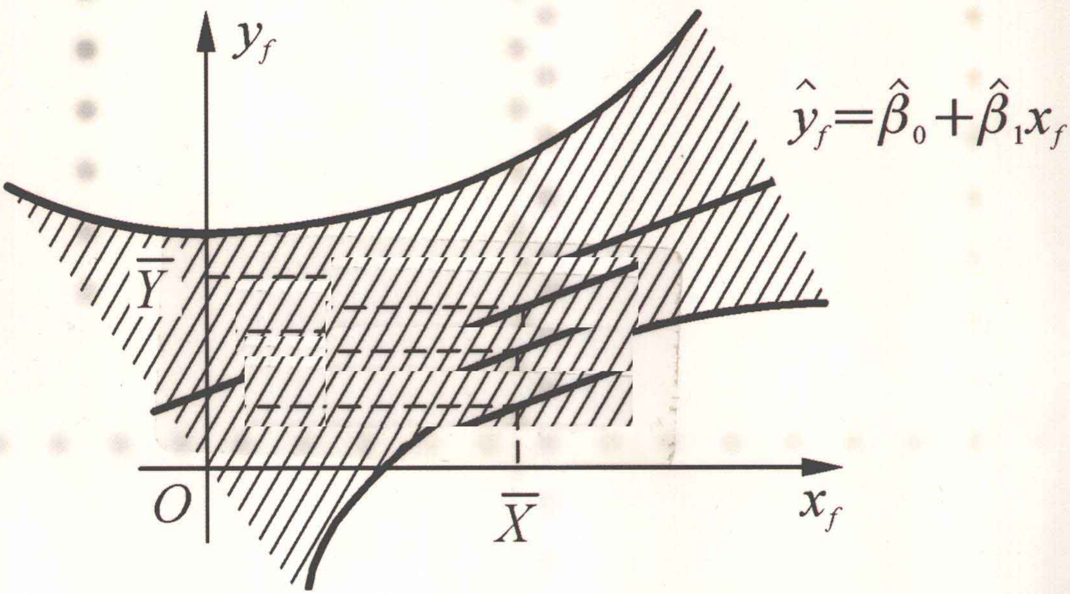
新编概率论与数理统计

（第二版）

XINBIANGAILVLUN

Y U S H U L I T O N G J I

主编 夏宁茂 副主编 秦 衍 倪中新



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

新编概率论与数理统计

（第二版）

主　编　夏宁茂
副主编　秦　衍　倪中新

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

第二版前言

以培养学生随机思维与随机处理为主要目标的“概率统计”课程近年来越来越受到人们的重视，对其教材也不断提出更高的要求. 为满足这种变化趋势，我们从“学”与“用”两个角度对本书进行了修改与补充，并配以时新的实际案例. 与第一版相比其主要变化如下：

(1) 新增加了“应用回归分析”一章，以满足读者学以致用的要求，并从实用角度出发分别介绍了“变量筛选”与“残差分析”等方法.

(2) 为方便读者更好地理解与掌握所介绍的内容，在各章后与书末分别新增了“本章小结”、“思考题”和“索引”.

(3) 把各章的习题分成“基本练习题”、“强化练习题”与“自测题”等不同层次.

(4) 重新编写了原书第七章的案例.

本书的第八章以及部分思考题与本章小结由夏宁茂编写，习题由秦衍编写，第七章的案例以及部分思考题与本章小结则由秦衍与倪中新共同编写.

在本书使用与修订的过程中受到广大学生与教师的厚爱，提出了不少建议与意见. 特别是华东理工大学生工学院的邬行彦教授，他不仅仔细阅读了本书的第一版，对照了中外文同类教材，并从学习与使用等多种角度对本书的修改提出了很多非常有价值的建议. 另外，香港岭南大学的孙大宁教授、美国斯坦福大学的王华之博士对第八章的编写也提供了许多帮助. 在此编者对他们表示衷心的感谢.

