实分析与泛函分析习题详解

Detailed Solutions to Selected Problems in Real and Functional Analysis

肖建中 朱杏华 编著

清华大学出版社

实分析与泛函分析习题详解

Detailed Solutions to Selected Problems in Real and Functional Analysis

肖建中 朱杏华 编著

清华大学出版社
北 京

前　言

本书包含了肖建中教授与李刚教授编著的《抽象分析基础》(清华大学出版社,2009)一书中全部206道习题的完整解答,同时又精心增选了158道较难的经典习题(附加题),提供了详细解答.习题与附加题的内容涉及点集拓扑与抽象测度、Lebesgue积分、线性算子的基本定理、抽象空间的几何理论、不动点理论、Banach代数与谱理论、向量值函数与算子半群、无界算子理论等,覆盖了实分析与泛函分析的主要内容,并适当有所扩展.与《抽象分析基础》一书相同,本书共分为9章.为了方便读者,在每章开头的"内容提要"中详细列出了每一章的主要知识点.

本书的习题除少量由作者编拟外,大部分取自国内外名著.习题按作用与功能大体上可分为三类.其一是基础性问题,涉及基本概念与基本理论的理解,其中有的问题往往是教材中相关内容的补充、深化与发掘;其二是应用性问题,涉及技巧与方法的锤炼;其三是提高与发展性问题,这类问题中蕴涵了从事本学科研究的新思路,富有启发性,容易从中产生解决类似问题的想法.

学数学从某种程度上说也是做数学.对数学工作者而言,无论是学习还是研究,保持对数学问题的浓厚兴趣最重要.在数学学习中不断尝试解题,屡遭挫折是正常的,有时虽未获得解决,但尝试解题过程本身加深了对基本概念与基本理论的理解,是功不可没的正确途径.当你历经山重水复,领略柳暗花明,你会为你的知识的增长和思维能力的提高感到欣慰,收获难以言传的愉悦.本书给出的解答较为细致,但只对那些合理使用的人才真正有益,经过努力解题之后再查看解答,也许才真正有收效.如果本书能帮助读者开拓思路,在解题过程中起到路标作用,有所引导与启发,则作者的愿望就实现了.每一个不同于本书的正确解答都应得到鼓励与欣赏!

题解不可避免要引用原书的结果,考虑到没有原书的使用者的需要,本书写作中尽量引用已命名的基础性结果,将原书的引用限制在少量的范围内.本书中的错漏在所难免,所做的解答也未必是最好的,作者谨向提出建议与指正者致以诚挚的谢意.

在本书编写过程中，作者的研究生刘勤凤、仓曰华、曹银芳、沈志默等以及南京信息工程大学应用数学专业2009级全体研究生参与了原始稿的录入工作，作者对他们付出的辛勤劳动一并表示衷心的感谢.

作者特别感谢清华大学出版社对本书的出版所给予的支持与帮助，感谢石磊先生付出的辛劳!

肖建中　朱杏华

2011年3月于南京信息工程大学

目　录

第 1 章　拓扑与测度

内容提要

映射的延拓(扩张)与限制,映射的图像;集的基数,特征函数,可数集与不可数集;Bernstein 基数比较定理,Cantor 无最大基数定理;积集,商集,扩充实数集,极限集;偏序集,Zermelo 选择公理,Zorn 引理,Hausdorff 极大定理.

拓扑空间,拓扑基,邻域系,邻域基,内部,闭包;相对拓扑与积拓扑;网与 Moore-Smith 极限;拓扑空间上的连续映射;可数性公理及分离性公理,正规空间的 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理;紧性与有限交性质;连通性,道路连通性,连通分支;紧空间与连通空间上的连续映射;局部紧 Hausdorff 空间的 Urysohn 引理与 Tietze 扩张定理.

可测空间,σ-代数,Borel 代数,单调类;可测空间上的可测映射与 Borel 映射;实(复)值函数二元运算与极限运算的可测性,简单可测函数列的作用;测度的基本性质;计数测度与 Dirac 测度;概率测度与 σ-有限测度;测度的正则性;零测集与测度空间的完备化定理;Lebesgue 测度的刻画;Cantor 集的作用;不可测集的存在性定理.

习题 1.1～1.19

习题 1.1　验证 1.1 节中的关系式(M1)～(M5). 其中

(M1) $A\neq\varnothing\Rightarrow f(A)\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing\nRightarrow f^{-1}(B)\neq\varnothing$;

(M2) $f(f^{-1}(B))\subset B$, $f^{-1}(f(A))\supset A$;

(M3) $f\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$, $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$;

(M4) $f\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\subset\bigcap_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$, $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$;

(M5) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$, $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.

证明　(M1) (1) 取 $a\in A$,由映射的定义,$\exists b\in Y$ 使 $b=f(a)$,即 $b\in f(A)$,$f(A)\neq\varnothing$.

(2) 考虑反例：$X=Y=\mathbb{R}^1$，$f(x)=1$，$\forall x\in\mathbb{R}^1$. 若 $B=[2,3]$，则 $f^{-1}(B)=\varnothing$.

(M2) (1) 因为 $\forall b\in f(f^{-1}(B))$，有 $a\in f^{-1}(B)$，使 $b=f(a)$，由 $a\in f^{-1}(B)$ 可知 $\exists b_0\in B$ 使 $f(a)=b_0$，由 f 是映射得出 $b=b_0\in B$，故 $f(f^{-1}(B))\subset B$.

(2) 因为 $\forall a\in A$，$\exists b\in Y$ 使 $f(a)=b$，由此得出 $b\in f(A)$，故 $a\in f^{-1}(f(A))$. 这表明 $f^{-1}(f(A))\supset A$.

