高等代数与解析几何

面向21世纪高等学校教材改革课程

下册

西南师范大学数学系
代数与几何教研室 编著

面向21世纪高等学校教材改革课程

高等代数与解析几何

下册

西南师范大学数学系
代数与几何教研室 编著

西南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何．下册/西南师范大学数学系代数与几何教研室编著．—重庆．西南师范大学出版社，2002.9

ISBN 7-5621-2748-4

Ⅰ．高...　Ⅱ．西...　Ⅲ．①高等代数—高等学校—教材②解析几何—高等学校—教材　Ⅳ．①015②0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 073429 号

高等代数与解析几何(下册)

西南师范大学数学系
代数与几何教研室编著

责任编辑:胡小松
封面设计:王正端
出版发行:西南师范大学出版社
(重庆・北碚　邮编 400715)
经 销 者:新华书店
印 刷 者:四川外语学院印刷厂
开　　本:850mm×1168mm　1/32
印　　张:9.375
字　　数:240 千字
版　　次:2003 年 3 月　第 1 版
印　　次:2003 年 3 月　第 1 次印刷
印　　数:1～1 000
书　　号:ISBN 7-5621-2748-4/O・70

定　　价:24.00 元(本册定价:12.00 元)

前　言

随着高等学校课程体系的改革，若干传统课程的教学内容和教学方法都在发生变化。《高等代数与解析几何》这门课程就是在这种变化中逐渐由传统的《高等代数》、《解析几何》两门课程演绎而成的。目前，国内已正式出版多部《高等代数与解析几何》教材。根据教学实践，我们在陈重穆编著的《高等代数》和刘海蔚编著的《解析几何》的基础上编著了这本《高等代数与解析几何》，其主要目的是使读者从较低的起点出发，能用较少的学时，掌握这两门课程的基本精髓，而且避免了在讲授《解析几何》时重复讲授《高等代数》中向量知识的过程。在很多方面，我们沿用了原教材的思想和内容。从内容上看，本教材几乎包含了传统的《高等代数》、《解析几何》教材的所有内容。在习题处理上，我们提供了两类习题：基础题和补充题，其中补充题有相当的难度。读者可根据自身特点选择习题练习。

为了教材的系统性和完整性，我们把二次曲线的一般理论作为最后一章，教学时可以根据实际情况选讲。对于同时开设《解析几何》的院校，本教材中的几何内容可以不讲。若使用本教材来讲授《解析几何》的内容，则应加强学生作图的练习。

从我们的实践来看，应根据学生实际情况进行内容的取舍，选

择适当的讲解方式。若以每周 7 学时计，一学年可以授完全部内容。

段泽勇教授承担了这套教材的整体框架设计和主要执笔工作，姚纯清副教授承担了几何内容的执笔工作。本教材也是在代数与几何教研室全体同仁的参与下完成的。书中的不当之处，敬请海内外同行批评指正！

编　者

2002 年 8 月

目 录

第六章

线性变换

本章我们对纯抽象的向量空间(或者说线性空间)做进一步的深入研究.所探讨的内容和所采用的方法不仅在纯数学理论中是很基本、很重要的,而且在其它学科和领域中也有着广泛的运用.

6.1　线性变换及其运算

在普通几何空间里,为了研究几何图形的性质,常常用到旋转变换、投影变换;在由$[a,b]$上具有任意次导数的全体函数所作成的线性空间$D[a,b]$里,为了研究函数的性质,常常用到微商变换……等.

我们发现,如果用V表示普通几何空间或$D[a,b]$,不论σ表示旋转变换、投影变换或微商变换,σ都是V到V的映射,而且对于任意的$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$及任意实数$k$,均有:

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta});$$

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\,\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

于是，在一般线性空间里，具有这些性质的变换，便成为线性代数研究的一个主要对象.

定义 6.1.1 设 V 是数域 F 上的一个线性空间，σ 是 V 到 V 的一个映射. 这里，我们称 σ 是线性空间 V 的一个**变换**.

定义 6.1.2 设 V 是数域 F 上的一个线性空间，σ 是 V 的一个变换，如果满足下列条件，则称 σ 是 V 的一个**线性变换**：

(1)对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta});$$

(2)对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 及 $k\in F$，有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\,\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

如不声明时，以后所讨论的线性空间，都是某一固定数域 F 上的线性空间.

