自然科学基金资助项目百篇论文集

(1999-2003)

海南省科技厅

前　言

在国家自然科学基金和省自然科学基金的持续资助下，经过广大科技工作者的辛勤努力，我省基础研究特别是应用基础研究工作取得了长足的发展。近5年中，全省共有233个项目获得国家或省自然科学基金资助，资助经费1190万元。通过自然科学基金的资助，既培养和稳定了一支较高素质的科学研究队伍，使一批中青年科技工作者脱颖而出，又改善了科研条件，建成了一批具有特色的研究基地，至2003年底，全省共有7个省级重点实验室、1个省部共建国家重点实验室培育基地、1个国家重点实验室。随着基础研究实力的显著提高，一些较高水平的研究成果，特别是热带生物技术领域基础研究的突破，推动了全省橡胶产业、热带高效农业、海洋水产业等优势产业的持续、快速、健康的发展，同时大大提高了全省的科技创新能力，促进了经济和社会的发展。

为了总结我省自然科学基金资助项目所取得的成效，我厅从1999年以来获国家或省自然科学基金资助并正式发表的论文中选出100篇汇编成册，并按学科分为数理、化学、生命、地球、材料与工程、信息和管理7个部分，其中国家基金资助项目论文56篇、省基金资助项目论文44篇。

编者

2004年7月

目 录

第一部分 数理科学

第二部分 化学科学

第三部分 生命科学

第四部分　地球科学

第五部分　材料与工程科学

第六部分　信息科学

第七部分　管理科学

第一部分　数理科学

Fuzzy 质理想与质 Fuzzy 理想

张诚一

(海南师范学院,海口,海南,571158)

摘要 分析了[3,4]中 Fuzzy 质理想定义之不足,重新给出了 Fuzzy 质理想的定义,并定义了更强的质 Fuzzy 理想,进而讨论了它们的等价刻划及有关性质。

文[1,2]定义了环的 Fuzzy 理想,讨论了 Fuzzy 理想的运算,文[3,4]给出了 Fuzzy 质理想及其有关性质,文[5,6]利用集合套研究了 Fuzzy 子环及 Fuzzy 理想,取得了不少的有益的成果。本文分析了[3,4]中 Fuzzy 质理想定义之不足,重新给出了 Fuzzy 质理想的定义,并定义了更强的质 Fuzzy 理想,(我们的定义以原来的 Fuzzy 质理想为特例,比原来的概念更具模糊性)进而讨论了它们的等价刻划及有关性质。

1 引言

为了比较前后两个 Fuzzy 质理想的定义,我们仍需回顾一下有关概念。

定义 1.1 设 R 是环,I 是 R 的 Fuzzy 子集,I 被称为 R 的 Fuzzy 左(右)理想,若 $\forall x,y\in R$,

1.$I(x-y)\geq I(x)\wedge I(y)$;2.$I(xy)\geq I(y)\quad(I(xy))\geq I(x)$.

如果 I 还满足:$I(x-y)\geq I(x)\vee I(y)$,$\forall x,y\in R$ 则称 I 为 R 的 Fuzzy 理想.

定义 1.2[1]设 A,B 是环 R 的 Fuzzy 子集,则 $A\circ B$ 被定义为

$$A\circ B(x)=\begin{cases}\bigvee_{x=yz}(A(y)\wedge A(Z)\\ 0,\text{如果 } X \text{ 不能表为 } x=yz.\end{cases}$$

定义 1.3[4]设 P 是环 R 的一个 Fuzzy 理想,如果

1.P 不是常值函数;

2.对于 R 的任意 Fuzzy 理想 A,B,中要 $A\circ B\subseteq P$,必有 $A\subseteq P$ 或 $B\subseteq P$;则称 P 是

环 R 的 Fuzzy 质理想.

[4]中证明了:设 $A^0=\{X\in R|A(X)=A(0)\}$,如果 A 是环 R 的 Fuzzy 理想(Fuzzy 质理想),则 A^0 是 R 的理想(质理想);并且,设 P 是环 R 的一个 Fuzzy 质理想,则 $|I_m(P)|=2$,即 P 是二值的,且 $P(0)=1$.于是[4]得到了:环 R 的真 Fuzzy 理想 P 是 Fuzzy 质理想的充要条件是:1.P^0 是 R 的真质理想,2.$|I_m(P)|=2$,且 $P(0)=1$.