(M3) (1) 设 $b\in f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则 $\exists x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 使 $b=f(x)$. 于是 $\exists\alpha_0\in I$ 使 $x\in A_{\alpha_0}$. 这表明 $b\in f(A_{\alpha_0})\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$. 因此 $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$. 反之，设 $b\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$，则 $\exists\alpha_0\in I$ 使 $b\in f(A_{\alpha_0})$. 从而 $\exists x\in A_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 使 $b=f(x)$. 这表明 $b\in f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$. 因此 $f(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\supset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(2) 设 $x\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$，则 $\exists b\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$ 使 $b=f(x)$. 于是 $\exists\alpha_0\in I$ 使 $b\in B_{\alpha_0}$，这表明 $x\in f^{-1}(B_{\alpha_0})\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. 因此 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. 反之，设 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$，则 $\exists\alpha_0\in I$ 使 $x\in f^{-1}(B_{\alpha_0})$. 于是 $\exists b\in B_{\alpha_0}\subset\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$ 使 $f(x)=b$. 这表明 $x\in f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$. 因此 $f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)\supset\bigcup\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$.

(M4) (1) 设 $y\in f(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)$，则 $\exists x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 使 $y=f(x)$. 于是 $\forall\alpha\in I$ 有 $x\in A_\alpha$，从而有 $y\in f(A_\alpha)$. 这表明 $y\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$. 因此 $f(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f(A_\alpha)$.

(2) 设 $x\in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$，则 $\exists b\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$ 使 $f(x)=b$. 于是 $\forall\alpha\in I$ 有 $b\in B_\alpha$，从而有 $x\in f^{-1}(B_\alpha)$. 这表明 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. 因此 $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)\subset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. 反之，设 $x\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$. 则 $\forall\alpha\in I$，有 $x\in f^{-1}(B_\alpha)$. 从而有 $f(x)\in B_\alpha$，这表明 $f(x)\in\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha$，即 $x\in f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)$. 因此 $f^{-1}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}B_\alpha)\supset\bigcap\limits_{\alpha\in I}f^{-1}(B_\alpha)$.

(M5) (2)因为 $x\in f^{-1}(B^c)\Leftrightarrow f(x)\in B^c\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)\Leftrightarrow x\in[f^{-1}(B)]^c$，故 $f^{-1}(B^c)=[f^{-1}(B)]^c$.

(1) 由(M4)第二式与(M5)第二式得

$$f^{-1}(B_1\backslash B_2)=f^{-1}[B_1\cap B_2^c]=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2^c)$$

$$=f^{-1}(B_1)\cap[f^{-1}(B_2)]^c=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2).$$

习题 1.2 设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是$[-\infty,\infty]$内的序列，证明下列结论：

(1) 若对所有的 n，$a_n\leqslant b_n$，则$\liminf\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\liminf\limits_{n\to\infty}b_n$.

(2) 若$\limsup\limits_{n\to\infty}a_n+\limsup\limits_{n\to\infty}b_n$ 不会出现$\infty-\infty$的情况，则

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)\leqslant\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n.$$

证明 (1) 因为$\forall n$有 $a_n\leqslant b_n$，故$\inf\limits_{n\geqslant k}a_n\leqslant\inf\limits_{n\geqslant k}b_n$，从而

$$\liminf_{n\to\infty}a_n=\sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}a_n\leqslant\sup_{k\geqslant 1}\inf_{n\geqslant k}b_n=\liminf_{n\to\infty}b_n.$$

(2) 由于$\forall m\geqslant k$ 都有 $a_m\leqslant\sup\limits_{n\geqslant k}a_n$，$b_m\leqslant\sup\limits_{n\geqslant k}b_n$，和式中不会出现$\infty-\infty$形式，故$\forall m\geqslant k$，有 $a_m+b_m\leqslant\sup\limits_{n\geqslant k}a_n+\sup\limits_{n\geqslant k}b_n$，从而

$$\sup_{n\geqslant k}(a_n+b_n)=\sup_{m\geqslant k}(a_m+b_m)\leqslant\sup_{n\geqslant k}a_n+\sup_{n\geqslant k}b_n.$$

由于$\sup\limits_{n\geqslant k}a_n$，$\sup\limits_{n\geqslant k}b_n$，$\sup\limits_{n\geqslant k}(a_n+b_n)$关于 k 都是递减的，故

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n)&=\inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}(a_n+b_n)=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}(a_n+b_n)\\&\leqslant\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}a_n+\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}b_n=\inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}a_n+\inf_{k\geqslant 1}\sup_{n\geqslant k}b_n\\&=\limsup_{n\to\infty}a_n+\limsup_{n\to\infty}b_n.\end{aligned}$$

习题 1.3 设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}(n\geqslant 2)$，$\tau=\{X,\varnothing,\{a_1\}\}$. 证明：

(1) τ 是 X 上的一个拓扑.

(2) $\overline{\{a_1\}}=X$.

证明 (1) 显然 $X,\varnothing\in\tau$，教材上拓扑定义中的(TO1)成立.

设 $A,B\in\tau$，若 A,B 中有一个为$\varnothing$，不妨设 $A=\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing\in\tau$，$A\cup B=B\in\tau$；若 $A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，不妨设 $A=X$，$B=\{a_1\}$，则 $A\cap B=\{a_1\}\in\tau$，$A\cup B=X\in\tau$，于是(TO2)与(TO3)成立. 因此 τ 是 X 上的一个拓扑.

