



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材  
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOCAI

ZIDONG KONGZHI LILUN XITIJI

# 自动控制理论习题集

## (第二版)

孙扬声 主 编



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>



普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材  
PUTONG GAODENG JIAOYU SHIYIWU GUOJIAJI GUIHUA JIAOCAI PEITAO JIAOICAI

ZIDONG KONGZHI LILUN XITIJI

# 自动控制理论习题集

## (第二版)

主 编 孙扬声  
编 写 张永立 罗 毅  
主 审 涂光瑜



中国电力出版社

<http://jc.cepp.com.cn>

## 内 容 提 要

本书为《普通高等教育“十一五”国家级规划教材 自动控制理论（第四版）》（孙扬声主编）的配套教材。

本习题集的章节安排及内容与原教材第四版完全同步展开。本书共分十章，每章（除第一章外）均包括例题、练习题、思考题和练习题参考解答四部分。

本书主要作为高等院校“自动控制理论”课程的配套教材，也可作为相关专业的教学参考书或自学辅导教材，同时，还可供相关工程技术人员阅读《自动控制理论》教材时参考。

## 图书在版编目（CIP）数据

自动控制理论习题集/孙扬声主编. —2版. —北京：中国电力出版社，2010.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教材

ISBN 978-7-5123-0767-4

I. ①自… II. ①孙… III. ①自动控制理论—高等学校—习题 IV. ①TP13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 159336 号

中国电力出版社出版、发行

（北京三里河路 6 号 100044 <http://jc.cepp.com.cn>）

北京市同江印刷厂印刷

各地新华书店经售

\*

1992 年 11 月第一版

2010 年 10 月第二版 2010 年 10 月北京第二次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 8.75 印张 210 千字

定价 15.00 元

## 敬告读者

本书封面贴有防伪标签，加热后中心图案消失  
本书如有印装质量问题，我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究

# 前 言

本习题集是第二版。原先编写的《自动控制理论习题集》（第一版），由当时的水利电力出版社于 1992 年年底出版。第二版基本上保持了第一版的章节安排和内容特色，仅新增了第十章“线性最佳控制系统”，并修正了已发现的某些错误和不妥之处。

本习题集共分十章，内容包括：绪论，线性动态系统（含状态空间描述、输入输出描述），传递函数的建立（含传递函数方框图、Mason 公式和信号流图、状态变量模拟图），反馈控制系统的性能及时域分析（含暂态性能、稳态性能），频率特性及其图示（含极坐标图、Bode 图），稳定性分析（含 Liapunov 稳定、BIBO 稳定、几种主要稳定判据），基于 Bode 图的设计及校正（含串联及并联校正，PID 控制），根轨迹法（含根轨迹图及校正），离散控制系统（含 Z 变换及用差分方程描述的状态方程），线性最佳控制系统（含二次型性能指标、Riccati 方程、最佳调节器的频域分析）。

本习题集第二版仍由华中科技大学孙扬声任主编，参编者有华中科技大学的张永立和罗毅；本版教材增加的第十章由罗毅编写。由华中科技大学涂光瑜任主审，提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，肯定还存在不少缺点和错误，恳请广大读者继续批评指正。

主 编

2010 年 5 月于华中科技大学

## 目 录

## 前言

|                     |    |
|---------------------|----|
| 第一章 绪论              | 1  |
| 一、例题                | 1  |
| 二、练习题               | 4  |
| 三、练习题参考解答           | 5  |
| 第二章 线性动态系统          | 6  |
| 一、例题                | 6  |
| 二、练习题               | 16 |
| 三、思考题               | 18 |
| 四、练习题参考解答           | 18 |
| 第三章 传递函数的建立         | 21 |
| 一、例题                | 21 |
| 二、练习题               | 37 |
| 三、思考题               | 40 |
| 四、练习题参考解答           | 41 |
| 第四章 反馈控制系统的性能及时域分析  | 44 |
| 一、例题                | 44 |
| 二、练习题               | 50 |
| 三、思考题               | 53 |
| 四、练习题参考解答           | 53 |
| 第五章 频率特性及其图示        | 55 |
| 一、例题                | 55 |
| 二、练习题               | 59 |
| 三、思考题               | 62 |
| 四、练习题参考解答           | 62 |
| 第六章 稳定性分析           | 65 |
| 一、例题                | 65 |
| 二、练习题               | 74 |
| 三、思考题               | 77 |
| 四、练习题参考解答           | 77 |
| 第七章 基于 Bode 图的设计及校正 | 80 |
| 一、例题                | 80 |
| 二、练习题               | 90 |
| 三、思考题               | 92 |

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| 四、练习题参考解答 .....           | 92  |
| <b>第八章 根轨迹法</b> .....     | 95  |
| 一、例题 .....                | 95  |
| 二、练习题 .....               | 104 |
| 三、思考题 .....               | 106 |
| 四、练习题参考解答 .....           | 107 |
| <b>第九章 离散控制系统</b> .....   | 110 |
| 一、例题 .....                | 110 |
| 二、练习题 .....               | 121 |
| 三、思考题 .....               | 124 |
| 四、练习题参考解答 .....           | 124 |
| <b>第十章 线性最佳控制系统</b> ..... | 128 |
| 一、例题 .....                | 128 |
| 二、练习题 .....               | 130 |
| 三、思考题 .....               | 131 |
| 四、练习题参考解答 .....           | 132 |

