十·五

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础

下册

第二版

顾静相　主编
顾静相　张旭红　编

高等教育出版社

普通高等教育“十五”国家级规划教材

（高职高专教育）

经济数学基础

下　册

第二版

顾静相　主编

顾静相　张旭红　编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十五”国家级规划教材，是根据教育部最新制定的《高职高专教育经济数学基础课程教学基本要求》，在第一版基础上编写的，适合我国高职高专教育现状。全书分上、下两册，本书为下册，主要包括行列式、矩阵、线性方程组、随机事件与概率、随机变量及其数字特征、统计推断、假设检验、方差分析与回归分析。

本书以“掌握概念，强化应用，培养技能”为重点，体现了以应用为目的，以必需、够用为度的原则。在体系编排上注重突出数学课程循序渐进、由浅入深的特点，在内容选取上以面向经济管理类专业和现代科技发展需要为原则，反映了作者多年从事教学和科研工作的成果和经验。

本书可作为高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校经管类专业的教材，也可供科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学基础．下册／顾静相主编．—2版．—北京：
高等教育出版社，2004.6
ISBN 7－04－014699－1

Ⅰ．经…　Ⅱ．顾…　Ⅲ．经济数学－高等学校：技术
学校－教材　Ⅳ．F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 025813 号

策划编辑　蒋　青　　责任编辑　蒋　青　　封面设计　杨立新　　责任绘图　尹文军
版式设计　王　莹　　责任校对　殷　然　　责任印制　韩　刚

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码　100011
总　　机　010－82028899
购书热线　010－64054588
免费咨询　800－810－0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn

经　　销　新华书店北京发行所
印　　刷　高等教育出版社印刷厂

开　　本　787×1092　1/16
印　　张　14.75
字　　数　350 000
版　　次　2000 年 8 月第 1 版
　　　　　2004 年 6 月第 2 版
印　　次　2004 年 7 月第 2 次印刷
定　　价　15.90 元

出 版 说 明

为加强高职高专教育的教材建设工作，2000 年教育部高等教育司颁发了《关于加强高职高专教育教材建设的若干意见》（教高司[2000]19 号），提出了“力争经过 5 年的努力，编写、出版 500 本左右高职高专教育规划教材”的目标，并将高职高专教育规划教材的建设工作分为两步实施：先用 2 至 3 年时间，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校在探索培养高等技术应用性专门人才和教材建设方面取得的成功经验，解决好高职高专教育教材的有无问题；然后，再用 2 至 3 年的时间，在实施《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，推出一批特色鲜明的高质量的高职高专教育教材。根据这一精神，有关院校和出版社从 2000 年秋季开始，积极组织编写和出版了一批“教育部高职高专规划教材”。这些高职高专规划教材是依据 1999 年教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》（草案）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（草案）编写的，随着这些教材的陆续出版，基本上解决了高职高专教材的有无问题，完成了教育部高职高专规划教材建设工作的第一步。

2002 年教育部确定了普通高等教育“十五”国家级教材规划选题，将高职高专教育规划教材纳入其中。“十五”国家级规划教材的建设将以“实施精品战略，抓好重点规划”为指导方针，重点抓好公共基础课、专业基础课和专业主干课教材的建设，特别要注意选择一部分原来基础较好的优秀教材进行修订使其逐步形成精品教材；同时还要扩大教材品种，实现教材系列配套，并处理好教材的统一性与多样化、基本教材与辅助教材、文字教材与软件教材的关系，在此基础上形成特色鲜明、一纲多本、优化配套的高职高专教育教材体系。

普通高等教育“十五”国家级规划教材（高职高专教育）适用于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

教育部高等教育司

2002 年 11 月 30 日

目 录

第二篇 线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第二篇 线性代数

第 7 章 行 列 式

学习目标

了解 n 阶行列式的定义,克拉默法则.理解行列式的性质.
掌握二阶、三阶、四阶行列式的计算.

在生产经营管理活动和科学技术中,碰到的许多问题都可以直接或近似地表示成一些变量之间的线性关系,因此研究线性关系是非常重要的.线性代数在研究变量之间的线性关系上有着重要的应用,而行列式是研究线性代数的重要工具.本章在复习二阶、三阶行列式的基础上,进一步讨论 n 阶行列式的定义、性质和计算以及解 n 元线性方程组的克拉默法则.