(2) X 中一切闭集的族为$\mathcal{F}=\{X,\varnothing,\{a_2,\cdots,a_n\}\}$. 因为$\overline{\{a_1\}}$是含 a_1 的最小闭集，而$\mathcal{F}$中含 a_1 的闭集只有 X，故$\overline{\{a_1\}}=X$.

习题 1.4 设 τ_1，τ_2 是 X 上的两个拓扑，I 是 X 上的恒等映射. 证明 $I:(X,\tau_1)\to(X,\tau_2)$连续当且仅当 $\tau_2\subset\tau_1$.

证明 注意映射连续等价于每个开集的逆像是开集. 设 I 连续，$V\in\tau_2$. 则 $V=I^{-1}(V)\in\tau_1$. 因此 $\tau_2\subset\tau_1$. 反之，设 $\tau_2\subset\tau_1$，则 $\forall V\in\tau_2$，由 $I^{-1}(V)=V\in\tau_1$ 可知 I 连续.

习题 1.5 设 X,Y 为拓扑空间，证明 $T:X\to Y$ 连续当且仅当对 Y 的每个闭集 A，$T^{-1}(A)$是 X 的闭集.

证明 记 X,Y 上的拓扑分别为 τ_X,τ_Y.

充分性 设 $B\in\tau_Y$,则令 $A=B^c$,A 是闭集,有 $T^{-1}(A)$是闭集. 于是 $T^{-1}(B)=T^{-1}(A^c)=[T^{-1}(A)]^c\in\tau_X$,这表明 T 连续.

必要性 设 T 连续, A 是闭集, 则 $A^c\in\tau_Y$, 从而$[T^{-1}(A)]^c=T^{-1}(A^c)\in\tau_X$. 这表明 $T^{-1}(A)$是 X 的闭集.

习题 1.6 设 X 为拓扑空间, $f:X\to\mathbb{R}^1$ 连续. 证明 $A=\{x\in X:f(x)=0\}$是 X 的闭集.

证明 因为 $A=f^{-1}(\{0\})$,$\{0\}$是$\mathbb{R}^1$中的闭集, f 连续, 故由习题 1.5 可知 A 是 X 的闭集.

习题 1.7 证明:(1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射.

(2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射.

证明 (1) 设 $f:X\to Y$,其中 X 是任意的拓扑空间, Y 是平庸空间, Y 上的拓扑为 $\tau_Y=\{Y,\varnothing\}$. 显然 $f^{-1}(Y)=X,f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$都是 X 中的开集, 故 f 是连续的.

(2) 设 $f:X\to Y$,其中 X,Y 上的拓扑分别记为 τ_X,τ_Y. 由题设 $\tau_X=2^X$,即 X 的一切子集的族, 故对任意 $V\in\tau_Y$,总有 $f^{-1}(V)\in 2^X=\tau_X$. 因此 f 是连续的.

习题 1.8 设拓扑空间$(X;\tau)$满足第二可数公理. 证明从 X 的任意开覆盖中可选出由可数个集构成的子覆盖.

证明 设 $\mathfrak{B}$ 为 X 的拓扑基,$\mathfrak{B}$ 的元素可数,则 $\mathfrak{B}\subset\tau$. 设$\mathcal{A}$为 X 的任一开覆盖, 即$\mathcal{A}\subset\tau$,且$\bigcup\mathcal{A}=X$. 则 $\forall x\in X$,有 $G_x\in\mathcal{A}$使 $x\in G_x$. 因为 $\mathfrak{B}$ 为拓扑基,故有 $B_x\in\mathfrak{B}$ 使 $x\in B_x\subset G_x$. 这表明$\bigcup\{B_x:x\in X\}=X$. 但$\{B_x:x\in X\}\subset\mathfrak{B}$. 故$\{B_x:x\in X\}$可数. 于是$\{B_x:x\in X\}$可按可数指标集 Λ 标出来,即$\{B_x:x\in X\}=\{B_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$. 对每个 $\lambda\in\Lambda$, 选 $G_\lambda\in\mathcal{A}$使 $B_\lambda\subset G_\lambda$. 于是

$$X=\bigcup\{B_\lambda:\lambda\in\Lambda\}\subset\bigcup\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\},$$

即$\{G_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$是 X 的覆盖,且是$\mathcal{A}$的由可数个元构成的子集.

习题 1.9 设 A,B 为拓扑空间(X,τ)中紧集, 证明 $A\cup B$ 是紧集.

证明 设$\mathcal{F}$为 $A\cup B$ 的任一开覆盖,则$\mathcal{F}$分别是 A,B 的开覆盖. 由于 A,B 都是紧集,故 $\exists F_1,F_2,\cdots,F_n\in\mathcal{F}$使 $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}F_i$, 且 $\exists F_1',F_2',\cdots,F_m'\in\mathcal{F}$使 $B\subset\bigcup_{j=1}^{m}F_j'$, 于是

$$A\cup B\subset\left(\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{m}F_j'\right),$$

即$\mathcal{F}$的有限子集$\{F_1,F_2,\cdots,F_n,F_1',F_2',\cdots,F_m'\}$覆盖 $A\cup B$. 因此 $A\cup B$ 是紧集.