第一章 绪 论

一、例 题

【例 1-1】 图 1-1 (a) 是电热箱温度控制系统。要求：

(1) 说明当周围环境温度下降时，该控制系统如何工作；

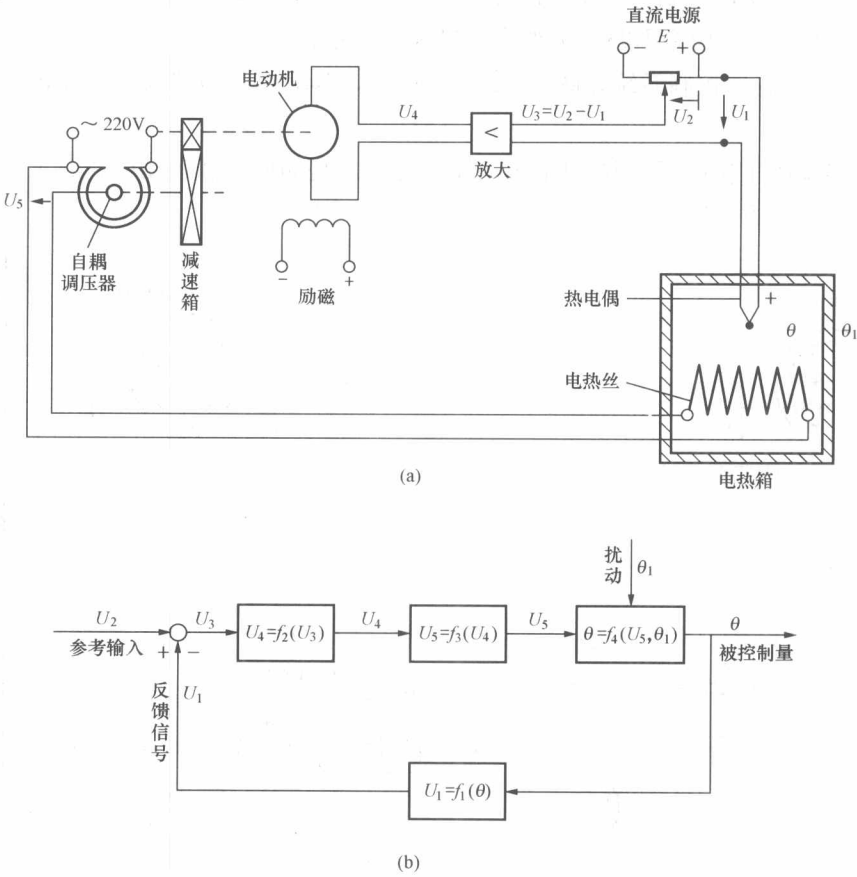


图 1-1 [例 1-1] 图

(a) 电热箱温度控制系统；(b) 电热箱温度控制系统方框图

(2) 绘出系统方框图，指出它是开环控制系统还是闭环控制系统。

解 (1) 这是一个温度控制系统。其目的是要维持电热箱内的温度  $\theta$  恒定。 $\theta$  是被控制量。热电偶上的电压  $U_1$  反映箱内温度，它相当于被控制量  $\theta$  的反馈信号。图中电位器上可调电压  $U_2$  是参考输入信号，反映箱内温度的希望值。差电压  $U_3 = U_2 - U_1$  是误差信号，经放大后，用以驱动电动机，电动机的正转、反转或停止分别取决于误差信号  $U_3$  为正、为负或为零。电动机经减速箱带动自耦调压器作相应的运动，从而使供给电热丝的电压  $U_5$  相应升高、降低或维持不变。



当电热丝上产生的热量与电热箱向周围环境散失的热量相等时,误差信号  $U_3$  为零,电动机停止转动,电热丝电压  $U_5$  维持不变。这时电热箱内温度等于给定的希望值。而当周围环境温度  $\theta_1$  下降时,散失热量增加,  $\theta$  下降,引起下列各量的相应变化,即

$$\begin{aligned} \theta_1 \downarrow \rightarrow \theta \downarrow \rightarrow U_1 \downarrow \rightarrow U_3 = (U_2 - U_1) \uparrow \rightarrow U_4 \uparrow \\ \theta \uparrow \leftarrow U_5 \uparrow \end{aligned}$$

直至达到新的平衡为止。

(2) 上述控制过程可以用方框图表示,如图 1-1 (b) 所示。显然,这是一个闭环控制系统。它的作用是使被控制量  $\theta$  保持恒定,且等于由参考输入量  $U_2$  所决定的希望值(图中未示出)。这里,周围环境温度  $\theta_1$  可视为外界扰动信号。

