高等学校教材

高等数学基本训练

李广民　于　力　周荣星　祝向荣　王金金

GAO DENG SHU XUE
JI BEN XUN LIAN

西安电子科技大学出版社

高等数学基本训练

李广民　于　力　周荣星　祝向荣　王全全

西安电子科技大学出版社

1993

(陕)新登字 010 号

内 容 简 介

高等数学基本训练是与教材《高等数学》配套的习题集，按“试题化”统一规格编写，以作业本形式给出。习题的选择强调基本概念、基本理论、基本方法的训练。学生通过各种题型（判断题、填空题、选择题、计算题、证明题）的练习，可达到巩固、加深对教材内容的理解。

高等数学基本训练

李广民　于　力　周荣星　祝向荣　王金金

责任编辑　梁家新

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/16　印张 9.5　字数 225 千字

1993 年 4 月第 1 版　1993 年 8 月第 2 次印刷　印数 5 101－15 100

ISBN 7－5606－0245－2/O・0014（课）　定价：4.95 元

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1
第二章　导数与微分 …… 17
第三章　导数的应用 …… 31
第四章　不定积分 …… 43
第五章　定积分及其应用 …… 55
第六章　常微分方程 …… 73
第七章　空间解析几何与向量代数 …… 83
第八章　多元函数微分学 …… 99
第九章　重积分 …… 113
第十章　曲线积分　曲面积分 …… 125
第十一章　无穷级数 …… 137

班级________姓名________学号________

第一章 函数与极限

习题1—1.2 函数概念、函数的几种特性

1. 填空题：

(1) 函数 $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$ 的定义域是__________.

(2) 函数 $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$ 的定义域是__________.

(3) 设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，则 $f(0)=$________，$f(1)=$________，$f(-1)=$________，$f\left(\frac{1}{a}\right)=$________，$f(x_0)=$________，$f(x_0+h)=$________.

(4) 函数 $y=\cos 3x$ 的周期是__________.

(5) 函数 $y=\sin^2 x$ 的周期是__________.

(6) 函数 $y=-x^2+1$ 在区间__________内是单调增加的，在区间__________内是单调减少的.

2. 选择题：

(1) 下列四对函数中，$f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是(　　　)

(a) $f(x)=\lg x^2$，　$g(x)=2\lg x$；

(b) $f(x)=x$，　$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(c) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，　$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(d) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，　$g(x)=x+1$.

(2) 若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数，则

$$F(x)=f(x)-f(-x) \text{ 是（　　　）.}$$

(a) 偶函数；　(b) 奇函数；

(c) 非奇非偶函数；　(d) $F(x)\equiv 0$.

(3) 下列函数在指定区间内有界的是（　　）.

(a) $y=\sqrt{1-x^2}$, $[-1,1]$；　　(b) $y=\frac{1}{1-x^2}$, $(-1,1)$

(c) $y=\arcsin\frac{x}{2}$, $[-2,2]$；　　(d) $y=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$　$(-\infty,+\infty)$

3. 设函数　$f(x)=\begin{cases}2+x, & x\leqslant 0;\\ 2^x, & x>0.\end{cases}$

求 $f(-3)$；$f(0)$，$f(2)$，并作出函数 $y=f(x)$ 的图形.

4. 已知圆锥的体积为 V，试将圆锥的底半径表为其高的函数，并求此函数的定义域.

5*. 电压在某电路上等速下降，在实验开始时，电压为 12 V，经过 8 s 后电压降至 6.4 V. 试把电压 U 表成时间 t 的函数.

班级________ 姓名________ 学号________

习题1—3.4 反函数与复合函数、初等函数

1. 填空题：

(1) $y=\frac{1-x}{1+x}$的反函数是________，反函数的定义域是________.

(2) $y=1+\lg(x+2)$ 的反函数是________，反函数的定义域是________.

(3) $y=\lg(2-u)$，$u=\sin^2 x$ 的复合函数为____________.

(4) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin v$，$v=\sqrt{x}$ 的复合函数为____________.

(5) 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$，则 $f(x^2)$ 的定义域是________；$f(\sin x)$ 的定义域是________；$f(x+a)$，$(a>0)$ 的定义域是__________.

2. 将下列函数拆开成若干个基本初等函数或基本初等函数的和、差、积、商：

(1) $y=\ln(\ln x)$；　　(2) $y=\arcsin\sqrt{\sin x}$；

(3) $y=e^{\cos\frac{1}{x}}$；　　(4) $y=\mathrm{tg}(1+e^x)^2$.