2　Fuzzy 质理想与质 Fuzzy 理想

定义 2.1 设 X 是论域,P(X)是其幂集,$\Gamma\subseteq[0,1]$,若映射 H:

$$\Gamma\to P(X);\lambda\mapsto H(\lambda)\text{满足}:\lambda<\mu\Leftrightarrow H(\lambda)\supseteq H(\mu),\qquad(1)$$

则称 H 为 X 的一个集合套,记为 $H_\Gamma=\{H(\lambda)|\lambda\in\Gamma\}$。$H_\Gamma$ 可以依[6]中约定约简或加细.当 H_Γ 满足:$\lambda\neq\mu(\lambda,\mu\in\Gamma)$时,$H(\lambda)\neq H(\mu)$,则称 H_Γ 为既约集合套.

如果规定 X 的两个集合套有关系 T 当且仅当它们在同一指标集合 Γ 下具有相同的既约集合套,则 T 是等价关系。以此关系将 X 的所有集合套分类,H_Γ 所在的类记为 $\bar{H}_\Gamma$,称为 X 的一个 Fuzzy 子集,记为 H。

定义 2.2 设 R 是环,S 是 R 的 Fuzzy 子集,S_Γ 为 S 的即约集合套,如果

1. $\forall\lambda\in\Gamma,S_\lambda$ 是 R 的子环,则称 S 是 R 的 Fuzzy 子环,记为 $S\leq R$;

2. $\forall\lambda\in\Gamma,S_\lambda$ 是 R 的左(右)理想子环,则称 S 是 R 的 Fuzzy 左(右)理想,记为 $S\lhd_L R(S\lhd_r R)$;

3. $\forall\lambda\in\Gamma,S_\lambda$ 是 R 的理想子环,则称 S 是 R 的 Fuzzy 理想,记为 $S\lhd R$.

由[7,8]知,设 S_Γ 是 S 的既约集合套,则 Γ 是可列集即已足够.当然,|Γ|越大,S 的模糊性就越强.以此观点,再看[3,4]中的 Fuzzy 质理想,其既约子环套的指标集 Γ 仅为二元集合,这一类 Fuzzy 质理想 P 仅由以下既约子环套所确定

$$P_\Gamma:R=P_\lambda\leq P^0,\Gamma=\{\lambda,1\}\qquad(2)$$

不能不认为这样的定义缺乏“模糊性”,仅仅是经典质理想的简单模糊.况且,如果 A,B 是 R 的 Fuzzy 理想,$A\circ B$ 未必是 R 的 Fuzzy 理想,当 A,B 由 Fuzzy 理想退化为经典理想子环时,$A\circ B$ 也不必是 R 的理想(经典的),这也是[3],[4]的一个缺陷。为此,我们给出以下的 Fuzzy 质理想的定义 。

定义 2.3 设 P 是环 R 的 Fuzzy 理想,P_Γ 为其既约理想子环套,

$$P_\Gamma:P^0\leq\cdots\leq P_\lambda\leq P_\mu\leq P_\omega\leq\cdots,\qquad(3)$$

(这里 $P^0=\{x\in R|P(x)=P(0)\}$)如果 P^0 是 R 的质理想子环,则称 P 是 R 的 Fuzzy 质理想子环.

更强的,还可指出:

定义 2.4 设 P 是环 R 的 Fuzzy 理想,P_Γ 为其既约理想子环套,

$$P_\Gamma: P^0 \leqq \cdots \leqq P_\lambda \leqq P_\mu \leqq P_\omega \leqq \cdots, \qquad (4)$$

如果(4)中任意 P_λ 均为 R 的质理想子环,则称 P 为环 R 的 Fuzzy 强质理想子环。

显见,[3,4]中的定义是定义 2.3,2.4 的特例。Fuzzy 强质理想必为 Fuzzy 质理想,反之不然。例如在 Z[x]中,由既约子环套

$$P_\Gamma: \{O\} \leqq (x) \leqq (2,x) \leqq Z[x]$$

所确定的 Fuzzy 强质理想 P 当然也是 Z[x]的 Fuzzy 质理想,而由既约子环套

$$Q_\Gamma: (x) \leqq (x,2^n) \leqq (x,2^{n-1}) \leqq \cdots \leqq (2,x) \leqq Z[x]$$

所确定的 Fuzzy 质理想 Q 不是 Z[x]的 Fuzzy 强质理想。

引理 2.5[7] P 是环 R 的质理想子环的充要条件是:

$\forall x,y \in R$,如果 $xRy \subseteq P$,则 $x \in P$ 或 $y \in P$.