**【例 1-2】** 有一控制系统如图 1-2 (a) 所示,其输入量为转角  $\theta_1$ , 输出量为转角  $\theta_2$ 。要求:

- (1) 概述系统工作原理,并说明当  $\theta_1$  加大时,  $\theta_2$  是如何跟随运动的;
- (2) 画出系统方框图。

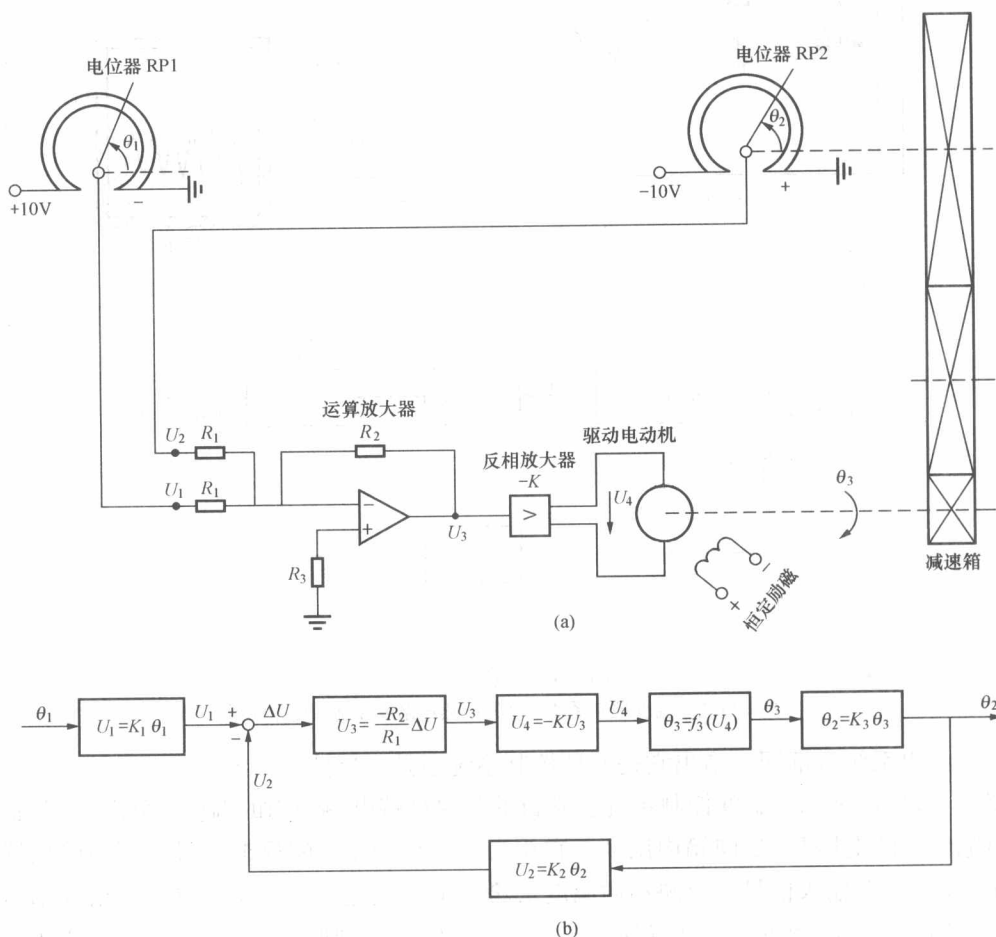


图 1-2 [例 1-2] 图

(a) 关于角位移的闭环控制系统; (b) 角位移控制系统方框图



**解** 这是一个关于角位移的闭环控制系统，它使转角  $\theta_2$  跟踪  $\theta_1$  而变化。例如电位器 RP1 的方向角  $\theta_1$  代表雷达指向，而  $\theta_2$  代表火炮瞄准方向，只要  $\theta_2$  能准确地跟踪  $\theta_1$  而变，就能瞄准运动着的目标。

(1) 由于电位器 RP1 与 RP2 的外加电源电压极性相反，故送到运算放大器输入端的电压  $U_1$  与  $U_2$  的极性也相反，即通过运算放大器实现信号相减并放大。当转角  $\theta_1$  加大后，电压  $U_1$  上升，电压差  $\Delta U = U_1 - U_2$  就会上升。紧接着便是  $U_3$ 、 $U_4$ 、 $\theta_3$  跟着加大， $\theta_2$  随之上升，最终保持偏差值  $\Delta U = U_1 - U_2 = 0$ 。这就达到了跟踪的目的。

这一过程用符号表示，则有：

$$\begin{aligned} \theta_1 \uparrow \rightarrow U_1 \uparrow \rightarrow \Delta U = (U_1 - U_2) \uparrow \rightarrow U_3 \uparrow \rightarrow U_4 \uparrow \rightarrow \\ \text{直至 } \Delta U = 0 \leftarrow \Delta U \downarrow \leftarrow U_2 \uparrow \leftarrow \theta_2 \uparrow \leftarrow \theta_3 \uparrow \end{aligned}$$

(2) 与上述过程对应的系统方框图示于图 1-2 (b) 中。需要指出的是，图中除  $\theta_3 = f_3(U_4)$  而外，其他环节均可近似地用比例关系描述。而  $\theta_3 = f_3(U_4)$  中，不仅含有比例关系，还含有积分或累加作用，即使  $U_4$  保持某一非零值不变，随着时间的推移， $\theta_3$  也会不断增加。只有当  $U_4 = 0$  以后， $\theta_3$  才保持已达到的值不变。

**【例 1-3】** 有一发电厂锅炉汽包水位恒值控制系统（又称调节系统）如图 1-3 所示。它具有两个调节环路，即反馈调节环路和扰动调节环路，试说明该系统的大致调节过程，并说明这两个调节环路的作用和性质。

**解** 正常工作时，锅炉汽包的作用是把锅炉内的汽与水分离开来，它对水位有严格的调节要求。水位过高容易把水带入汽轮机，打坏汽轮机叶片；水位过低时又会导致“干锅”，都是危险的。该控制系统的任务就是保持汽包水位为恒值，系统通过调节给水量达到此目的。