7.1 行列式的定义

7.1.1 二阶、三阶行列式

在初等代数中,用加减消元法求解二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}, \end{cases}$$

如果 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$,那么方程组(7.1.1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{7.1.2}$$

为了便于表示上述结果,规定记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

并称为二阶行列式.利用二阶行列式的概念,把方程组(7.1.1)中未知量 x_1, x_2 的系数用二阶行列式表示:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 称为这个二阶行列式的元素.横排称为行,竖排称为列.从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线,从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线.

利用二阶行列式的概念,(7.1.2)式中的分子可以分别记为

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

因此,当二元一次方程组(7.1.1)的系数组成的行列式 $D \neq 0$ 时,它的解就可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}. \tag{7.1.3}$$

例 1　解二元一次方程组 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 = -1. \end{cases}$

解　因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 1 \times 1 = -7 \neq 0,$$

所以方程组有解.且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -14, D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

由公式(7.1.3)知,方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-14}{-7} = 2, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-7}{-7} = 1.$$

类似地,为了便于表示三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{7.1.4}$$

的解,引进记号

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \end{aligned}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为三阶行列式,其中

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

是原三阶行列式 D 中划去元素 a_{11}所在的第一行、第一列后剩下的元素按原来顺序组成的二阶行列式,称它为元素 a_{11}的**余子式**,记作M_{11},即

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

类似地,记

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

并且令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \quad (i,j=1,2,3)$$

称为元素 a_{ij}的**代数余子式**.

因此,三阶行列式也可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}.$$

而且它的值可以转化为二阶行列式计算而得到.

利用三阶行列式的概念,当方程组(7.1.4)的系数行列式 $D \neq 0$ 时,它的解也可以简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{7.1.5}$$

其中 D_1, D_2, D_3是将方程组(7.1.4)中的系数行列式 D 的第一列、二列、三列分别换成常数列得到的三阶行列式.

例 2 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

解
$$\begin{aligned} D &= 1\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-5\times 6 - (-3)\times 3) + (4\times 6 - (-3)\times 2) \\ &= -30 + 9 + 24 + 6 = 9. \end{aligned}$$

例 3 解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 13, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

解 利用公式(7.1.5),先计算系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-1&2\\1&1&1\\2&3&-1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}1&1\\3&-1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&1\\2&3\end{vmatrix}$$
$$=(1\times(-1)-1\times3)+(1\times(-1)-1\times2)+2\times(1\times3-1\times2)$$
$$=-1-3-1-2+6-4=-5\neq0,$$

且

$$D_1=\begin{vmatrix}13&-1&2\\10&1&1\\1&3&-1\end{vmatrix}=-5,D_2=\begin{vmatrix}1&13&2\\1&10&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-10,$$
$$D_3=\begin{vmatrix}1&-1&13\\1&1&10\\2&3&-1\end{vmatrix}=-35,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,x_2=\frac{D_2}{D}=2,x_3=\frac{D_3}{D}=7.$$

7.1.2 n 阶行列式定义

前面我们用二阶、三阶行列式表示二元、三元线性方程组的解,那么 n 个方程的 n 元线性方程组的解是否也能利用行列式将它表示出来呢?为此我们引进 n 阶行列式的概念.

定义 7.1 由 n^2 个元素组成的一个算式,记为 D,且

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**,简称**行列式**,其中 a_{ij} 称为 D 的第 i 行第 j 列的**元素**($i,j=1,2,\cdots,n$).

当 $n=1$ 时,规定:

$$D=|a_{11}|=a_{11};$$

设 $n-1$ 阶行列式已定义,则 n 阶行列式

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},\tag{7.1.6}$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

例如,当 $n=2$ 时,

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

例 4 写出四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 15 & -9 & 6 & 13 \\ -2 & 3 & 12 & 7 \\ 10 & -14 & 8 & 11 \end{vmatrix}$$

的元素 a_{32}的余子式和代数余子式.

解 元素 a_{32}的余子式为划去第三行和第二列后,剩下元素按原来顺序组成的三阶行列式,而元素 a_{32}的代数余子式为余子式 M_{32}前面加一个符号因子,即

$$M_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 15 & 6 & 13 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix},$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 15 & 6 & 13 \\ 10 & 8 & 11 \end{vmatrix}.$$

定义 7.1 中的(7.1.6)式是 n 阶行列式 D 按第一行的展开式.通过二阶、三阶行列式的展开式可以推出,n 阶行列式的展开式中共有 $n!$ 个乘积项,每个乘积项中含有 n 个取自不同行、不同列的元素,并且带正号和带负号的项各占一半.