习题 1.10 设 X 为拓扑空间，$x\in X$，令 A_x 为 X 中含 x 的一切连通子集之并，证明 A_x 为 X 的连通分支．并证明 X 的任一非空连通子集必含于唯一的一个连通分支中，从而 X 可分解为若干个互不相交的连通分支的并集．

证明 设$\mathcal{F}=\{F_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$为含 x 的连通集的族．由题设，$A_x=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}F_\lambda$．先证 A_x 连通．假设 $A_x=B\cup C$，B 与 C 是隔离的．因 $B\cap C=\varnothing$，故不妨设 $x\in B$，$x\notin C$．因 $\forall\lambda\in\Lambda$，$F_\lambda\subset B\cup C$，故 $F_\lambda=(F_\lambda\cap B)\cup(F_\lambda\cap C)$．注意 $F_\lambda\cap B$ 与 $F_\lambda\cap C$ 是隔离的，而 F_λ 是连通集，于是有 $F_\lambda\cap B=\varnothing$或 $F_\lambda\cap C=\varnothing$．由于 $x\in F_\lambda$，$x\in B$，故 $F_\lambda\cap B=F_\lambda$，$F_\lambda\cap C=\varnothing$．即 $\forall\lambda\in\Lambda$，有 $F_\lambda\subset B$．由此得出 $C=\varnothing$．所以 A_x 是连通的．现设 $A_x\subset D$，D 是连通的．因为 $x\in D$，故 $D\in\mathcal{F}$，从而有 $A_x=D$，这表明 A_x 是 X 的连通分支．

考察 $\beta=\{A_x:x\in X\}$．β 必是 X 上的一切连通分支的族．事实上，若 D 是 X 的连通分支，则 D 必含 X 的某点 y，故有 $D\subset A_y$，又由于 D 是连通分支，故 $D=A_y$．β 中不同的集必不相交．事实上，若 $A_p\cap A_q\neq\varnothing$，设 $z\in A_p\cap A_q$，则因 A_p 与 A_q 都是含点 z 的连通集，故 $A_p\subset A_z$，$A_q\subset A_z$．注意到 A_p，A_q 都是连通分支，故必有 $A_p=A_z=A_q$．这表明 X 的任一非空连通集含于 β 中的唯一的元，从而 X 可分解成互不相交的连通集的并集．

习题 1.11 设 X 是一个不可数集，$\mathfrak{M}$ 是 X 中所有使 E 或 E^c 至多是可列的子集 E 所作成的集族．若 E 至多可列，定义 $\mu(E)=0$；若 E^c 至多可列，定义 $\mu(E)=1$．证明 $\mathfrak{M}$ 是 X 上的 σ-代数，μ 是 $\mathfrak{M}$ 上的一个测度．

证明 由题设，$\mathfrak{M}=\{E:E$ 至多可数或 E^c 至少可数$\}$．

(ME1) 因 $X^c=\varnothing$为至多可数集，故 $X\in\mathfrak{M}$．

(ME2) 设 $A\in\mathfrak{M}$，则 A 至多可数或 A^c 至多可数，即$(A^c)^c$ 至多可数或 A^c 至多可数，故 $A^c\in\mathfrak{M}$．

(ME3) 设 $A_i\in\mathfrak{M}(i=1,2,\cdots)$，则 $\forall i$，A_i 或 A_i^c 为至多可数的．考查 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，若 $\forall i$，A_i 都是至多可数的，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为至多可数的．若 $\exists i_0$ 使 A_{i_0} 不可数，则 $A_{i_0}^c$ 必至多可数，于是 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i^c\subset A_{i_0}^c$，故 $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)^c$ 为至多可数的．总之有 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathfrak{M}$，因此 $\mathfrak{M}$ 是 σ-代数．

显然 μ 是 $\mathfrak{M}$ 上的函数，且 $\mu(X)=1<\infty$．设$\{A_n\}$是 $\mathfrak{M}$ 中互不相交的可数元的族，若 $\forall n$，A_n 都是至多可数的，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是至多可数的，$\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0=$

$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. 若 $\exists n_0$ 使 A_{n_0} 不可数，则 $A_{n_0}^c$ 至多可数. 因 $\forall n$，当 $n\neq n_0$ 时有 $A_n\cap A_{n_0}=\varnothing$，故 $A_n\subset A_{n_0}^c$，即当 $n\neq n_0$ 时，A_n 至多可数. 于是 $\mu(A_n)=0(n\neq n_0)$，$\mu(A_{n_0})=1$，由 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\supset A_{n_0}$ 知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ 不可数，故 $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=1=\mu(A_{n_0})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$. 因此 μ 是一个测度.

习题 1.12 是否存在一个仅具有可数个元素的无限 σ-代数？

解 不存在. 下面给出具体证明.

方法 1 (1) 设 $\mathfrak{M}$ 是 X 上的无限 σ-代数，则存在 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}$ 满足对每个 n，$B_n\neq\varnothing$，$B_{n+1}\subset B_n$，$B_{n+1}\neq B_n$. 事实上，取 $B_1=X\in\mathfrak{M}$，显然 $\{B_1\cap B: B\in\mathfrak{M}\}$ 有无限多元素. 假设 $B_n\in\mathfrak{M}$ 已取出，并使 $\{B_n\cap B:B\in\mathfrak{M}\}$ 有无限多元素. 取 $D\in\mathfrak{M}$ 使得 $B_n\cap D\neq\varnothing$ 且 $B_n\cap D\neq B_n$. 由

$$B_n\cap B=[(B_n\cap D)\cap B]\cup[(B_n\backslash D)\cap B]$$

可知或者 $\{(B_n\cap D)\cap B:B\in M\}$ 有无限多元素，或者 $\{(B_n\backslash D)\cap B:B\in\mathfrak{M}\}$ 有无限多元素，二者必居其一. 若是前者，则令 $B_{n+1}=B_n\cap D$；若是后者，则令 $B_{n+1}=B_n\backslash D$. 于是按数学归纳法得到 $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}$：$B_n\neq\varnothing$，$B_{n+1}\subset B_n$，$B_{n+1}\neq B_n$.