首先，考察反馈调节环路的作用。当汽轮机用汽量过大、或给水泵所给水量过小时，会引起汽包水位下落。水位变送器将下落量转换为电信号传送到反馈调节器，并与水位给定信号相比较。水位给定信号是不变的，引起反馈调节器的输出量上升，通过执行机构开大电磁阀门，增大给水量；反之，则会减小给水量。

由上述分析可知，水位给定信号是输入量，汽包的水位值是输出量，水位变送器是反馈环节，其输出量是反馈信号，而汽包中蒸汽的使用量和给水压力则是扰动量。

扰动量的变化会使水位波动，最终会通过反馈调节器调整到给定水位。但由于是通过汽包水位下落之后才开始调节的，故延长了调整过程。

为此，在控制系统中引入了扰动调整环路。当给水量猛增时，流量变送器即刻响应，不等汽包水位下落，便通过扰动调节器加大给水量。这就使得系统反应迅速，且减轻了反馈调节环路的负担。它与扮演主角的反馈调节环路相互补充，改善了调节质量和速度。

在上述两个控制环路中，反馈控制环路是将输出量反馈回来，与输入量比较后进行控制

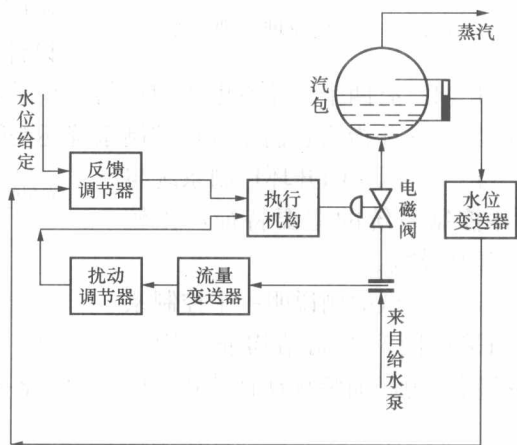


图 1-3 锅炉汽包水位控制系统

的，属于全系统的闭环控制；扰动调节则没有反映输出量，仅仅反映了扰动量，属于局部反馈控制。

## 二、练 习 题

1-1 试列举三个你所接触到的自动控制装置，说明每个装置的控制结构是开环的还是闭环的。

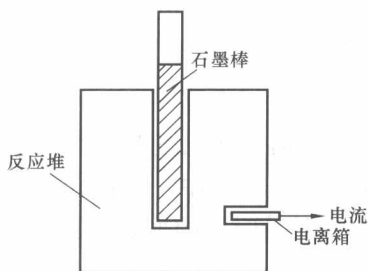


图 1-4 核反应堆原理示意图

1-2 核电站中核反应堆的裂变反应水平受石墨棒插入深度的控制。当插入越深时，其反应水平越低。而反应水平可用一个电离箱来测量，它的输出电流与反应水平成正比。核反应堆原理示意图如图 1-4 所示。试设计一台自动控制装置控制该核反应堆，使其裂变反应程度维持在给定水平。

1-3 洗衣机控制系统方框图如图 1-5 所示，试问该系统属开环控制系统还是闭环控制系统？试设计一个闭环控制的洗衣机系统方框图。

1-4 有两个汽轮发电机组的转速调节系统如图 1-6 (a)、(b) 所示。试分析它们的控制原理，并指明它们是开环控制系统还是闭环控制系统。请画出它们的控制系统方框图。

1-5 试说明开环控制系统与闭环控制系统的主要特征，比较它们的优缺点。

1-6 试举例说明一个控制系统当采用闭环控制结构或采用开环控制结构但加装扰动补偿环节时，两者各有什么优缺点？



图 1-5 洗衣机控制系统方框图

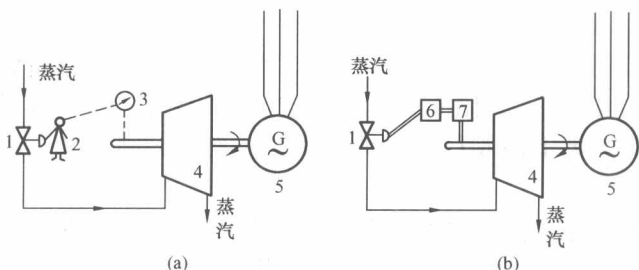


图 1-6 汽轮发电机组转速调节系统

1—进汽阀门；2—操作员；3—转速表；4—汽轮机；  
5—同步发电机；6—调节器；7—转速检测元件

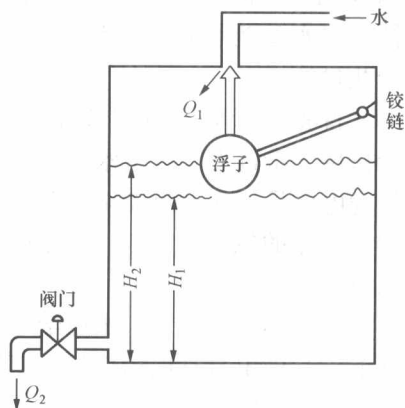


图 1-7 水位控制装置

$Q_1$ —输入流量， $\text{m}^3/\text{s}$ ； $Q_2$ —输出流量， $\text{m}^3/\text{s}$ ； $H_1$ —实际水位， $\text{m}$ ；  
 $H_2$ —希望水位， $\text{m}$