例 6.1.1 设 $F^{n\times n}$是数域 F 上的全体 n 阶方阵作成的 F 上的 n^2 维线性空间，A 为 $F^{n\times n}$中固定的方阵，规定

$$\sigma(Z)=AZ-ZA,Z\in F^{n\times n},$$

则 σ 是 $F^{n\times n}$的一个线性变换.

例 6.1.2 设 A 是数域 F 上的 n 阶方阵，F^n 为 n 维列空间（n 维列向量作成的空间），规定

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=A\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in F^n,$$

则 σ 是 F^n 的一个线性变换.

例 6.1.3 设 V 是线性空间，对于 V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$，规定

$$\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},$$

$$\theta(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},$$

($\mathbf{0}$ 表示 V 中零向量)则 ε,θ 都是 V 的线性变换，并且，分别称 ε 与 θ 为**恒等变换**(或**单位变换**)和**零变换**.

例 6.1.4 设 V 是数域 F 上的线性空间，k 是 F 中的一个数，规定

$$k^*(\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V,$$

则 k^* 是 V 的一个线性变换，并且，称 k^* 为由数 k 决定的**数乘变换**. 特别地，当 $k=1$ 时，线性变换 1^* 为单位变换，当 $k=0$ 时，线性变换 0^* 为零变换.

由线性变换的定义，容易得到以下性质：

1. 设 σ 是线性空间 V 的线性变换，则

$$\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}, \sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

因为，$\sigma(\mathbf{0})=\sigma(0\boldsymbol{\alpha})=0\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

$$\sigma(-\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(-1\cdot\boldsymbol{\alpha}) = -1\cdot\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = -\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

2. 如果 σ 是线性空间 V 的线性变换，且

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2\cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则 $\sigma(\boldsymbol{\beta})=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$.

特别地，如果 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$，则 $k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0}$.

由此得到：

3. 设 σ 是线性空间 V 的一个线性变换，且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_s)$ 也线性相关；但其逆不真. 例如零变换总把线性无关的向量组变为线性相关的向量组.

验证线性空间 V 的一变换 σ 是否为线性变换，可用下面的定理：

定理 6.1.1 V 的一个变换 σ 是线性变换的充分必要条件是：对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$k,l\in F$，有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta}).$$

证 如果 σ 是 V 的线性变换，则对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$k,l\in F$，有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) = \sigma(k\boldsymbol{\alpha})+\sigma(l\boldsymbol{\beta}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

反之，若对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$k,l\in F$，有

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta}),$$

则令 $k=l=1$，即得

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta});$$

又令 $l=0$,则得

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

所以,σ 为 V 的线性变换.

现在我们研究线性变换的运算及其性质.

因线性空间 V 的线性变换 σ 是 V 到 V 的一个特殊映射,所以,线性变换的“相等”、“乘积”就是映射的相等、乘积,这在第一章已经定义过,因此,不再重复了.由于线性变换是线性空间 V 到 V 的映射,于是,可以定义线性变换的加法及数与线性变换的乘法(数量乘积).

设 σ,τ 是线性空间 V 的两个线性变换,对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,规定:

$$(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \tau(\boldsymbol{\alpha}).$$

显然,$\sigma+\tau$ 是 V 的一个变换,我们称变换 $\sigma+\tau$ 为 **σ 与 τ 的和**.

如果把 V 的变换的概念与函数的概念相比较,则变换 σ,τ 的积 $\sigma\cdot\tau$ 与和 $\sigma+\tau$ 的概念,分别就是函数 $f(x)$,$g(x)$ 所定义的复合函数 $f(g(x))$ 及和函数 $f(x)+g(x)$ 概念的推广.

设 σ 为线性空间 V 的线性变换,k 为 F 中的任意数,规定

$$k\sigma = k^{*}\sigma,$$

则 $k\sigma$ 是 V 的一个变换,我们称这个变换 $k\sigma$ 为 **k 与 σ 的数量乘积**.