3. 作出下列函数的图形：

(1) $y=-x^2$，　(2) $y=|\sin x|$，　(3) $y=e^{-x}$.

4. 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|<1; \\ 0, & |x|=1; \\ -1, & |x|>1. \end{cases}$ $g(x)=e^x$，

求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形.

5*. 证明下列公式：

(1) $\operatorname{sh}(x+y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y+\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$;

(2) $\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$.

$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=shx$

$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=chx$

班级________姓名________学号________

习题1—5 数列的极限

1. 观察下列数列 a_n 的变化趋势，写出它们的极限.

(1) $a_n=2+\frac{1}{n^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________.

(2) $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________.

(3) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________.

(4) $a_n=n(-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$____________.

2. 设 $a_n=\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$，问 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=?$. 求出 N，使当 $n>N$ 时，a_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

3. 根据数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}$.

4. 证明若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$．并举例说明反过来未必成立.

5*. 设$|b_n|\leqslant M$，$n=1$，$2\cdots$，$M>0$ 为常数，且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$.
证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=0$.

班级________姓名________学号________

习题 1—6、函数的极限

1. 判断题：（正确的打“√”，错误的打“×”）

（1）若 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A>0$，则必存在 $X>0$，使当 $x<-X$ 时恒有

$$\frac{A}{2}<f(x)<\frac{3}{2}A.$$ （　　）

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$．则必有正数 δ，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)<f(x_0)$． （　　）

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 可能存在，也可能不存在． （　　）

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 都不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)$ 一定不存在． （　　）

2. 求下列极限：（写出简单的运算步骤）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1-n}{2n+1}\right)=$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}=$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=$

（4）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^3+4x+1}=$

（5）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{2x^3+4x^2-3}=$

（6）$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=$

（7）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$

（8）设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-3, & x\leqslant 1 \\ x, & 1<x<2 \\ 2x-2, & x\geqslant 2. \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$

3. 求 $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$\varphi(x)=\dfrac{|x|}{x}$，当 $x\to 0$ 时的左、右极限，并说明它们在 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

4*. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$； (2) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-1)=8$.

班级________姓名________学号________

习题 1—7　两个重要极限

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}=$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}=$

(6) $\lim\limits_{n\to \infty} 2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=$

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{3x}=$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}=$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}=$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+5}=$

班级________姓名________学号________

习题1—8 无穷小与无穷大

判断题：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\infty-\infty=0.$ ( )

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3}{2x^4+5}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2x^3+3)}{\lim\limits_{x\to\infty}(3x^4+5)}=\dfrac{\infty}{\infty}=1.$ ( )

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x=e.$ ( )

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$
$=0+0+\cdots+0=0.$ ( )

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{(3x)^3}=0.$ ( )

(6) 零是无穷小量. ( )

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\dfrac{1}{x}=$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=$

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-5x}{x^2-3x+2}=$

3. 证明：当 $x \to 0$ 时，下列各对无穷小是等价的.

(1) $1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}$;

(2) $\operatorname{arctg} x \sim x$.

4. 利用等价无穷小的性质，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x} =$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{(\sin 3x)^2} =$

(3) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} =$

5. 当 $x \to 1$ 时，无穷小 $1-x$ 和

(1) $1-x^3$;

(2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$

是否同阶？是否等价？

班级________姓名________学号________

习题 1—9 函数的连续性

1. 判断题：

(1) 如果函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则当 $x\to x_0$ 时，函数有极限. (　　)

反之，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必定连续. (　　)

(2) 分段函数必有间断点. (　　)

(3) 方程 $x2^x=1$ 至少有一个小于 1 的正根.

2. 填空题：

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$ 的连续区间是__________.

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{e^x+1}{x}$ 的连续区间是__________.

(3) 若函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ A\ , & x=2\end{cases}$$

当 $A=$________时，函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处是连续的.

(4) 设 $f(x)=x\cos^2\dfrac{1}{x}$，则 $x=$________为 $f(x)$ 的__________间断点.

(5) 设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}$，则 $x=$__________为 $f(x)$ 的__________间断点.

(6) 设 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}$，则 $x=$________为 $f(x)$ 的__________间断点.

(7) 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$，则 $x=$________为 $f(x)$ 的__________间断点.