1-7 有一水位控制装置如图 1-7 所示。试分析它的控制原理，指出它是开环控制系

统还是闭环控制系统，它的被控制量、参考输入量、扰动量是什么？请画出它的控制系统方框图。

### 三、练习题参考解答

1-4 图 1-6 (a) 所示系统属开环控制系统。如果把人的感官、大脑和四肢作为控制系统的组成部分，也可理解为一种广义的闭环控制系统。但人毕竟不能当作机器部件。因而图 1-6 (a) 只能看作是开环控制系统，其输入量是阀门 1 的开度，输出量是汽轮机转速。

图 1-6 (b) 则是闭环控制系统，它无需人经常、直接参与操作即可维持正常工作。其输入量是希望转速，输出量（被控制量）是汽轮机实际转速。当汽轮机转轴上的阻力矩变化时会引起汽轮机转速变化，故它属于扰动量。

上述两个转速控制系统的方框图分别如图 1-8 (a)、(b) 所示。

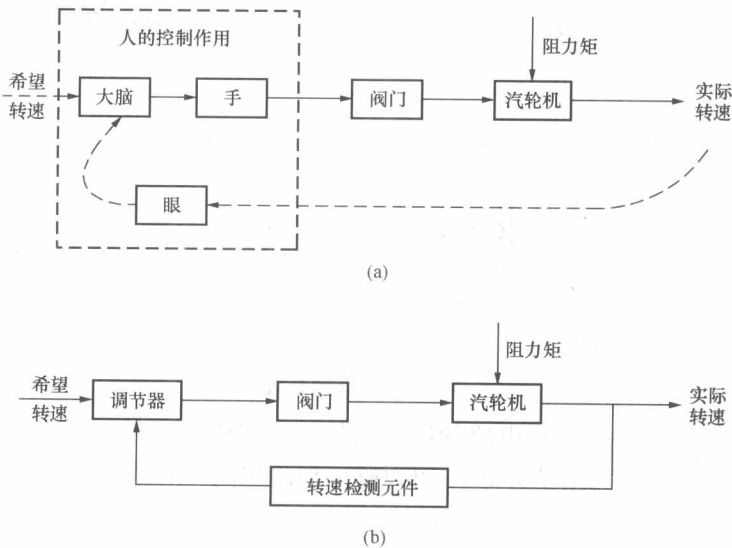


图 1-8 汽轮发电机组转速控制系统方框图

1-7 该控制装置的水位控制系统方框图如图 1-9 所示。

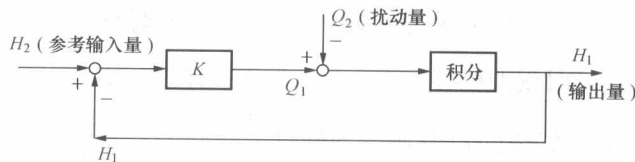


图 1-9 水位控制系统方框图

## 第二章 线性动态系统

## 一、例 题

【例 2-1】 试判断图 2-1 (a)、(b)、(c)、(d) 中各物理系统属于什么性质：线性或非线性，静态或动态，有多少个状态量。图中  $u$  为输入量， $y$  为输出量。

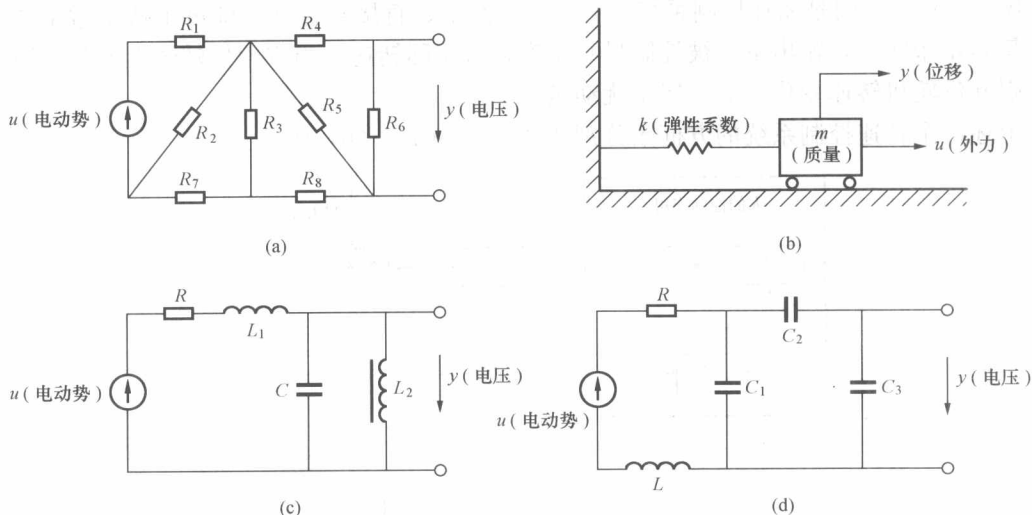


图 2-1 物理系统

解 (1) 图 2-1 (a) 所示电路的所有元件都是线性的，故可以判断该系统也是线性的。该系统任何时刻的输入电动势  $u(t)$  可以唯一地决定同一时刻的输出电压  $y(t)$ ，即满足

$$y(t) = y[t; u(t)]$$

因而它是静态系统且无状态量。

(2) 图 2-1 (b) 所示是个简单的机械运动系统，其中含有储能（动能与势能）元件，且都是线性元件。显然，任何储能元件必定也是记忆元件，故该系统是线性动态系统。