形如下列形式的行列式分别称为 n 阶对角形行列式和 n 阶下三角形行列式,由定义 7.1 可知,它们的值都是主对角线上元素的乘积.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 5 计算下列行列式:

(1) $D_1=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$.

解 (1) 根据(7.1.6)式,得

$$D_1 = a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12} \cdot a_{24}(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & 0 \\ 0 & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

(2) 根据(7.1.6)式,得

$$D_2 = a_{14} \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{14} \cdot a_{23}(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{14}a_{23} \cdot (0 - a_{32}a_{41}) = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

7.2 行列式的性质

为了进一步讨论 n 阶行列式,简化 n 阶行列式的计算,下面不加证明地引入 n 阶行列式的基本性质.在介绍行列式性质之前,先给出 n 阶转置行列式的概念.

如果把 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中的行与列按原来的顺序互换,得到的新行列式

$$D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

那么称行列式 D^{T}为 D 的转置行列式.显然 D 也是D^{T}的转置行列式.

性质 1　行列式 D 与它的转置行列式 D^{T}相等,即 $D = D^{\mathrm{T}}$.

例如二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D^{\mathrm{T}}.$$

性质 1 说明,行列式中行与列所处的地位是一样的,所以,凡是对行成立的性质,对列也同样成立.

由性质 1 和 n 阶下三角形行列式的结论,可以得到 n 阶上三角形行列式的值等于它的对角

线元素乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

性质 2 行列式 D 等于它的任意一行或列中所有元素与它们各自的代数余子式乘积之和,即

$$D = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad 或 \quad D = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj}, \tag{7.2.1}$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$. 换句话说,行列式可以按任意一行或列展开.

例 1 设三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$,

(1) 按第二行展开,并求其值;

(2) 按第三列展开,并求其值.

解 (1) 因为 $A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(5-6) = 1$,

$$A_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

所以
$$\begin{aligned} D &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= -4\times1 + 3\times6 + 1\times(-4) = 10. \end{aligned}$$

(2) 因为 $A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -18$,

$$A_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

所以
$$\begin{aligned} D &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \\ &= 2\times(-18) + 1\times(-4) + 5\times10 = 10. \end{aligned}$$

例 2 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -9 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

解 因为第三列中有三个零元素,由性质 2,按第三列展开,得

$$D = 2\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix},$$

对于上面的三阶行列式,按第三行展开,得

$$D=-2\cdot 5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&2\\-1&6\end{vmatrix}=-200.$$

由性质 2,可以证明下列结论成立.

性质 3　行列式一行(或列)的公因子可以提到行列式记号的外面,即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}. \tag{7.2.2}$$

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_1&a_2\\kb_1&kb_2\end{vmatrix}=a_1kb_2-a_2kb_1=k(a_1b_2-a_2b_1)=k\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}.$$

由性质 3 可以得到下面推论:

推论 1　如果行列式中有一行(或列)的全部元素都是零,那么这个行列式的值是零.

同样,由性质 2 可以证明下列结论成立.

性质 4　行列式中一行(或列)的每一个元素如果可以写成两数之和,

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

那么此行列式等于两个行列式之和,这两个行列式的第 i 行的元素分别是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$ 和 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$,其他各行(或列)的元素与原行列式相应各行(或列)的元素相同,即

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}+c_{i1}&b_{i2}+c_{i2}&\cdots&b_{in}+c_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\\=&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{i1}&b_{i2}&\cdots&b_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{i1}&c_{i2}&\cdots&c_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

例如二阶行列式

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1+c_1&b_2+c_2\end{vmatrix}&=a_1(b_2+c_2)-a_2(b_1+c_1)\\&=(a_1b_2-a_2b_1)+(a_1c_2-a_2c_1)\end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

性质 5 如果行列式中两行(或列)对应元素全部相同,那么行列式的值为零,即

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ k\text{ 行} \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

例如三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 a_3 + a_2 b_3 a_1 + a_3 b_1 a_2 - a_1 b_3 a_2 - a_2 b_1 a_3 - a_3 b_2 a_1 = 0.$$

由性质 3 和性质 5,可以得到下列推论:

推论 2 行列式中如果两行(或列)对应元素成比例,那么行列式的值为零.