定理 2.6 设 R 是环,P 是 P 的 Fuzzy 理想,P 是环 R 的 Fuzzy 强质理想的充要条件是:$\forall x,y \in R$,如果对任意的 $r \in R$,$P(xry)=\lambda$,则 $P(x)=\lambda$,或 $P(y)=\lambda$.

证明:(必要性)$\forall x,y \in R$,若对任意的 $r \in R$,$P(xry)=\lambda$,由于 P 的既约子环套的指标集至多是可列集,可设 $\lambda=\lambda_n$,记 $P_{\lambda n}=P_n$,则 $xry \in P_n$,$xRy \subseteq P_n$。由于是 R 的质理想,故由引理 2.5,$x \in p_n$,或 $y \in P_n$,即

$$P(x) \geqq \lambda_n, \text{或 } P(y) \geqq \lambda_n,$$

但 P 是 R 的 Fuzzy 质理想,$P(xry) \geqq P(x) \vee P(r) \vee P(y) \geqq \lambda_n$,从而 $P(x)=\lambda_n$ 或 $P(y)=\lambda_n$。

(充分性)设 P 是 R 的 Fuzzy 理想,P_Γ 是其既约子环套,则对于 P_Γ 中任意的 P_λ,设 $x,y \in R$,$\forall r \in R$,由 $P(xry)=\lambda$ 可以推出 $P(x)=\lambda$ 或 $P(y)=\lambda$,即 $xry \in P_\lambda$ 时,可以推出 $X \in P_\lambda$ 或 $y \in P_\lambda$。

这样,P_λ 是 R 的质理想,从而由 P_Γ 所确定的 P 是 R 的 Fuzzy 强质理想。

类似地,可以证明:

定理 2.7 设 R 是环,P 是 R 的 Fuzzy 理想,则 P 是环 R 的 Fuzzy 强质理想的充要条件是:设 $x,y \in R$,如果 $\forall r \in R$,$P(xry)=P(0)$可以推出 $P(x)=P(0)$或 $P(y)=p(0)$。

推论 2.8 P 是可换环 R 的 Fuzzy 理想,则 P 是环 R 的 Fuzzy 强质理想的充要条件是:设 $x,y \in R$,由 $P(xy)=\lambda$ 可以推出 $P(x)=\lambda$ 或 $P(y)=\lambda$

推论 2.9 P 是可换环 R 的 Fuzzy 理想,则 P 是环 R 的 Fuzzy 质理想的充要条件是:设 $x,y \in R$,由 $P(xy)=P(0)$可以推出 $P(x)=P(0)$或 $P(y)=P(0)$。

三、 质 Fuzzy 理想

定义 3.1 设 A,B 是环 R 的 Fuzzy 理想,

$A_\Gamma: \cdots \leqq A_{\lambda 1} \leqq A_{\mu 1} \leqq \cdots$, $B_\Gamma: \cdots \leqq B_{\lambda 2} \leqq B_{\mu 2} \leqq \cdots$,

分别为 A,B 既约理想子环套。令 $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,将 Ar_2, Br_2 分别加细为 A_r, $B_{\Gamma 2}$,则由理想子环套:$(AB)_r: \cdots \leqq A_\lambda B_\lambda \leqq A_\mu B_\mu \leqq \cdots$

可唯一确定 R 的一个 Fuzzy 理想,称为 Fuzzy 理想 A 与 B 的积,记为 AB。

其中:$(AB)_\lambda = A_\lambda B_\lambda = \{\sum_{i=1}^{p} a_i b_i \mid a_i \in A_\lambda, b_i \in B_\lambda, P \in N\}$.定义 3.2 设 A,B 是环 R 的 Fuzzy 理想,$\forall x \in R$,

$$(AB)(X) = \vee \{\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge B(z_i)) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x, P \in N\}。$$