编　者

于华东理工大学　上海大学

2010 年 11 月

前　言

《概率论与数理统计》是培养学生利用随机思维模式看待和处理随机现象的一门重要数学基础课程．它与“高等数学”和“线性代数”所使用的确定思维模式一起，共同构成了人们认识世界的两大主要思维方式．随着社会的不断发展和进步，不但在教育界，同时在学术理论界和实际应用界，人们都认识到随机思维模式和随机处理思想的重要性．

作为课程的配套教材，国内外已经出版很多．与它们相比，本教材采用以“处理对象”为主要线索的编写线路，同时具有**“新、用、深”**的特点，具体如下：

1. 计算机工具的广泛使用

通过模拟、函数计算及程序调用，把 Excel 工具广泛使用于概念的引进和数值计算，帮助学生形象理解新概念，直达核心处理思想．

2. 现代概念的描述性融入

现代概率论中的基本概念，例如：“可测性”、“概率空间变换”、“条件数学期望”、“期望积分平均”等科普描述性的引进，可使学生缩短与近代概率论之间的距离．

3. 贯串随机思想、强调实际应用

教材重视基本概念与方法，又强调随机处理的思想．通过借用 MBA 的案例分析方法，引导学生灵活运用所学知识，掌握随机处理的基本过程．

4. 概率统计前后呼应、相互融合，兼顾传统理论与时代精神

教材改变以往常用的先概率后统计的两段式编写方法，以“描述统计”引领概率，重视两者的融合．教材既尊重传统的教学大纲，又注意吸纳新方法、新技术

(如 Bootstrap 方法求置信区间等)，具有明显的时代气息.

本教材主要适用于(对理论证明要求不高的)大学本科各专业的 3 学分课程.由于书中包含了编者多年来在教学与科研中的体会，有助于读者理解概念实质，体会计算技巧以及掌握应用过程，所以也可作为其他专业师生以及实际工作者的参考用书.同时，考虑到日益广泛的应用需要，本书在案例分析中添加了“决策树”与“回归分析”等内容，读者可以有选择性地学习.另外，对于课堂例子与作业技巧有更高要求的读者，可以参考作者在 2005 年出版的《概率论与数理统计——学习指导》一书(华东理工大学出版社).

本书概率部分由夏宁茂编写，统计部分主要由倪中新编写，习题部分由秦衍编写，全书由夏宁茂与秦衍进行修改、整合和统稿.书中部分例子选自所列的参考文献，例子中有关“正态概率纸”的计算使用了陆元鸿教授编制的软件，在此一并表示感谢.

本书的主要内容虽然多次在华东理工大学的优秀生班、宁波镇海炼油厂的学习班以及温州的 MBA 班中试用过，但由于作者的水平有限，有不当和错误之处，敬请读者和专家批评指正.

编　者

于华东理工大学　香港中文大学

2005 年 11 月 18 日

目　　录

1 随机事件与概率

1.1 随机事件及其运算

1.1.1 随机现象与样本空间

“概率论与数理统计”所讨论的对象主要是随机现象(随机变量). 所谓随机指的是随意的,即在一定条件下,事情结果可能有多种,且预先不一定知道何种结果将会发生. 我们以前学的知识大多数都是确定性的. 例如:太阳每天从东方升起;对于函数 $y=f(x)$,当 $x=2$ 时,$y=f(2)$ 等等. 然而世界上还存在很多不确定的现象,例如:抛一枚硬币时,有可能正面朝上,也有可能反面朝上;每天的股票价格也是变化多端,在股票交易中,下一秒股票的交易价格有可能上涨,也有可能下跌. 在这种不确定的现象中,有一类现象,从整体角度看,它具有某些规律性(例如出现机会大小或概率大小),这种类型的不确定现象便是我们讨论的重点,常称为随机现象. 至于那些内在规律不太明显的不确定现象则不是本书讨论的重点.