定理 6.1.2 设 σ,τ,δ 是线性空间 V 的线性变换,则 $\sigma\tau$ 是 V 的线性变换,并且

$$(\sigma\tau)\delta = \sigma(\tau\delta);$$

$$(\sigma+\tau)\delta = \sigma\delta + \tau\delta;$$

$$\delta(\sigma+\tau) = \delta\sigma + \delta\tau.$$

证 对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$a,b\in F$,

$$\begin{aligned}\sigma\tau(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}) &= \sigma(\tau(a\boldsymbol{\alpha}+b\boldsymbol{\beta}))\\ &= \sigma(a\tau(\boldsymbol{\alpha})+b\tau(\boldsymbol{\beta}))\\ &= a\sigma(\tau(\boldsymbol{\alpha}))+b\sigma(\tau(\boldsymbol{\beta}))\\ &= a\sigma\tau(\boldsymbol{\alpha})+b\sigma\tau(\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

所以，$\sigma\tau$ 是 V 的线性变换.

在第一章第一节已经证明了映射的乘法满足结合律，因而线性变换的乘法满足结合律. 现证分配律成立.

对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，

$$\begin{aligned}((\sigma+\tau)\delta)(\boldsymbol{\alpha}) &= (\sigma+\tau)(\delta(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= \sigma(\delta(\boldsymbol{\alpha}))+\tau(\delta(\boldsymbol{\alpha})) \\ &= \sigma\delta(\boldsymbol{\alpha})+\tau\delta(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= (\sigma\delta+\tau\delta)(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

所以 $(\sigma+\tau)\delta=\sigma\delta+\tau\delta$；同理可证 $\delta(\sigma+\tau)=\delta\sigma+\delta\tau$.

注意，线性变换的乘法一般不满足交换律，例如在实数域 R 上的线性空间 $R[x]$ 里，规定

$$\sigma(f(x))=f'(x),\tau(f(x))=\int_0^x f(t)dt,f(x)\in R[x].$$

容易验证 σ,τ 都是 $R[x]$ 的线性变换，但 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

定理6.1.3　设 σ,τ,δ 是线性空间 V 的线性变换，那么

(1) $\sigma+\tau$ 是 V 的线性变换；

(2) $\sigma+\tau=\tau+\sigma$；

(3) $(\sigma+\tau)+\delta=\sigma+(\tau+\delta)$.

证　对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k,l\in F$，有

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) &= \sigma(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta})+\tau(k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}) \\ &= k\sigma(\boldsymbol{\alpha})+l\sigma(\boldsymbol{\beta})+k\tau(\boldsymbol{\alpha})+l\tau(\boldsymbol{\beta}) \\ &= k(\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha}))+l(\sigma(\boldsymbol{\beta})+\tau(\boldsymbol{\beta})) \\ &= k(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha})+l(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

所以，$\sigma+\tau$ 为 V 的线性变换；又

$$\begin{aligned}(\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha}) &= \sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= \tau(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\alpha}) \\ &= (\tau+\sigma)(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

所以，$\sigma+\tau=\tau+\sigma$；再因

$$\begin{aligned}((\sigma+\tau)+\delta)(\boldsymbol{\alpha}) &= (\sigma+\tau)(\boldsymbol{\alpha})+\delta(\boldsymbol{\alpha})\\ &= (\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\tau(\boldsymbol{\alpha}))+\delta(\boldsymbol{\alpha})\\ &= \sigma(\boldsymbol{\alpha})+(\tau(\boldsymbol{\alpha})+\delta(\boldsymbol{\alpha}))\\ &= \sigma(\boldsymbol{\alpha})+(\tau+\delta)(\boldsymbol{\alpha})\\ &= (\sigma+(\tau+\delta))(\boldsymbol{\alpha}),\end{aligned}$$

所以，$(\sigma+\tau)+\delta=\sigma+(\tau+\delta)$.

定理 6.1.4 (1)线性空间 V 的零变换 θ，具有性质：对 V 的任一变换 σ，$\theta+\sigma=\sigma$；

(2)对于 V 的每一变换 σ，存在惟一的一个 V 的变换 τ，使 $\tau+\sigma=\theta$，则此变换 τ 叫 σ 的**负变换**，记为 $-\sigma$.