(2) 证明 $\mathfrak{M}$ 的元素必不可数. 令 $A_n=B_n\backslash B_{n+1}$，则 $A_n\in\mathfrak{M}$. 于是 $\mathfrak{M}$ 中含有互不相交的非空集的序列 $\{A_n\}$. 对正整数集 $\mathbb{Z}^+$ 的任一子集 N，令 $A_N=\bigcup_{n\in N}A_n$，则 $A_N\in\mathfrak{M}$. 注意到当 $N_1\neq N_2$，有 $A_{N_1}\neq A_{N_2}$. 于是 $\{A_N:N\in 2^{\mathbb{Z}^+}\}$ 的元素不可数，从而 $\mathfrak{M}$ 的元素必不可数.

方法 2 假设 $\mathfrak{M}$ 是 X 上的仅具有可数个元素的无限 σ-代数，$\mathfrak{M}=\{A_n\}$. 于是 X 必是无限集. 设 X_0 为 X 的可列子集，令 2^{X_0} 表示 X_0 的一切子集构成的集族，则 2^{X_0} 是不可数的. 因 X_0 与 $\mathfrak{M}$ 都是可列的，故存在从 X_0 到 $\mathfrak{M}$ 的既单且满的映射 f，$\forall x\in X_0$，记 $f(x)=A_x$，$A_x\in\mathfrak{M}$. 则 $\forall B_1,B_2\in 2^{X_0}$，当 $B_1\neq B_2$ 时必有 $f(B_1)\neq f(B_2)$（此时 $(B_1\backslash B_2)\cup(B_2\backslash B_1)\neq\varnothing$，不妨设 $B_1\backslash B_2\neq\varnothing$，取 $b_1\in B_1\backslash B_2$. 若 $f(B_1)=f(B_2)$，则 $\exists b_2\in B_2$ 使 $f(b_1)=f(b_2)$，由此得出 $b_1=b_2$，矛盾）. 故 $\{f(B):B\in 2^{X_0}\}$ 与 2^{X_0} 等基数，从而也是不可数的. $\forall B\in 2^{X_0}$ 有

$$f(B)=f(\bigcup_{x\in B}\{x\})=\bigcup_{x\in B}f(x)=\bigcup_{x\in B}A_x.$$

由于 B 至多可数，故 $f(B)\in\mathfrak{M}$. 这样 $\{f(B):B\in 2^{X_0}\}\subset\mathfrak{M}$，$\mathfrak{M}$ 必不可数，矛盾.

习题 1.13 找出一个 X 上的单调类 β 的例子，使 $X,\varnothing\in\beta$，但 β 不是 σ-代数.

解 例子 1 $X=\{a_1,a_2\}$，则 $\beta=\{\varnothing,\{a_1\},X\}$ 是单调类而不是 σ-代数. 因为

$\{a_1\}^c \notin \beta$.

例子 2　$X=\mathbb{R}^1$, $\beta=\{(-\infty,a),(-\infty,a],(-\infty,\infty),\varnothing: a\in\mathbb{R}^1\}$，则 β 是单调类而不是 σ-代数. 因为 $\{a\}=(-\infty,a]\setminus(-\infty,a)\notin\beta$.

习题 1.14　设 f 是可测空间 X 上的实函数，使对每个有理数 r，$\{x: f(x)\geqslant r\}$ 是可测的，证明 f 是可测的.

证明　$\forall \alpha\in\mathbb{R}^1$，取有理数列 $\{r_n\}$ 使 $r_n>\alpha$，$r_n\to\alpha(n\to\infty)$，则 $(\alpha,\infty]=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[r_n,\infty]$. 由题设，对 $\forall n$，$f^{-1}([r_n,\infty])=\{x: f(x)\geqslant r_n\}$ 是可测集，故 $f^{-1}((\alpha,\infty])=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}([r_n,\infty])$ 是可测集. 利用本章定理 1.3.11 可得 f 是可测的.

习题 1.15　设 $f: X\to[-\infty,\infty]$ 与 $g: X\to[-\infty,\infty]$ 是可测函数，证明 $\{x: f(x)<g(x)\}$ 与 $\{x: f(x)=g(x)\}$ 都是可测集.

证明　令 $h(x)=g(x)-f(x)$. 由于 f,g 可测，故 h 可测. 又因为

$$\{x: f(x)<g(x)\}=\{x: h(x)>0\}=h^{-1}((0,\infty]),$$
$$\{x: f(x)=g(x)\}=\{x: h(x)=0\}=h^{-1}(\{0\}),$$

$(0,\infty]$ 是 $[-\infty,\infty]$ 中的开集，$\{0\}$ 是 $[-\infty,\infty]$ 中的闭集. 故由可测函数的定义，$h^{-1}((0,\infty])$ 与 $h^{-1}(\{0\})$ 都是可测的，结论成立.

习题 1.16　证明实可测函数序列的收敛点集（极限值是有限的）是可测集.

证明　设 $\{f_n(x)\}$ 是 X 上的实可测函数列，令

$$g(x)=\liminf_{n\to\infty} f_n(x),\quad h(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

则由本章定理 1.3.14 及其推论可知 g,h 都是 X 上的可测函数. 令 $E=\{x\in X: g(x)=h(x)\in(-\infty,\infty)\}$，则 E 为 $\{f_n(x)\}$ 的收敛点集（极限值是有限的），记 $p(x)=h(x)-g(x)$，则 p 是可测函数. 因为 $\{0\}$ 是 $[-\infty,\infty]$ 中的闭集，故 $E=\{x\in X: p(x)=0\}=p^{-1}(\{0\})$ 是可测的.