则 AB 是 R 的 Fuzzy 理想,称为 Fuzzy 理想 A 与 B 的积。

我们先证明这两个定义的等价性。

定理 3.3 设 A,B 是环 R 的 Fuzzy 理想,依定义 3.1 确定了 R 的一个 Fuzzy 理想 AB,其既约理想子环套为

$$(AB)_\Gamma: \cdots \leqq A_\lambda B_\lambda \leqq A_\mu B_\mu \leqq \cdots,$$

则 $\forall x \in R$,设 $(AB)(x) = \{\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge B(Z_i) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i \mid = X, P \in N\}$。

证明:$\forall x \in R$,设 $(AB)(x) = \lambda$,则

$$X \in (AB)_\lambda = A_\lambda B_\lambda = \{\sum_{i=1}^{p} y_i z_i \mid y_i \in A_\lambda, z_i \in B_\lambda\}。$$

$\forall x = \sum_{i=1}^{p} y_i z_i$(不唯一),$y_i \in A_\lambda$, $z_i \in B_\lambda$,则 $A(y_i) \geqq \lambda$, $B(z_i) \geqq \lambda$,故

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge B(z_i) \geqq \lambda,$$

从而 $$\vee \{\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge B(Z_i))\} \geqq \lambda。 \quad (5)$$

但是,AB 是 R 的 Fuzzy 理想,从而 $\forall x = \sum_{i=1}^{p} y_i z_i$,

$$AB(x) = AB(\sum_{i=1}^{p} y_i z_i) \geqq \bigwedge_{1 \leq i \leq p} AB(y_i z_i) \geqq \bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge B(z_i)),$$

所以 $$(AB)(x) \geqq \vee \{\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i)\} \wedge (B(z_i))\} \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x, P \in N\},$$
(6)

由(5),(6)知,$(AB)(x) = \vee \{\bigwedge_{1 \leq i \leq p} (A(y_i) \wedge (B(z_i)) \mid \sum_{i=1}^{p} y_i z_i = x, P \in N\}$。

定义 3.4 设 P 是环 R 的 Fuzzy 理想,若对于 R 的任何 Fuzzy 理想 A,B,由 $AB \subseteq P$ 可以推出 $A \subseteq P$ 或 $B \subseteq P$,则称 P 为 R 的质 Fuzzy 理想。

定理 3.5 设 P 是 R 的质 Fuzzy 理想,P_Γ 是其既约子环套,则 $\forall \lambda \in \Gamma$, P_λ 是 R 的质理想子环。

证明:设 P 是 R 的 Fuzzy 质理想,则 $\forall \lambda \in \Gamma$, P_λ 是 R 的理想子环。设 A,B 是 R

的两个理想子环,当 $AB\subseteq P_\lambda$ 时,可定义:$\Gamma_1:\{0,\lambda,P(0)\}$,

$M_{\Gamma_1}:M_{p(0)}=\{0\}\leq M_\lambda=A\leq M_0=R;N_{\Gamma_1}:N_{p(0)}=\{0\}\leq N_\lambda=B\leq N_0=R$;

则由 M_{Γ_1},N_{r_1} 可确定两个 Fuzzy 理想 M,N,且有 $MN\subseteq P$。由于 P 是 R 的 Fuzzy 质理想,可以推出 $M\subseteq P$ 或 $N\subseteq P$,即有 $M_\lambda=A\subseteq P_\lambda$,或 $N_\lambda=B\subseteq P_\lambda$,所以,$P_\lambda$ 是 R 的质理想子环。

推论 3.6 设 P 是 R 的质 Fuzzy 理想,则 P 是 R 的 Fuzzy 强质理想,因而也是 P 是 R 的 Fuzzy 质理想。

定理 3.7 设 R 是环,P 是 R 的 Fuzzy 理想,则下述命题等价:

(1)P 是 R 的质 Fuzzy 理想;

(2)设 $a,b\in R$,若 $aRb\subseteq P_\lambda$,则 $a\in P_\lambda$ 或 $b\in P_\lambda$;并且,若 $a\notin P_\lambda$,则 $\forall\mu\in\Gamma$, $\forall x,y\in R$,由 $xRy\subseteq P_\lambda$,必定可以推出 $y\in P_\lambda$(P_Γ 是 P 的既约理想子环套);