随机现象在我们的生活中广泛存在,讨论这类现象具有重要的意义. 例如,估计明年国际市场对我国某产品的需求量 ξ(单位:t),它具有随机性,若需求量在[2 000, 4 000]区间是等可能的,今要组织确定性的货源 y(单位:t),则显然 $y\in[2\,000,\ 4\,000]$,假设当供小于求 $(y\leqslant\xi)$ 时,收益为 $3y$(万元);当供大于求 $(y>\xi)$ 时,收益分别为卖出的利润 3ξ(万元)与积压仓库的损失 $1\times(y-\xi)$(万元)之代数和,即 $3\xi-(y-\xi)=4\xi-y$,问应如何确定 y,使得总收益大而风险小. 这种问题就可以用概率论的随机处理思想解决. 在第 2 章的案例分析中我们将给出答案 $y=3\,000$ t.

在概率论中对随机现象可能结果的多样性可以用引进样本点与样本空间的办法加以简化. 随机现象的每种基本结果对应于一个样本点 ω,则基本结果全体就构成样本空间(Sample Space),记为 Ω. 例如,抛一枚硬币的样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面朝上,ω_2 表示反面朝上. 又如,上面例中出口商品需求量 ξ 所对应的样本空间为 $\Omega=\{\omega\mid\omega\in[2\,000,\ 4\,000]\}$. 应该指出的是样本空间中样本点的个数,有时是有限个,有时是无限个,但在概率统计中为讨论方便,不过多强调有限与无限,而是强调可列与不可列

的区分. 所谓可列是指样本点 ω 的个数既可以是有限个,也可以是无限个. 例如, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}$. 而不可列是指其样本点个数不仅是无限个,而且往往会出现像上面出口商品需求量 ξ 那样,其对应的 ω 布满整个 $[2\,000, 4\,000]$ 区间. 关于可列与不可列的概念其实在高等数学中已出现过,无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 中 x_i 的个数就是可列个,而定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 中积分变量 $x \in [a, b]$,其对应的个数就是不可列个.

1.1.2 随机事件与随机变量

引进样本点与样本空间可以帮助我们理解与分析随机现象多结果的问题. 对于某给定的样本空间,由于处理问题的需要,我们不但关心每个基本事件(即单个样本点),而且关心由多个样本点组成的复合事件. 所谓复合事件,从集合的角度看是由某些样本点 ω 构成的集合,即 Ω 的子集,它具有随机的性质,故又称为随机事件或事件. 例如:在掷一颗骰子时,出现的点数可以构成空间 $\Omega = \{1, 2, 3, \cdots, 6\}$ 或 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_6\}$,而作为随机事件(常用大写字母 A, B 等表示)可以是基本事件 $A = \{\omega_2\}$,也可以是复合事件 $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$,其含义为掷出点数为奇数点. 应该注意的是:有了事件后,我们的视觉范围不再局限于 Ω 中的单个样本点 ω,而是扩展到 Ω 中的子集,如 $\{\omega_2\}$, $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_6\}$. 为更强调我们的讨论对象已变为各种子集,有时把所关心的子集的全体记为 $\mathcal{F}$,称为集合的类(即以子集合为元素所构成的集合),用符号表示即讨论对象由原来的 $\{\omega, \Omega\}$ 演变成了新的 $\{A, \mathcal{F}\}$. 进一步为讨论方便,常假设 $\mathcal{F}$ 包含空集 $\varnothing$ 与 Ω 本身,前者称为不可能事件,后者称为必然事件. 另外应该说明的是我们需要的 $\mathcal{F}$ 不必包含 Ω 的所有子集,但至少应包含 $\varnothing$ 与 Ω,即 $\mathcal{F}$ 最小为 $\{\varnothing, \Omega\}$.

当随机现象的结果可以用数量表示时,这种随机结果又称为随机变量,常用希腊字母 ξ, η 等表示. 例如,用 ξ 表示掷一颗骰子时出现的点数,则"$\xi > 2$"表示随机事件"出现点数大于2". 在讨论随机事件时,所谓的"示性函数"就是一个有用的随机变量,我们常把它记为 $I_A(\omega)$,实际上它的定义为

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$$

随机变量是 ω 的函数,其随机性可由 ω 体现出来. 另外由于后面概率控制的需要,对随机变量还要提出其他(如可测性)的要求. 至此为止可用 3 种方法描写随机事件:集合表示、语言表示、随机变量表示. 除此之外,样本空间文氏图对于帮助理解以集合表示的随机事件的有关概念也是十分有用的. 例如,在图 1.1.1 中事件 A 为 Ω 中的一个子集,该子集中任一样本点(ω_4 或 ω_5)发生时,事件 A 就发生.