习题 1.17　设 μ 是紧 Hausdorff 空间 X 上的一个正则 Borel 测度，假定 $\mu(X)=1$. 证明存在一个紧集 $K\subset X$ 使得 $\mu(K)=1$，但对 K 的每个紧的真子集 H 有 $\mu(H)<1$.

证明　令 $\mathfrak{B}=\{K_\alpha: \mu(K_\alpha)=1, K_\alpha$ 是 X 中的紧集$\}$，因为 $X\in\mathfrak{B}$，$\mathfrak{B}\neq\varnothing$. 令 $K=\bigcap\limits_{\alpha}K_\alpha$，则 K 是紧集. 下面证明 $\mu(K)=1$. 对任意开集 $V\supset K$，先证明 $\mu(V)=1$. 事实上，因 $\bigcup\limits_{\alpha}K_\alpha^c\supset V^c$，$V^c$ 是紧 Hausdorff 空间 X 的闭子集，故 V^c 是紧的. 因为 $\{K_\alpha^c\}$ 是 V^c 的开覆盖，故存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}K_{\alpha_i}^c\supset V^c$. 因为 $\mu(V^c)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(K_{\alpha_i}^c)$

$=0$，故 $\mu(V)=1$. 因为 μ 正则，故由 $\mu(K)=\inf\{\mu(V):V\supset K, V$ 为开集$\}$可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists V\supset K$，使 $\mu(V)-\varepsilon<\mu(K)$. 由 $\mu(V)=1$ 得 $\mu(K)=1$.

再证对 K 的每个紧的真子集 H，$\mu(H)<1$. 用反证法. 若 $\mu(H)=1$，则因 H 是 X 中紧集，故有 $H\in\mathfrak{B}$. 由此得出 $H=K$，与 H 是 K 的真子集矛盾. 从而必有 $\mu(H)<1$.

习题 1.18 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$\partial E=\bar{E}\setminus E^\circ$ 是 E 的边界. 证明当 $m(\partial E)=0$ 时 E 是 Lebesgue 可测集.

证明 因为 $\bar{E}$ 为闭集，E°为开集，故 $\bar{E}$ 与 E°都是 Lebesgue 可测的，且 $E^\circ\subset E\subset\bar{E}$. 当 $m(\partial E)=0$ 时，因为 $m(\bar{E}\setminus E^\circ)=m(\partial E)=0$，即 $m(\bar{E})=m(E^\circ)$，故由 Lebesgue 测度的完备性可得 E 是 Lebesgue 可测集，且 $m(\bar{E})=m(E)=m(E^\circ)$.

习题 1.19 设 f 是$\mathbb{R}^n$上的实值 Lebesgue 可测函数，证明存在 Borel 可测函数 g 和 h，使得 $g(x)=h(x)$ a. e. $[m]$且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，$\forall x\in\mathbb{R}^n$.

证明 不妨设 f 是非负的，否则考虑 f^+，f^-. 先设 $f=\chi_E$，由 E 是$\mathbb{R}^n$上的 Lebesgue 可测集可知，存在 Borel 集 A 与 B 使 $A\subset E\subset B$；令 $G=E\setminus A$，$H=B\setminus E$，故有 $m(G)=m(H)=0$(定理 1.3.19 推论). 令 $g=\chi_A$，$h=\chi_B$，则

$$g=f=h \text{ a. e.} \quad 且 \quad g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x).$$

因此结论当 f 是可测集 E 上的特征函数时成立. 从而结论当 f 是可测的非负简单函数时也成立. 现设 f 是$\mathbb{R}^n$上的非负的 Lebesgue 可测函数. 则存在 Lebesgue 可测的非负简单函数的递增序列$\{s_n\}$使$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=f$. 因为对每个 s_n 存在 Borel 可测的简单函数 g_n 和 h_n 使 $g_n=s_n=h_n$ a. e.，且 $g_n(x)\leqslant s_n(x)\leqslant h_n(x)$. 令

$$g(x)=\limsup_{n\to\infty}g_n(x),\quad h(x)=\liminf_{n\to\infty}h_n(x),$$

则 g,h 是 Borel 可测的，$g=f=h$ a. e.，且 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$.

附加题 1.1～1.24

附加题 1.1 设 $f:\mathbb{R}^1\to\mathbb{R}^1$ 为任一函数. 证明集合

$$A=\{a\in\mathbb{R}^1:\lim_{x\to a}f(x)\ 存在，且\lim_{x\to a}f(x)\neq f(a)\}$$

是至多可列的.

证明 记 $\Gamma=\{(r,s):r,s\in\mathbb{Q}\}$，即 Γ 是以有理数为端点的开区间族. 则 Γ 是可数集. 对 $\forall r\in\mathbb{Q}$，记

$$A_r=\{a\in A:f(a)<r<\lim_{x\to a}f(x)\ 或\lim_{x\to a}f(x)<r<f(a)\}.$$

容易验证 $A=\bigcup\limits_{r\in\mathbb{Q}}A_r$. 以下只要证明每个 A_r 至多是可列的，从而便可知 A 是至多

可列的. 固定 $r\in\mathbb{Q}$，设 $a\in A_r$. 不失一般性，假设 $f(a)<r<\varliminf_{x\to a}f(x)$. 则存在 $\delta>0$，使当 $y\in(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 时有 $f(y)>r$. 取 $I_a\in\Gamma$ 使 $a\in I_a\subset(a-\delta,a+\delta)$. 则 $\forall y\in I_a\setminus\{a\}$ 有 $y\notin A_r$，因而有 $A_r\cap I_a=\{a\}$. 令映射 $F:A_r\to\Gamma$ 使 $F(a)=I_a$，由于 $\forall a\in A_r$，有 $A_r\cap I_a=\{a\}$，故 F 是单射. 从而由 Γ 至多可列推知 A_r 至多可列.