(3)设 K_1,K_2 是 R 的 Fuzzy 右理想,如果 $K_1K_2\subseteq P$,则 $K_1\subseteq P$ 或 $K_2\subseteq P$;

(4)设 L_1,L_2 是 R 的 Fuzzy 左理想,如果 $L_1L_2\subseteq P$,则 $L_1\subseteq P$ 或 $L_2\subseteq P$;

证明:只证明(2)$\Rightarrow$(3):设 K_1,K_2 是 R 的 Fuzzy 右理想,$K_1K_2\subseteq P$,若 $K_1\not\subset P$,则存在 $a\in K_{1\lambda}$,$a\notin P_\lambda$,$\forall b\in K_{2\lambda}$,由于 $aRb\subseteq K_{1\lambda}K_{2\lambda}\subseteq P_\lambda$,故必有 $b\in p_\lambda$,即 $K_{2\lambda}\subseteq P_\lambda$;

$\forall\mu\in\Gamma$,设 $x\in K_{1\mu}$,$y\in K_{2\mu}$,则 $xRy\subseteq K_{1\mu}K_{2\mu}\subseteq P_\mu$,由(2)知,$y\in P_\mu$,即 $K2\mu\subseteq P_\mu$,从而,$K_2\subseteq P$.

定理 3.8 设 R 是环,P 是 R 的质 Fuzzy 理想,$P(0)=s<1$,则可取 m,使 $s<m\leq 1$.将 P 的理想子环套加细为

$\Gamma:0\leq t\leq\frac{t+s}{2}\leq s\leq m,P_\Gamma:R\geq P_t\geq P_t\geq P^0\geq\emptyset$,

设 $A_\Gamma:R\geq P_t\geq P_t\geq P^0\geq P^0,B_\Gamma:R\geq R\geq R\geq R\geq\emptyset\geq\emptyset$,

则 A_Γ,B_Γ 各确定了一个 Fuzzy 理想 A,B,且 $AB\subseteq P$,但是 $B_t\not\subset P_t$,从而 $B\not\subset P$,而 $A_m\not\subset P_m$,从而 $A\not\subset P$,遂生矛盾,故 $s=1$,即 $P(0)=1$.

定理 3.9 环 R 的 Fuzzy 理想 P 是质 Fuzzy 理想的充要条件是:零理想是 Fuzzy 商环 $\bar{R}=R/P$ 的质 Fuzzy 理想.

定理 10 设 N 是环 R 的 Fuzzy 理想,P 是 R 的质 Fuzzy 理想,则 $P\cap N$ 是 N 的质 Fuzzy 理想.

参考文献

[1] W.J.Liu, Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 8(1982)133-139.

[2] W.J.Liu, Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets and Systems 11(1983)31-41.

[3] C.Z.Luo, Countable nested sets, Fuzzy Systems and Mathematics 1(1991)(in Chinese).

[4] D.S.Malik, and J.N.Mordeson, Fuzzy Prime ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems 37(1990)93-

98
[5] T.K.Mukherjee and M.K.Sen, On fuzzy ideals of a ring I, Fuzzy sets and Systems 21(1987)99 - 104
[6] C.Zhang, The quotient ring and direct summation of a fuzzy subring, Fuzzy Systems and Mathematics 7 (1993)93 - 100(in Chinese).

注:本文(英文稿)发表在《Fuzzy Sets and Systems》(《模糊集与系统》国际模糊系统学会会刊)Volume:94, Issue:2, March 1, 1998,

先后被 SCI(美国科学引文)收录:YX358,

《Computer and ControlAbstract》(计算机与控制摘要)收录:1998 - 25731;

《Mathematical Review》(《数学评论》美国)收录:MR16W99;

《Zentralblatt Mathematics》(《数学文摘》德国)收录:Zbl 16024。

群作用与幂群

张诚一[1] 党平安[2]

(1 海南师范学院数学系 海口 海南 571158

2 河南省驻马店师专 河南 4630000)

摘要 本文讨论了有限群上幂群的运算性质,通过群 G^* 在幂群上的作用,给出了非空幂子集成幂群条件。

关键词 幂群,群作用,传递。

分类号 AMS (1991) 06F1520M10/CCL0152

集值映射的理论需要,引出了各种数学结构的提升问题。李洪兴教授等[1,2,]首先提出了幂群(XH-群)的概念,开创了超代数结构的研究,由此得到了一系列很有价值的成果。由于超代数中的运算基于底层代数的多个元素的运算,如何直观地表示这些运算过程,并把这些运算表示用于判断幂集的子集是否构成某种代数结构,是一个值得研究的问题[3]。本文研究了有限群上幂群的运算性质。通过群 G 在幂群上的作用,给出了非空幂子集成幂群的条件