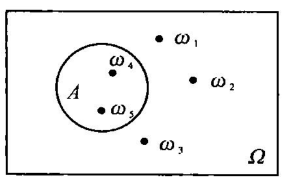


图 1.1.1 文氏图

1.1.3 事件关系与运算

事件是概率论讨论的主要对象，与集合相似，事件间也有各种关系与运算.

1. 事件关系

包含关系：如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称 A 被包含于 B，记为 $A \subset B$，或称 B 包含 A，记为 $B \supset A$. 用文氏图表示，则 A 的样本点必属于 B，即对 $\forall \omega \in A$ 必有 $\omega \in B$（图 1.1.2）. 包含关系也可用示性函数表示，即 $A \subset B$ 等价于 $I_A(\omega) \leqslant I_B(\omega)$.

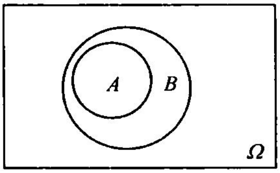


图 1.1.2 $A \subset B$

相等关系：A、B 两事件中任一事件发生必然导致另一事件发生，此时 A 与 B 称为相等，记作 $A = B$，或者说"$A = B$"等价于"$A \subset B$，$B \subset A$ 同时成立". 用示性函数表示为 $I_A(\omega) = I_B(\omega)$.

对立关系：如果两个事件 A、B 中，B="A 不发生"，则 A、B 称为具有对立关系（或互逆关系），又称 B 为 A 的对立事件，记为 $B = \overline{A}$. 此时 $I_A(\omega) + I_B(\omega) = 1$. 注意到 $\overline{\overline{A}} = A$，故 $\overline{B} = A$，即对立关系是相互的（图 1.1.3）.

互不相容关系：对于事件 A、B，如果不可能同时发生，则 A、B 称为互不相容，从文氏图看，A、B 没有相同的样本点（图 1.1.4），用示性函数描写为 $I_A(\omega)I_B(\omega) = 0$.

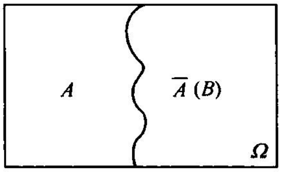


图 1.1.3 A 的对立事件 $\overline{A}$

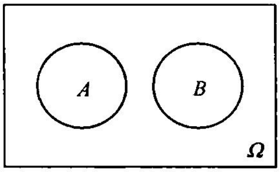


图 1.1.4 A、B 互不相容

2. 事件运算

事件 A 与 B 的并："A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的并，记作 $A \cup B$ 或 $A + B$，用文氏图 1.1.5 中的 ω 语言表示为"由 A、B 中所有样本点（相同的 ω 只计一次）构成的新事件"，并运算相当于代数中的加运算，而上面指出的"相同的 ω 在求并时只计一次"则体现了集合并运算与代数加运算之间的差别.

事件 A 与 B 的交："A 与 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的交，记作 $A \cap B$ 或 AB. 在文氏图 1.1.5 中则为"由 A 与 B 中公共样本点构成的新事件".

事件并与交的运算可以推广到有限多个或无限多个. 在可列无限多个时，常可用与高等数学中无穷级数类似的记号，即记 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列并，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列交.

事件 A 与 B 的差：新事件"A 发生而 B 不发生"称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A-B$，从集合角度看则是由"A 中所有不在 B 中的样本点 ω 所构成的集合". 事件差与集合减法相似而与代数减法不同. 例如：若 $A - B = C$，则一般 $A \neq B \cup C$，利用差运算常可把 $A \cup B$ 分

解为互不相容的 3 个事件的并，即 $A \cup B = (A-B) \cup AB \cup (B-A)$，这种分解法有时可以简化后面的概率运算. 另外，由文氏图容易看出成立等式 $A-B = A-AB = A\overline{B}$，它有时也可帮助我们进行计算. 当 $A=\Omega$ 时，$\Omega - B = \Omega\overline{B} = \overline{B}$，其中$\overline{B}$为 B 的对立事件. 有时从运算角度看也可认为$\overline{B}$是事件 B 经余运算所得.