附加题 1.2 若 $(x,y)\in\mathbb{Q}^2$，则称点 (x,y) 为 $\mathbb{R}^2$ 中的**有理点**. 证明平面上存在不含有理点的圆周.

证明 假设任何圆周都含有理点，则对任意实数 $r\in(0,\infty)$，圆周

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2=r^2\}$$

含有理点 (x_r,y_r). 记 $A=\{(x_r,y_r):r\in(0,\infty)\}$，并令映射 $F:(0,\infty)\to A$ 使 $F(r)=(x_r,y_r)$. 若 $r,s\in(0,\infty)$，$r\neq s$，则 $(x_r,y_r)\neq(x_s,y_s)$，于是 F 是单射，从而由 $(0,\infty)$ 是不可数集推知 A 是不可数集. 这与 $A\subset\mathbb{Q}^2$，$\mathbb{Q}^2$ 可数相矛盾. 因此平面上存在不含有理点的圆周.

附加题 1.3 设 (X,τ_X)，(Y,τ_Y) 是拓扑空间. 证明 $f:X\to Y$ 连续当且仅当对 Y 的每个子集 B，$f^{-1}(B^\circ)\subset[f^{-1}(B)]^\circ$.

证明 设 f 连续且 $B\subset Y$. 因为 B° 是开集，故 $f^{-1}(B^\circ)$ 也是开集. 于是由 $B^\circ\subset B$ 得

$$f^{-1}(B^\circ)=[f^{-1}(B^\circ)]^\circ\subset[f^{-1}(B)]^\circ.$$

反之，设对 $\forall B\subset Y$，$f^{-1}(B^\circ)\subset[f^{-1}(B)]^\circ$. 若 $V\subset Y$，V 是开集，则

$$[f^{-1}(V)]^\circ\subset f^{-1}(V)=f^{-1}(V^\circ)\subset[f^{-1}(V)]^\circ,$$

这表明 $[f^{-1}(V)]^\circ=f^{-1}(V)$，即 $f^{-1}(V)$ 为开集，因此 f 连续.

附加题 1.4 设 X 是拓扑空间，$\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ 是 X 中任意子集族，其中指标集 Λ 非空. 设 A 与 B 是 X 的子集. 证明以下三个包含关系，并举例说明每个包含关系都不能改为等号.

(1) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$； (2) $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}$ (3) $\overline{A}\setminus\overline{B}\subset\overline{A\setminus B}$.

证明 (1) $\forall\lambda\in\Lambda$，由 $A_\lambda\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ 得 $\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}$，从而左边取并得

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}\subset\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}.$$

(2) $\forall\lambda\in\Lambda$，由 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset A_\lambda$ 得 $\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subset\overline{A_\lambda}$，从而右边取交得

$$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda}\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A_\lambda}.$$

(3) 设 $x\in\overline{A}\setminus\overline{B}$，则 $x\in\overline{A}$，$x\notin\overline{B}$. 以 $\mathcal{U}_x$ 记 x 的邻域系，并设 $U\in\mathcal{U}_x$ 是任意的. 则由 $x\notin\overline{B}$ 知 $\exists U_0\in\mathcal{U}_x$，$U_0\cap B=\varnothing$. 记 $U\cap U_0=U_1$，则 $U_1\in\mathcal{U}_x$ 且 $U_1\cap B=\varnothing$. 由 x

$\in\overline{A}$ 知 $U_1\cap A\neq\varnothing$. 于是由 $U_1\subset B^c$ 得

$$U\cap(A\backslash B)=U\cap A\cap B^c\supset U_1\cap A\cap B^c=U_1\cap A\neq\varnothing.$$

因此 $x\in\overline{A\backslash B}$, $\overline{A}\backslash\overline{B}\subset\overline{A\backslash B}$.

举例 取 $X=\mathbb{R}^1$，其上的拓扑为通常拓扑.

(1) $$\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{[0,2-1/n)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,2-1/n]=[0,2)$$

$$\subset[0,2]=\overline{[0,2)}=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}[0,2-1/n)}.$$

(2) $$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}(0,1/n)}=\overline{\varnothing}=\varnothing\subset\{0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}[0,1/n]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{(0,1/n)}.$$

即使 Λ 是有限基数时也不能改为等号. 如 $A_1=(0,1)$, $A_2=(1,2)$，则

$$\overline{A_1\cap A_2}=\overline{\varnothing}=\varnothing\subset\{1\}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}.$$

(3) 取 $A=(0,2)$, $B=(1,2)$，则

$$\overline{A}\backslash\overline{B}=[0,2]\backslash[1,2]=[0,1)\subset[0,1]=\overline{(0,1]}=\overline{A\backslash B}.$$

附加题 1.5 设 X 是拓扑空间，$x\in X$，$A\subset X$. 若对点 x 的每个邻域 U，有 $U\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing$，则称 x 为 A 的**聚点**. A 的一切聚点之集称为 A 的**导集**，记为 A'. 证明：(1) $A\cup A'=\overline{A}$；

(2) A 是闭集当且仅当 $A'\subset A$；

(3) 拓扑空间每个子集的导集是闭集当且仅当每个单点集的导集是闭集.