§1 准备

设 G 是群,P(G)是 G 的幂集。在 $P_0G) := P(G) - \{\emptyset\}$ 中规定代数运算

$A \cdot B := \{ab \mid a \in A, b \in B\}$(将 $A \cdot B$ 简记为 AB),

则 $P_0(G)$关于此运算构成含单半群,如果一个非空幂子集$\mathcal{G} \subseteq P_0(G)$对上述运算成群,则称$\mathcal{G}$为 G 上的幂群,其单位元记为 E。并称 G 为$\mathcal{G}$的生成群。

设$\mathcal{G}$是 G 上幂群,若 $e \in E$ (e 是 G 中单位元),则称$\mathcal{G}$为正则幂群;设 $A \in \mathcal{G}$,A^{-1}为 A 的逆元,$A^{(-1)} := \{x^{-1} \mid x \in A\}$称为 A 的逆集;如果 $A \in \mathcal{G}$,恒有 $A^{(-1)} = A^{-1}$,则称$\mathcal{G}$为一致幂群。

令 $G := \bigcup \{A \mid A \in \mathcal{G}\}$,称 G 为$\mathcal{G}$的基元集。

设$\mathcal{G}$为 G 上幂群,我们有以下结论:

预理 1.1[2] $\forall A \in \mathcal{G}, |A| = |E|$。(|A|是 A 的势。)

预理 1.2[2] $\forall A, B \in \mathcal{G}, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow |A \cap B| = |E|$.

预理 1.3[4] $\mathscr{G}$为一致幂群$\Leftrightarrow E \trianglelefteq G$.

设 G 是有限群,$\mathscr{G}$是 G 上的幂群,则以下结论成立:

命题 1.4 $E \leqslant G$;

这样,有限群上的幂群是正则幂群和一致幂群。

命题 1.5 $G \leqslant G$;

命题 1.6 $\forall A \in \mathscr{G}, \forall a \in A, aE = Ea = A$,即 $E \lhd G^*$;

命题 1.7 $\forall A, B \in \mathscr{G}, A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A = B$;

命题 1.8 若 $aE = bE$,则 $a, b \in A \in \mathscr{G}$;

命题 1.9 $tA = At = A \quad \Leftrightarrow t \in E$;

命题 1.10 $\forall\ A, B \in \mathscr{G}$,若 $AB = C$,则 $\forall a \in A, aB = C$;

命题 1.11 若 $A = aE$,则 $A^{-1} = a^{-1}E$;

命题 1.12 设 $B \in \mathscr{G}, \forall a \in A \in \mathscr{G}, xB = aB \quad \Leftrightarrow x \in A$;

命题 1.13 $\mathscr{G} = G^* / E$;

命题 1.14 $G^* = G \Leftrightarrow \quad \mathscr{G} = G/E$.

§2 群作用与非空幂集作成幂群的条件

定义 2.1 设 G 是一个群,X 是一个非空集合,如果存在映射 $G \times X \to X$,使得 $(a, x) \to a(x)$满足:

(1) $e(x) = x, \forall x \in X$,

(2) $ab(x) = a(b(x)), a, b \in G, x \in X$.

则称群 G 作用在集合 X 上.

设 G 是群,$\mathscr{G}$为 G 上的幂群,G^*为 G 的基元集,则 $G^* \leqslant G, e \in E \in \mathscr{G}$。

令 $G \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}, (a, A) \to a(A) = aA$.

则 (1) $eA = A, \forall A \in \mathscr{G}$;

(2) $(ab)A = a(bA), \forall A, b \in G^*, A \in \mathscr{G}$.