证 (1)对于任意 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，

$$(\theta+\sigma)(\boldsymbol{\alpha}) = \theta(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}+\sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以，$\theta+\sigma=\sigma$，

(2)对于 σ，我们规定 $\tau=(-1)^*\sigma$，于是，对于任意 $\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$\begin{aligned}(\tau+\sigma)(\boldsymbol{\beta}) = \tau(\boldsymbol{\beta})+\sigma(\boldsymbol{\beta}) &= ((-1^*)\sigma)(\boldsymbol{\beta})+\sigma(\boldsymbol{\beta})\\ &= ((-1)\sigma)(\boldsymbol{\beta})+\sigma(\boldsymbol{\beta})\\ &= -\sigma(\boldsymbol{\beta})+\sigma(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0},\end{aligned}$$

所以，$\tau+\sigma=\theta$；

如果还有 $\delta+\sigma=\theta$，于是

$$\tau = \tau+\theta = \tau+(\delta+\sigma) = \tau+(\sigma+\delta) = (\tau+\sigma)+\delta = \theta+\delta = \delta.$$

由于 $-\sigma=(-1)^*\sigma$，如果 σ 是线性变换，则由定理 6.1.2 知，$-\sigma$ 也是 V 的线性变换.

我们规定此线性变换 σ **与** τ **的差**为：$\sigma-\tau=\sigma+(-\tau)$.

由定理 6.1.2 立即得到：

推论 6.1.1 设 σ,τ 是线性空间 V 的线性变换，$k,l\in F$，则 $k\sigma$ 是 V 的线性变换，并且

$$k(\sigma+\tau) = k\sigma+k\tau;$$

$$(k+l)\sigma = k\sigma+l\sigma;$$

$$(kl)\sigma = k(l\sigma);$$
$$1\sigma = \sigma.$$

我们用 $L(V)$ 表示线性空间 V 的一切线性变换作成的集合，由定理 6.1.3，定理 6.1.4 及推论 6.1.1 得：$L(V)$ 对线性变换的加法及数量乘法作成数域 F 上的一个线性空间.

因线性空间 V 的变换 σ 是 V 到 V 的一个映射，由定理 1.1.1 知：一个映射不必有逆映射，所以，V 的变换不必都有逆变换.

如果对于 V 的一个变换 σ，存在 V 的一个变换 τ，使 $\sigma\tau=\tau\sigma=\varepsilon$，其中 ε 为 V 的恒等变换，这时，我们称变换 σ 是**可逆的**，并且称 τ 是 σ 的**逆变换**. 容易证明：如果 σ 可逆，则 σ 的逆变换由 σ 惟一确定，因此，我们用符号 σ^{-1} 表示 σ 的逆变换.

σ 是线性空间 V 的一个可逆线性变换的充分必要条件是：σ 是 V 到 V 的一个同构映射. 因此，由定理 4.7.1(2) 的证明知：如果 σ 是线性空间 V 的一个可逆线性变换，则 σ^{-1} 也是 V 的一个线性变换.

因线性变换对乘法满足结合律，所以，我们可规定：

$\sigma^n=\underbrace{\sigma\cdot\cdots\cdot\sigma}_{n个}$，其中 n 为自然数，规定：$\sigma^0=\varepsilon$，其中 ε 为恒等变换，则

$$\sigma^m\sigma^n = \sigma^{m+n},$$
$$(\sigma^m)^n = \sigma^{mn},$$

其中 m,n 为非负整数，但一般 $(\sigma\tau)^n\neq\sigma^n\tau^n$.

当线性变换 σ 可逆时，规定：

$\sigma^{-m}=(\sigma^{-1})^m$，其中 m 为自然数，因此，如果 σ 可逆，对于任意整数 m,n 有

$$\sigma^m\sigma^n = \sigma^{m+n},$$
$$(\sigma^m)^n = \sigma^{mn}.$$

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$，$\sigma$ 是数域 F 上线性空

间 V 的一个线性变换,规定:

$$f(\sigma)=a_n\sigma^n+\cdots+a_1\sigma+a_0\varepsilon,$$

则 $f(\sigma)$是线性空间 V 的一个线性变换,称 $f(\sigma)$为**线性变换 σ 的多项式**.

容易证明:如果 $f(x),g(x)\in F[x]$,且

$$h(x)=f(x)+g(x),$$

$$p(x)=f(x)g(x),$$

则

$$h(\sigma)=f(\sigma)+g(\sigma),$$

$$p(\sigma)=f(\sigma)g(\sigma)=g(\sigma)f(\sigma).$$

习 题

1. 判断下列变换是否是线性变换.