当不知  $t_0$  时刻的质量  $m$  的位移和速度时， $t = t_0 + \Delta t$  时刻的位移  $y(t)$ （输出量）是无法确定的；反之，当已知  $t_0$  时刻的位移  $x_1(t_0) = y(t_0)$  和速度  $x_2(t_0) = \frac{d}{dt}y(t_0)$ ，且又知道外力  $u_{[t_0, t]}$ ，则任何时刻的位移  $y(t)$  就唯一地确定了。

该系统具有两个状态量，可以是质量  $m$  的位移和速度。

(3) 图 2-1 (c) 所示电路较之图 2-1 (a) 所示电路复杂，它含有三个独立的储能元件，且其中带铁心的电感  $L_2 \neq \text{const}$ ，是一个非线性元件。当一个系统中只要含有非线性元件，尽管只有一个，该系统就属于非线性系统。

选择  $L_1$ 、 $L_2$  上的电流  $i_{L1}$ 、 $i_{L2}$  和电容  $C$  上的电压  $u_C$  作为状态量，该系统有三个状态量。可以写出三阶非线性状态方程，用以描述这一系统。

(4) 图 2-1 (d) 所示是线性电网络系统。由于它含有储能元件，所以是一个线性动态

系统。

可以选择电感  $L$  上的电流  $i_L$ 、电容上的电压  $u_{C1}$ 、 $u_{C2}$ 、 $u_{C3}$  作为状态量。但可以看出电压  $u_{C1}$ 、 $u_{C2}$ 、 $u_{C3}$  三者中，只有两个是独立变量，因此该系统中只能选择三个状态量。这是因为要求状态量应由最少的一组初始条件组成。

**【例 2-2】** 试检验由微分方程

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t) \quad (2-1)$$

描述的系统，属于线性系统（遵循叠加原理）。

**解** 叠加原理具有两个性质，即叠加性与均匀性（又称齐次性）。为了方便，可以分别进行检验。

(1) 检验叠加性。设输入信号为  $u_1(t)$  和  $u_2(t)$ ，所激励出的响应分别为  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$ ，由式 (2-1) 可得

$$\frac{d^2}{dt^2} y_1 + a_1 \frac{d}{dt} y_1 + a_0 y_1 = u_1(t) \quad (2-2)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} y_2 + a_1 \frac{d}{dt} y_2 + a_0 y_2 = u_2(t) \quad (2-3)$$

将式 (2-2) 与式 (2-3) 相加得

$$\frac{d^2}{dt^2} (y_1 + y_2) + a_1 \frac{d}{dt} (y_1 + y_2) + a_0 (y_1 + y_2) = u_1(t) + u_2(t) \quad (2-4)$$

式 (2-4) 说明系统对输入信号  $u_1(t) + u_2(t)$  的响应等于单个输入信号响应之和  $y_1(t) + y_2(t)$ 。即使系数  $a_0$ 、 $a_1$  是时间  $t$  的变量，上述证明依然适用。

(2) 检验均匀性。设输入信号  $u_1(t)$  增长  $\alpha$  倍， $u_2(t)$  增长  $\beta$  倍，则有

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha y_1 + a_1 \frac{d}{dt} \alpha y_1 + a_0 \alpha y_1 = \alpha u_1(t) \quad (2-5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \beta y_2 + a_1 \frac{d}{dt} \beta y_2 + a_0 \beta y_2 = \beta u_2(t) \quad (2-6)$$

说明系统的响应也分别增长了  $\alpha$  倍和  $\beta$  倍

最后，将式 (2-5) 与式 (2-6) 叠加起来，则所施的激励是

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2 \quad (2-7)$$

所得到的响应是

$$y = \alpha y_1 + \beta y_2 \quad (2-8)$$

这样，就全部证明了叠加原理对该系统的适用性，从而也证明了式 (2-1) 是线性系统。

**【例 2-3】** 试从数学观点判断下列各系统是否为线性系统：

$$(1) \quad 5 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4y \frac{dy}{dx} + 3y = 2x^2 \quad (2-9)$$

$$(2) \quad \frac{du}{d\theta} + 2u + u^2 = \sin^3 \theta \quad (2-10)$$

$$(3) \quad t \left( \frac{d^2 v}{dt^2} \right)^2 + 5 \frac{dv}{dt} + t^2 v = e^{-t} \quad (2-11)$$

$$(4) \quad 2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy}{dt} + 4y + 5 = 6t \quad (2-12)$$