故群 G^* 作用在$\mathscr{G}$上。

$\forall a \in G^*$,定义 $\eta_a: \mathscr{G} \to \mathscr{G}, \eta_a(A) = aA, A \in \mathscr{G}$,由 $a^{-1}(aA) = a(a^{-1}A) = eA = A$ 知,η_a 是$\mathscr{G}$到$\mathscr{G}$的一一变换,从而 $\eta_a \in S(\mathscr{G})$ ($S(\mathscr{G})$是$\mathscr{G}$上的一一变换群)。又由$(ab)A = a(bA)$知,$\eta_{ab} = \eta_a \eta_b$,故

$\eta: G^* \to S(\mathscr{G}), \eta: a \to \eta_a$

是群 G^* 到一一变揣群 $S(\mathscr{G})$的一个同态。

反之,若给出 G^* 到 $S(\mathscr{G})$的一个同态 $\eta: G^* \to A(\mathscr{G})$通过定义 $a(A) = \eta_a(A) = aA \quad a \in G^*, A \in \mathscr{G}$ 可决定群 G^* 到$\mathscr{G}$上的作用。因此,我们把同态 η 的核 $\mathrm{Ker}\eta$ 称为群 G^* 在$\mathscr{G}$上作用的核。

当群 G^* 作用在 $\mathscr{G}$ 上时，规定

$A \sim B \Leftrightarrow$ 存在 $a \in G^*$，使得 $B = aA$

则"～"是 $\mathscr{G}$ 上的一个等价关系。以 A 为代表元的等价类记为 G^*A。

$G^*A := \{aA \mid a \in G^*, A \in \mathscr{G}\}$

称为 A 的 G^* – –轨道。

显然，$\mathscr{G} = \bigcup_{A \in \mathscr{G}} G^* A$。

如果 $G^*A = \{A\}$，称 A 为 G^* 的不动元素。

并记　$F(a) := \{A \in \mathscr{G} \mid aA = A\}$。

定义 2.2　如果 $\mathscr{G}$ 在 G 作用下只有一条轨道，即 $G^*A = \mathscr{G}$，则称 G^* 在 $\mathscr{G}$ 上的作用是传递的。

此外，对任意的 $A \in \mathscr{G}$，

令　$\mathrm{Stab}G^*A := \{a \in G^* \mid aA = A\}$

易证：　$\mathrm{Stab}G^*A \leqslant G^*$，称为 A 的稳定子群。

引理 2.1[7]　$|\mathrm{Stab}G^*A||G^*A| = |G^*|$.

引理 2.2[7]（Burnside 引理）设 t 为 G^* 作用于 $\mathscr{G}$ 上的轨道数，则

$$t \cdot |G^*| = \sum_{a \in G^*} |F(a)|.$$

当 G^* 在 $\mathscr{G}$ 上的作用是传递的，即 $t = 1$ 时，上式就变成了：

$$|G^*| = \sum_{a \in G^*} |F(a)|。$$

定理 2.3　设 $\mathscr{G}$ 是 G 上的幂群，且 $G^* < G$，则群 G^* 在 $\mathscr{G}$ 上作用的核 $\ker\eta = E$。

证明：设 $\eta: G^* \to S(\mathscr{G})$，$\eta: a \to \eta_a$ 是群同态。$\forall A \in \mathscr{G}$，$\eta_a(A) = aA$，则 $\forall a \in \ker\eta$，$\eta_a = 1$（1 是恒等变换），$\eta_a(A) = 1(A) = A = aA \Rightarrow a \in E$。

反过来，$\forall a \in E$，$\forall A \in \mathscr{G}$，$\eta_a(A) = aA = A = 1(A)$，$\eta_a = 1$，$a \in \ker\eta$.

$\therefore \ker\eta = E$。

定理 2.4　设 G 是有限群，$\mathscr{G}$ 是 G 上非空幂子集，$G^* = \bigcup\{A \mid A \in \mathscr{G}\}$，则 $\mathscr{G}$ 是 G 上幂群的充要条件是：

(1)$G^* \leqslant G$;

(2)存在 $E \in \mathscr{G}$，$E \lhd G^*$；

(3)G^* 在 $\mathscr{G}$ 上的作用是传递的。

证明："必要性"：如果 $\mathscr{G}$ 是 G 上的幂群，由命题 1.5，1。6 知，$G^* \leqslant G$，设 E 是 $\mathscr{G}$ 中单位元，则 $E \lhd G^*$。

$\forall a \in G^*$，$\forall a \in \mathscr{G}$，定义 $(a, A) \to aA$，则 G^* 作用在 $\mathscr{G}$ 上。