(1)把复数域看成复数域上的线性空间,$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 其中 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的共轭复数;

(2)把复数域看成实数域上的线性空间,$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 其中 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的共轭复数;

(3)在 F^3 中,$\sigma((x_1,x_2,x_3))=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

(4)在 F^3 中,$\sigma((x_1,x_2,x_3))=(\cos x_1,\sin x_2,0)$;

(5)在 $F[x]_n$ 中,$\sigma(f(x))=xf(x)$;

(6)在 $F[x]$中,$\sigma(f(x))=xf(x)$;

(7)在 $F[x]_n$ 中,$\sigma(f(x))=f(x+1)-f(x)$;

(8)在 $F[x]_n$ 中,$\sigma(f(x))=f(x_0)$,其中 $x_0\in F$ 是一个固定数;

(9)在线性空间 V 中,

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}_0+\boldsymbol{\alpha},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_0$ 为 V 中固定的向量;

(10)在 $F^{n\times n}$ 中,$\sigma(Z)=AZA$,其中 $A\in F^{n\times n}$ 是一个固定的矩

阵.

2. 设σ为数域F上线性空间V的线性变换,$\boldsymbol{\alpha}\in V$,并且$\boldsymbol{\alpha}$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})$均不为零向量,但$\sigma^k(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$.证明:$\boldsymbol{\alpha},\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma^{k-1}(\boldsymbol{\alpha})$线性无关.

3. 证明,线性变换σ可逆的充分必要条件是σ为单满射.

4. 设$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是数域$F$上$n$维线性空间$V$的一个基,$\sigma$是$V$的一个线性变换.证明:$\sigma$是可逆的充分必要条件是$\sigma(\varepsilon_1),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$线性无关.

5. 设$\sigma_1,\cdots,\sigma_s$为数域F上线性空间V的s个两两不同的线性变换,那么,在V中存在向量$\boldsymbol{\alpha}$,使$\sigma_1(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\sigma_s(\boldsymbol{\alpha})$也两两不同.

6. 设σ,τ是线性变换,如果$\sigma\tau-\tau\sigma=\varepsilon$,这里$\varepsilon$为恒等变换,则
$$\sigma^k\tau-\tau\sigma^k=k\sigma^{k-1},$$
其中k为自然数且$k>1$.

7. 设σ,τ是线性变换,$\sigma^2=\sigma,\tau^2=\tau$.证明:

(1)若$(\sigma+\tau)^2=\sigma+\tau$,则$\sigma\tau=\theta$;

(2)若$\sigma\tau=\tau\sigma$,则$(\sigma+\tau-\sigma\tau)^2=\sigma+\tau-\sigma\tau$.

8. 设σ是数域F上一维线性空间V的一个变换.证明:σ是线性变换的充分必要条件是对于任意$\boldsymbol{\alpha}\in V$,有
$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\alpha},$$
其中k是F中固定的一个数.

6.2 线性变换的矩阵

本节的主要内容是:具体地表示数域F上线性空间V的一个线性变换σ.因此,必须对V的任一向量$\boldsymbol{\alpha}$都能求出$\boldsymbol{\alpha}$在σ之下的

象 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$. 这个问题在一般的线性空间里难于解决，但在有限维线性空间里，这个问题较为容易，而且结果很完美. 本教材只对有限维线性空间的情形进行讨论.

定义 6.2.1 设 V 为数域 F 上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为 V 的一个基，σ 是 V 的一个线性变换.

令 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_i)=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}\boldsymbol{\alpha}_j, i=1,2,\cdots,n$. 即：

$$(\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_n))=(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)A,$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

我们称矩阵 A 为**线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵.**

例 6.2.1 设 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 为数域 F 上 n 维线性空间 $F[x]_n$ 的一个基，σ 为 $F[x]_n$ 的微商变换，则

$$\sigma(1)=0\cdot 1+0x+\cdots+0x^{n-2}+0x^{n-1},$$
$$\sigma(x)=1\cdot 1+0x+\cdots+0x^{n-2}+0x^{n-1},$$
$$\sigma(x^2)=0\cdot 1+2x+\cdots+0x^{n-2}+0x^{n-1},$$
$$\cdots\cdots$$
$$\sigma(x^{n-1})=0\cdot 1+0x+\cdots+(n-1)x^{n-2}+0x^{n-1}.$$

即

$$(\sigma(1),\sigma(x),\cdots,\sigma(x^{n-1}))=(1,x,\cdots,x^{n-1})\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

所以，σ 在基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 下的矩阵为：