**解** 所有系统都应根据叠加原理(叠加性及均匀性)去检验其线性。但有时利用已有的数学知识,可以更快速地作出判断。首先,要搞清方程式的自变量、因变量、激励量,然后考察方程式因变量、激励量的特征。凡有下列情况者属非线性:

- 1) 凡含有因变量(或激励量)的非一次幂项者;
- 2) 凡含有因变量(或激励量)的各阶导数的非一次幂项者;
- 3) 凡含有因变量与激励量(及其各阶导数)之积者;
- 4) 凡含有无变量的常系数项者;
- 5) 凡含有因变量(或激励量)的三角函数、指数、对数者。

根据上述,本题中四个小题的判断结果可列表如下说明之。

| 题 号 | 自变量      | 因变量 | 激励量             | 非线性成分                               | 系统性质    |
|-----|----------|-----|-----------------|-------------------------------------|---------|
| (1) | $x$      | $y$ | $2x^2$          | $4y \frac{dy}{dx}$                  | 非线性, 定常 |
| (2) | $\theta$ | $u$ | $\sin^3 \theta$ | $u^2$                               | 非线性, 定常 |
| (3) | $t$      | $v$ | $e^{-t}$        | $\left(\frac{d^2 v}{dt^2}\right)^2$ | 非线性, 时变 |
| (4) | $t$      | $y$ | $6t$            | 5                                   | 非线性, 定常 |

**【例 2-4】** 给定一机械振荡系统如图 2-2 所示, 试定义一组状态变量, 求取系统的状态空间方程。

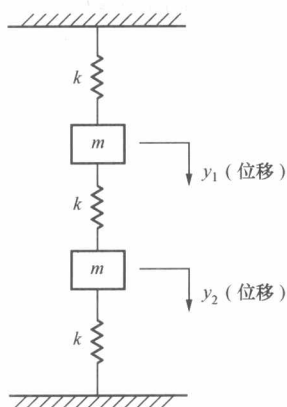


图 2-2 机械振荡系统

$k$ —弹性系数;  $m$ —质量

**解** 两个相同的质量块  $m$  的运动方程分别写为

$$m\ddot{y}_1 + ky_1 - k(y_2 - y_1) = 0 \quad (2-13)$$

$$m\ddot{y}_2 + k(y_2 - y_1) + ky_2 = 0 \quad (2-14)$$

式中:  $y_2 - y_1$  为中间弹簧的变形量, 所形成的变形力对于两个质量块的作用方向相反, 因而两式中的符号相反。

定义状态变量

$$x_1 = y_1; x_2 = \dot{y}_1; x_3 = y_2; x_4 = \dot{y}_2$$

于是得到

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = -\frac{2k}{m}y_1 + \frac{k}{m}y_2 = -\frac{2k}{m}x_1 + \frac{k}{m}x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = -\frac{2k}{m}y_2 + \frac{k}{m}y_1 = -\frac{2k}{m}x_3 + \frac{k}{m}x_1$$

由此得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2k}{m} & 0 & \frac{k}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & 0 & -\frac{2k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

即

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

式(2-15)是零输入线性系统, 又称自由系统, 只有给定了初始状态  $x(0) \neq 0$  的情况下, 才能产生振荡运动。

**【例 2-5】** 某电网络如图 2-3 所示, 图中标出了输入量  $u$ , 输出量  $y$  以及电压  $x_1$ 、 $x_2$  和  $x_3$ , 后面三个电压均可作状态量选取对象, 试建立该系统的状态空间方程。

**解** (1) 取  $x_1$  和  $x_2$  作为状态变量 (因为  $x_3$  为非独立变量), 对节点 A 使用基尔霍夫第一定律有

$$\frac{u - x_1}{R} = C_1 \frac{dx_1}{dt} + C_2 \frac{dx_2}{dt}$$

将电阻、电容值代入上式得

$$\frac{u - x_1}{2} = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 \quad (2-16)$$

再对节点 C 使用基尔霍夫第一定律有

$$C_2 \frac{dx_2}{dt} = C_3 \frac{d}{dt}(x_1 - x_2)$$

将电容值代入后得

$$2\dot{x}_2 = 2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (2-17)$$

由式(2-16)和式(2-17)可得

$$\dot{x}_1 = \frac{u - x_1}{2} - 2\dot{x}_2 = \frac{u}{4} - \frac{x_1}{4} \quad (2-18)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2}\dot{x}_1 = \frac{u}{8} - \frac{x_1}{8} \quad (2-19)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} u \quad (2-20)$$

而且根据所给定输出量有

$$y = [1 \quad -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2-21)$$

这是二阶定常动态系统方程。由于状态变量的非唯一性, 还可以取另外一组状态变量, 例如  $x_2$  和  $x_3$ , 下面进行推导。

(2) 取  $x_2$  与  $x_3$  为状态变量, 对于上述同一系统, 利用方程式(2-16)

$$\frac{u - x_1}{2} = \dot{x}_1 + 2\dot{x}_2$$

因为

$$x_1 = x_2 + x_3$$

得到

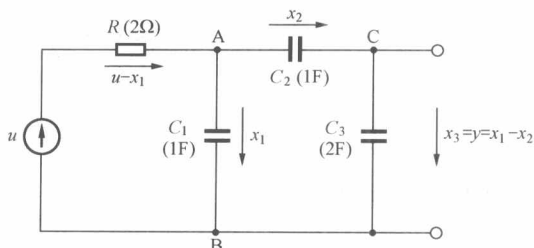


图 2-3 电网络图



$$2\dot{x}_2 = \frac{u - x_1}{2} - \dot{x}_2 - \dot{x}_3$$

化简得

$$3\dot{x}_2 = \frac{u}{2} - \frac{x_3}{2} - \frac{x_2}{2} - \dot{x}_3 \quad (2-22)$$