推论 3 行列式 D 中任意一行(或列)的元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即当 $i \neq j$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0 \left(\text{或} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = 0\right), \tag{7.2.4}$$

综合性质 2 和推论 3,可以得到

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} D, \text{当 } i = j, \\ 0, \text{当 } i \neq j, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} A_{kj} = \begin{cases} D, \text{当 } i = j, \\ 0, \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

由性质 4 和推论 2,可以得到下列结论:

性质 6 在行列式中,把某一行(或列)的倍数加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ka_{i1} & a_{j2} + ka_{i2} & \cdots & a_{jn} + ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7.2.5}$$

例如二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + ka_1 & b_2 + ka_2 \end{vmatrix} = a_1(b_2 + ka_2) - a_2(b_1 + ka_1)$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1) + k(a_1 a_2 - a_2 a_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

利用性质 3 和性质 6,可以得到下列结论:

性质 7　如果将行列式的任意两行(或列)互换,那么行列式的值改变符号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如,二阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

前面,我们介绍了行列式的七条性质和三个推论,下面举例说明如何利用这些性质计算行列式.

例 3　计算下面行列式的值.

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 290 & 106 & 196 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$;

(2) $D_2 = \begin{vmatrix} a-b & a & b \\ -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix}$ $(a, b \neq 0)$.

解　(1) 把 D_1的第二行的元素分别看成:$300-10, 100+6, 200-4$,由性质 4,得

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300-10 & 100+6 & 200-4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300 & 100 & 200 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

而由推论 2 和性质 3、性质 5,得

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 300 & 100 & 200 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -10 & 6 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 $D_1 = 0$.

(2) 利用性质 6,在第一行上加上第二行一倍,再由推论 2,得

$$D_2 = \begin{vmatrix} -b & b & a+b \\ -a & b-a & a \\ b & -b & -a-b \end{vmatrix} = 0.$$

例 4 证明:

$$D = \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

证 利用性质 4 把原行列式拆成 4 个行列式,即

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x+b_1 & c_1 \\ a_2 & a_2x+b_2 & c_2 \\ a_3 & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x+b_1 & c_1 \\ b_2x & a_2x+b_2 & c_2 \\ b_3x & a_3x+b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_1x & c_1 \\ a_2 & a_2x & c_2 \\ a_3 & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & b_1 & c_1 \\ b_2x & b_2 & c_2 \\ b_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

再由推论 2 可知第一个和第四个行列式为零,由性质 3 和性质 7,得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1x & a_1x & c_1 \\ b_2x & a_2x & c_2 \\ b_3x & a_3x & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - x^2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (1-x^2)\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

7.3 行列式的计算

行列式的基本计算方法之一是根据行列式的特点,利用行列式的性质,把它逐步化为上(或

下)三角形行列式,由前面的结论可知,这时行列式的值就是主对角线上元素的乘积.这种方法一般称为“化三角形法”.

例 1　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&3&5&0\\0&1&5&6\\1&2&3&4\end{vmatrix}.$$

解　利用行列式性质,把 D 化为上三角形行列式,再求值.

$$D\xlongequal[]{\substack{②+①(-1)\\④+①(-1)}}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}\xlongequal{③+②(-1)}\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&0&7\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(③,④)}-\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&0&3&3\\0&0&0&7\end{vmatrix}=-21.$$

说明:在例 1 的计算过程中,我们在一些等号上面使用了记号,它们表示行变换.例如“② + ①(- 1)”表示第二行加上第一行的 - 1 倍.如果在一个等号上面出现几个这样的记号,按顺序进行变换.规定:

(1) 记号“k ⓘ”表示第 i 行(或列)提出公因子 k;

(2) 记号“(ⓘ,ⓙ)”表示第 i 行(或列)与第 j 行(或列)互换;

(3) 记号“ⓘ + ⓙk”表示第 i 行(或列)加上第 j 行(或列)的 k 倍.

上述三种记号写在等号上面表示行变换,写在等号下面表示列变换.

例 2　计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\0&-7&1&2\end{vmatrix}.$$

解　利用行列式性质,把 D 化为上三角形行列式,再求值.

$$D\xlongequal[(①,③)]{}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-7&0&2\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{②+①1\\③+①(-2)\\④+①(-1)}}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{(②,③)}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-2&-2&0\end{vmatrix}\xlongequal{\substack{③+②(-2)\\④+②2}}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&6\end{vmatrix}=-18.$$

小结　把数字元素的行列式化为上三角形行列式的一般步骤为