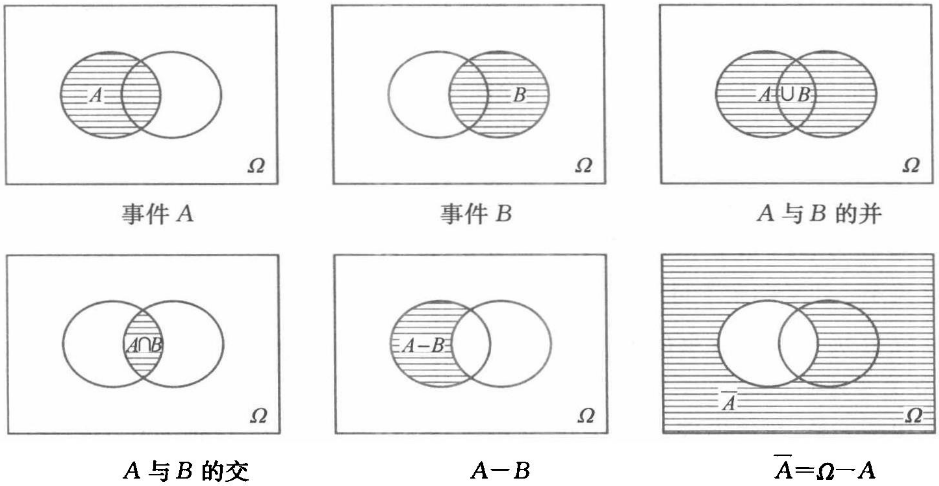


图 1.1.5　事件运算文氏图

3. 运算性质

对任意事件 A、B、C，有

交换律：$A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$　(1.1.1)

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(AB)C = A(BC)$　(1.1.2)

分配律：$A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$　(1.1.3)

对偶律(德莫根公式)：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$(图 1.1.6)，$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$　(1.1.4)

一般地，对于任意事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有：

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n,$$

$$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \cdots \cup \overline{A}_n.$$

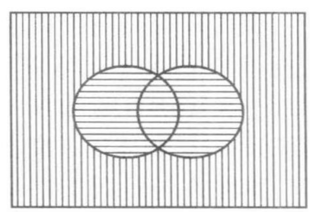


图 1.1.6　$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

这些性质不难用集合中 ω 子集包含或相等关系加以证明. 性质中的对偶关系实际上指的是并交关系可以通过余运算来转换，它在讨论问题时是很有用的. 作为例子我们设法通过它以及分配律中第一个等式来证明分配律中第二个等式：

把事件$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$代入分配律中第一个等式后，有$\overline{A}(\overline{B} \cup \overline{C}) = \overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C}$，两边取余，则成立

$$\overline{(\overline{A}(\overline{B} \cup \overline{C})} = \overline{\overline{A}\,\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{C}},$$

再利用对偶律

$$\overline{\overline{A}} \cup (\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}) = \overline{\overline{A}\,\overline{B}} \cap \overline{\overline{A}\,\overline{C}},$$

进一步可有 $$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$
从而分配律中第二个等式成立.

例 1.1.1 试写出下列随机现象的样本空间:

(1) 一天内进入某超市的顾客数; (2) 某电子元件的寿命;

(3) 车床加工零件的直径 ξ, $\xi\in[a,b]$; (4) 掷两颗骰子出现的点数.

解:(1) $\Omega_1=\{0,1,2,3,\cdots\}$,其中样本点个数为可列无限个;

(2) $\Omega_2=\{t\mid t\geqslant 0\}$,其中样本点个数为不可列个;

(3) $\Omega_3=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,样本点个数为不可列个;

(4) $\Omega_4=\left\{\begin{matrix}(1,1), & (1,2), & \cdots, & (1,6)\\ (2,1), & (2,2), & \cdots, & (2,6)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ (6,1), & (6,2), & \cdots, & (6,6)\end{matrix}\right\}$,样本点个数为 36 个.