由式(2-17)有

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \dot{x}_2 + \dot{x}_3 - \dot{x}_2 = \dot{x}_3 \quad (2-23)$$

故式(2-22)可写成

$$\dot{x}_2 = \frac{u}{8} - \frac{x_3}{8} - \frac{x_2}{8} \quad (2-24)$$

同样

$$\dot{x}_3 = \frac{u}{8} - \frac{x_3}{8} - \frac{x_2}{8} \quad (2-25)$$

写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix} u \quad (2-26)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (2-27)$$

可见,同一系统,由于状态变量选择不同,可建立多组状态空间描述。显然,从输入输出关系上看,所有这些描述都是等价的。

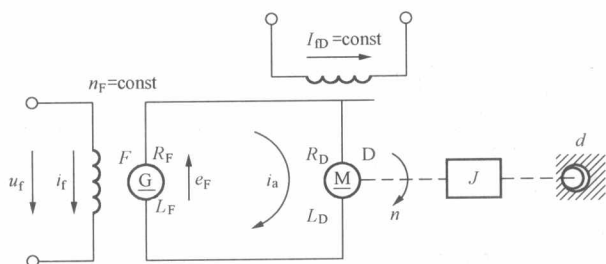


图 2-4 直流发电机—电动机组驱动系统

$R_F$ 、 $R_D$ —电阻,  $\Omega$ ;  $J$ —转动惯量,  $N \cdot m \cdot s^2$ ;

$L_F$ 、 $L_D$ —电感,  $H$ ;  $d$ —阻尼系数,  $N \cdot m \cdot s$

**【例 2-6】** 直流发电机—电动机组驱动系统如图 2-4 所示,输入量为发电机励磁电压  $u_f(V)$ ,输出量为电动机转速  $n(r/min)$ ,要求:

(1) 建立以输入—输出描述的微分方程和传递函数;

(2) 建立系统的状态方程;

(3) 由状态方程式求传递函数矩阵。

**解** (1) 求以输入—输出描述的

微分方程和传递函数。由直流发电机励磁回路得

$$R_f i_f + L_f \dot{i}_f = u_f \quad (2-28)$$

忽略发电机空载饱和和非线性,且令  $n_F = \text{const}$ ,则有

$$e_F = K_F i_f \quad (2-29)$$

根据基尔霍夫第二定律可得

$$e_F = (R_F + R_D) i_a + (L_F + L_D) \dot{i}_a + K_e n \quad (2-30)$$

上两式中  $K_F$ ——发电机空载励磁系数, V/A;

$K_e$ ——电动机电枢反电动势系数,  $V \cdot (r/min)^{-1}$ 。

由电动机转子运动规律写出

$$J \frac{\pi}{30} \dot{n} + d \frac{\pi}{30} n = M_D \quad (2-31)$$

式中  $M_D$ ——电动机电磁力矩,  $M_D = K_M i_a N \cdot m$ ,  $M_D = k_M i_a$ 。

从式 (2-28) ~ 式 (2-31) 中消去中间变量得

$$T_f T_a T_M \ddot{n} + (T_a T_M + T_f T_M + T_a T_f) \dot{n} + [T_M + T_a + (1+K) T_f] n + (1+K) n = K' u_f \quad (2-32)$$

其中

$$T_a = \frac{L_F + L_D}{R_F + R_D}; T_f = \frac{L_f}{R_f}; T_M = \frac{J}{d};$$

$$K = \frac{30 K_M K_e}{(R_F + R_D) d \pi}; K' = \frac{30 K_F K_M}{(R_F + R_D) R_f d \pi}$$

式 (2-32) 即为输入—输出描述的微分方程, 对其取零初始条件下的拉氏变换, 即得传递函数

$$G(s) = \frac{K'}{T_f T_a T_M s^3 + (T_a T_M + T_f T_M + T_a T_f) s^2 + [T_M + T_a + (1+K) T_f] s + (1+K)} \quad (2-33)$$

(2) 列写系统的状态方程。选取  $i_f$ 、 $i_a$ 、 $n$  作系统的三个状态变量。由式 (2-28) ~ 式 (2-31) 可得

$$\dot{i}_f = \frac{-R_f i_f + u_f}{L_f} \quad (2-34)$$

$$\dot{i}_a = \frac{K_F i_f - R_a i_a - K_e n}{L_a} \quad (2-35)$$

$$\frac{J \pi}{30} \dot{n} = K_M i_a - \frac{d \pi}{30} n \quad (2-36)$$

式中  $R_a = R_F + R_D$ ——发电机与电动机电枢电阻,  $\Omega$ ;

$L_a = L_F + L_D$ ——发电机与电动机电枢电感, H。

将式 (2-34) ~ 式 (2-36) 写成状态空间形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_f \\ \dot{i}_a \\ \dot{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ \frac{K_F}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} \\ 0 & \frac{30 K_M}{J \pi} & -\frac{d}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \\ n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_f \quad (2-37)$$

$$n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ i_a \\ n \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

(3) 求传递函数矩阵。根据传递函数矩阵定义有