证明 (1) 设 $x\in A\cup A'$. 若 $x\in A$ 则 $x\in\overline{A}$；若 $x\notin A$ 则 $x\in A'$，对 x 的任意邻域 U，由 $U\cap A\supset U\cap(A\backslash\{x\})\neq\varnothing$ 可知 $x\in\overline{A}$；$A\cup A'\subset\overline{A}$.

反之，设 $x\in\overline{A}$. 若 $x\notin A$，则对 x 的任意邻域 U，$U\cap(A\backslash\{x\})=U\cap A\neq\varnothing$. 因此 $x\in A'$. $\overline{A}\subset A\cup A'$. 所以有 $A\cup A'=\overline{A}$.

(2) 由(1)可知，A 是闭集$\Leftrightarrow A=\overline{A}\Leftrightarrow A'\subset A$.

(3) 必要性是显然的. 下证充分性. 设 (X,τ) 为拓扑空间，$\mathcal{U}_x$ 为点 x 的邻域系. 设 X 中每个单点集的导集是闭集，$A\subset X$，并设 $x\in(A')'$，$U\in\mathcal{U}_x$. 则因 $\{x\}'$ 是闭的，又从 $U\in\mathcal{U}_x$，$U\cap(\{x\}\backslash\{x\})=\varnothing$ 可知 $x\notin\{x\}'$，即 $W=(\{x\}')^c$ 是开的，且 $x\in W$. 故 $W\in\mathcal{U}_x$. 对任意 $U\in\mathcal{U}_x$，令 $U_1=W\cap U$，则 $U_1\in\mathcal{U}_x$，有 $U_1\cap(A'\backslash\{x\})\neq\varnothing$，即 $(U_1\backslash\{x\})\cap A'\neq\varnothing$. 取 $y\in U_1\backslash\{x\}$ 且 $y\in A'$. 注意到

$$\begin{aligned}U_1\backslash\{x\}&=U_1\cap\{x\}^c=U\cap(\{x\}')^c\cap\{x\}^c\\&=U\cap(\{x\}'\cup\{x\})^c=U\cap(\overline{\{x\}})^c\end{aligned}$$

仍是开集. 由 $y\in A'$ 且 $U_1\backslash\{x\}\in\mathcal{U}_y$ 得 $(U_1\backslash\{x\})\cap(A\backslash\{y\})\neq\varnothing$. 于是

$$(U\backslash\{x\})\cap A\supset(U_1\backslash\{x\})\cap(A\backslash\{y\})\neq\varnothing,$$

这表明 $x\in A'$. 因此$(A')'\subset A'$,由(2)知 A'是闭集.

附加题 1.6 设(X,τ)是紧拓扑空间,$f_n,f:X\to\mathbb{R}^1$在 X 上连续,f 是$\{f_n\}$的点态极限,且有 $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$, $\forall n\in\mathbb{Z}^+,x\in X$. 证明$\{f_n\}$在 X 上一致收敛.

证明 设 $\varepsilon>0$ 是任意的. 令 $G_n=\{x\in X:|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$. 则由 f_n,f 的连续性知 G_n 是 X 的开集,且 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$. 注意到 $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$,有

$$|f_n(x)-f(x)|=f_n(x)-f(x)\geqslant f_{n+1}(x)-f(x)=|f_{n+1}(x)-f(x)|,$$

因此 $G_n\subset G_{n+1}$. 因为 X 紧,故存在 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 使 $X=\bigcup_{i=1}^{k}G_{n_i}$. 令 $n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$. 则 $X=G_{n_0}$,即 $\exists n_0=n_0(\varepsilon)$,使

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in X.$$

于是 $\forall n\geqslant n_0$ 有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in X.$$

所以$\{f_n\}$在 X 上一致收敛.

附加题 1.7 设$\mathbb{R}^n$为欧氏空间,$a_i,b_i\in\mathbb{R}^1$,$a_i<b_i$,$i=1,2,\cdots,n$. $\prod_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ 称为$\mathbb{R}^n$中**开的 n-方体**(或**开的 n-胞腔**). $\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i)$ 称为$\mathbb{R}^n$中**半开的 n-方体**(或**半开的 n-胞腔**). 证明:

(1) $\mathbb{R}^n$中每个非空开集都可表示成至多可列个互不相交的半开的 n-方体的并集.

(2) $\mathbb{R}^n$中每个非空开集既可表示成至多可列个开球之并,也可表示成至多可列个开的 n-方体的并集(允许相交).

证明 (1) 对 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $\delta>0$, 记 $A(a,\delta)=\prod_{i=1}^{n}[a_i,a_i+\delta)$, 称它为以 a 为顶点的 **δ-单元**. 对每个 $k\in\mathbb{Z}^+$,令

$$P_k=\{2^{-k}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n):\eta_i\in\mathbb{Z},i=1,2,\cdots,n\},$$

并令$\mathcal{F}_k$是以 P_k 中的点为顶点的 2^{-k}-单元($\delta=2^{-k}$)的集族. 以下证明

① 对固定的 k,每个 $x\in\mathbb{R}^n$属于且仅属于$\mathcal{F}_k$的一个元;

② 设 $A_k\in\mathcal{F}_k$, $A_r\in\mathcal{F}_r$. 若 $k>r$,则或者 $A_k\cap A_r=\varnothing$,或者 $A_k\subset A_r$.

事实上,对固定的 k,由于 $\forall x\in\mathbb{R}^n$,存在唯一的整数 η_i 使

$$\eta_i\leqslant 2^k x_i<\eta_i+1,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

从而存在唯一的以 $\eta=2^{-k}(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$为顶点的 2^{-k}-单元 $A(\eta,2^{-k})\in\mathcal{F}_k$使 $x\in A(\eta,2^{-k})$,因此①成立. 记