构主义哲学的产生和发展都产生了巨大的影响.

1843年,爱尔兰数学家哈密顿(W. R. Hamilton)发明了一种乘法交换律不成立的代数——四元数代数.第二年,格拉斯曼推演出更具有一般性的几类代数.他们的研究打开了抽象代数的大门.实际上,减弱或删去普通代数的某些假定,或将某些假定代之以别的假定(与其余假定是兼容的),就能研究出许多种代数体系.

1870年,德国数家克罗内克(Kronecker)给出了有限阿贝尔群的抽象定义;德国数学家戴德金(R. Dedekind)开始使用"体"的说法,并研究了代数体;1893年,德国数学家韦伯(Weber)定义了抽象的体;1910年,德国数学家施坦尼茨(Steinitz)展开了体的一般抽象理论;戴德金和克罗内克创立了环论;1910年,施坦尼茨总结了包括群、代数、域等在内的代数体系的研究,开创了抽象代数学.

有一位杰出女数学家被公认为抽象代数奠基人之一,被誉为"代数女皇",她就是德国数学家诺特(E. Noether).诺特的工作在代数拓扑学、代数数论、代数几何的发展中有重要影响.1907—1919年,她主要研究代数不变式及微分不变式.她给出了三元四次型不变式的完全组,还解决了有理函数域的有限有理基的存在问题,对有限群的不变式具有有限基给出了一个构造性证明.她不用消去法而用直接微分法生成微分不变式,讨论连续群(李群)下不变式问题,给出了诺特定理,把对称性、不变性和物理的守恒律联系在一起.1916年后,她开始由古典代数学向抽象代数学过渡.1920年,她已引入"左模"、"右模"的概念.1921年她完成的《整环的理想理论》是交换代数发展的里程碑,其中建立了交换诺特环理论,证明了准素分解定理.1926年,她发表《代数数域及代数函数域的理想理论的抽象构造》,给戴德金环一个公理刻画,指出素理想因子唯一分解定理的充分必要条件.诺特的这套理论也就是现代数学

中的“环”和“理想”的系统理论. 一般认为抽象代数形成的时间就是1926年,从此代数学研究对象由研究代数方程根的计算与分布,进入到研究数字、文字和更一般元素的代数运算规律和各种代数结构,完成了古典代数到抽象代数的本质的转变. 诺特的思想通过她的学生、荷兰数学家范·德·瓦尔登(Van der Waerden)的名著《近世代数学》得到广泛的传播,她的主要论文收在《诺特全集》(1982)中.

1930年,美国数学家伯克霍夫(G. Birkhoff)建立格论,它源于1847年的布尔代数. 第二次世界大战后,出现了各种代数系统的理论和布尔巴基学派. 1955年,法国数学家亨利·嘉当(Henri Cartan)、法国数学家格洛辛狄克(A. Grothendieck)和美国数学家艾伦伯格(S. Eilenberg)建立了同调代数理论.

到现在为止,数学家们已经研究过二百多种代数结构,其中最主要的若当代数和李代数是不服从结合律的例子. 这些工作的绝大部分属于20世纪,它们使一般化和抽象化的思想在现代数学中得到了充分的反映.

第二节　几何学发展简史

几何是人类认知世界、理解世界的有效工具. 正如荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal)所言:“在认知现实世界和联系现实,使现实世界数学化方面,几何的作用是无法替代的.”古典几何学所代表的公理化方法、数形结合思想已经成为现代数学教育最基本的思想方法.

一、几何学概述

几何,英文为Geometry,是由希腊文演变而来的,其原意是土地测量. 由于尼罗河周期性泛滥,为了重新划分地界,需要有土地测量技术,进而产生了几何学. 明代徐光启和利玛窦翻译欧几里得的《几何原本》时,将“Geometry”一词译为“几何学”. 几何学是研究形的科学,以视觉思维为主导,培养人的观察能力和空间想象能力. 几何学中最先发展起来的是欧几里得几何(也称欧氏几何). 到文艺复兴时期,几何学上第一个重要成果是法国数学家笛卡儿和费马(Fermat)的解析几何. 他们把代数方法应用于几何学,实现了“数”和“形”的相互结合与沟通. 随着透视画的出现,又诞生了一个全新的几何学——射影几何. 到19世纪上半叶,非欧几何诞生了. 人们的思想得到了很大的解放,各种非欧几何、微分几何、拓扑学都相继产生,几何学进入了一个空前繁荣的时期.

二、几何学的发展

纵观几何学的发展,从欧氏几何到非欧几何经历了数千年的探索与研究. 几何学的发展大体上可分为如下五个时期:

1. 几何学的萌芽时期

这个时期是指几何学成为一门独立的数学分支之前的整个历史时期，其主要特点是，人们从生活、生产实践的丰富经验中，总结出几何图形及它们关系的一些结论，逐步形成了图形、几何命题及证明的概念. 这个时期主要是在埃及、巴比伦、中国和希腊等国家初创，而在希腊得到发展.

几何学最早有记录的开端可以追溯到古埃及、古印度和古巴比伦，其年代大约始于公元前3000年. 早期的几何学是关于长度、角度、面积和体积的经验原理，被用于满足在测绘、建筑、天文和各种工艺制作中的实际需要. 在它们中间，有令人惊讶的复杂的原理，以至于现代的数学家很难不用微积分来推导它们. 例如，古埃及和古巴比伦人都在毕达哥拉斯(Pythagoras)之前1500年就知道了毕达哥拉斯定理(勾股定理)；古埃及有计算方形棱锥的锥台(截头金字塔形)体积的正确公式；而古巴比伦有三角函数表.

我国对几何学的研究也有悠久的历史. 公元前1000年以前，在我国的黑陶文化时期，陶器上的花纹就有菱形、正方形和圆内接正方形等许多几何图形. 公元前500年，在墨翟所著的《墨经》里有几何图形的一些知识. 在《九章算术》里，记载了土地面积和物体体积的计算方法. 在《周髀算经》里，记载了直角三角形的三边之间的关系，这就是著名的勾股定理——“勾三股四弦五”，也称为商高定理. 祖冲之的圆周率也是著称世界的. 还有我国古代数学家刘徽、王孝通等对几何学都作出了重大的贡献.

古希腊人由于跟古埃及人通商，学到了测量与绘画等的几何初步知识. 古希腊人在这些几何初步知识的基础上，逐步充实并提高成为一门完整的几何学.

2. 几何学成为独立分支时期

这个时期的标志是，公元前3世纪希腊大数学家欧几里得把在他以前的古埃及和古希腊人的几何学知识加以系统的总结和整理，编写成《几何原本》. 这部书是世界上最著名、最完整而且流传最广的数学著作，也是欧几里得最有价值的一部著作. 在《几何原本》里，欧几里得把人们公认的一些事实列成定义和公理，以形式逻辑的方法，用这些定义和公理来研究各种几何图形的性质，从而建立了一套从公理、定义出发，论证命题得到定理的几何学论证方法，形成了一个严密的逻辑体系——几何学. 这标志着几何学成为一个独立分支.

《几何原本》中的五条公理：

(1) 等于同量的量彼此相等；

(2) 等量加等量，其和相等；

(3) 等量减等量，其差相等；

(4) 彼此能重合的物体是全等的；

(5) 整体大于部分.

五条公设：