例 1.1.2 今掷两颗骰子,记事件 A 为"两颗骰子的点数之和等于 5",事件 B 为"两颗骰子中最大点数为 4",(1) 分别利用集合方式、随机变量方式表示事件 A 与事件 B;(2) 用集合方式分别表示 $A\cup B$, $A\cap B$, $A-B$, $B-A$.

解:(1) 设 ξ, η 分别表示第一颗与第二颗骰子出现的点数,则
$$A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}=(\xi+\eta=5),$$
其中 $(\xi+\eta=5)$ 表示使等式 $\xi+\eta=5$ 成立的样本点全体,即 $\{\omega\mid\xi(\omega)+\eta(\omega)=5\}$. 类似地,$B=\{(1,4),(2,4),(3,4),(4,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}=(\max(\xi,\eta)=4)$.

(2) $A\cup B=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(2,4),(3,4),(4,4),(4,2),(4,3)\}$;

$A\cap B=\{(1,4),(4,1)\}$;

$A-B=\{(2,3),(3,2)\}$;

$B-A=\{(2,4),(3,4),(4,4),(4,2),(4,3)\}$.

例 1.1.3 设 A、B、C 表示三个事件,用 A、B、C 表示如下事件:

(1) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生; (2) A 与 B 发生而 C 不发生;

(3) A、B、C 中至少有两个发生; (4) A、B、C 中至多有两个发生;

(5) A、B、C 中不多于一个发生; (6) A、B、C 中恰有一个发生.

解:(1) 由于 $B\cup C$ 表示 B 与 C 至少有一个发生,故答案为 $A\cap(B\cup C)$;

(2) A 与 B 发生表示 A 和 B 同时发生,即 AB 发生,故答案为 $AB\overline{C}$;

(3) 答案为 $AB\cup BC\cup AC$;

(4) A、B、C 中至多两个发生的对立事件为 ABC 发生,故答案为$\overline{ABC}$;

(5) A、B、C 中不多于一个发生意味着没有两个或两个以上事件同时发生,故答案为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$;

(6) 答案为 $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

例 1.1.4 设 A、B 是随机事件，试证：$\overline{(AB)} = \overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}$.

证：对欲证等式两边取余后变为 $AB = (\overline{\overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}})$，
对右边用对偶定律展开得

$$(\overline{\overline{A}B}) \cap (\overline{A\overline{B}}) \cap (\overline{\overline{A}\,\overline{B}}) = (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup B),$$

再利用分配律展开后，有

$$(A\overline{A} \cup AB \cup \overline{B}\,\overline{A} \cup \overline{B}B) \cap (A \cup B) = (AB \cup \overline{B}\,\overline{A}) \cap (A \cup B)$$
$$= ABA \cup ABB \cup \overline{B}\,\overline{A}A \cup \overline{B}\,\overline{A}B = AB \cup AB = AB,$$

从而原式成立.

例 1.1.5 试问下列命题是否成立？

(1) $A-(B-C) = (A-B) \cup C$；　　(2) 若 $AB = \varnothing$，且 $C \subset A$，则 $BC = \varnothing$；

(3) $(A \cup B) - B = A$；　　(4) $(A-B) \cup B = A$.

解：(1) 由于 $A-(B-C) = A(\overline{B-C}) = A(\overline{B\overline{C}}) = A(\overline{B} \cup C) = A\overline{B} \cup AC$，而 $(A-B) \cup C = A\overline{B} \cup C = A\overline{B} \cup AC \cup \overline{A}C$，注意到 A 与 $\overline{A}$ 互不相容，同时 $\overline{A}C$ 不一定是空集，故原式不成立.

(2) 证法 1：由于 $C \subset A$，故 $CB \subset AB$，从而在 $AB = \varnothing$ 的假设下，总有 $\varnothing = AB \supset CB \supset \varnothing$，这样 $CB = \varnothing$，故原式成立.

证法 2：令 $I_A(\omega)$，$I_B(\omega)$ 分别为 A、B 的示性函数，则 $AB = \varnothing$ 等价于 $I_A(\omega)I_B(\omega) = 0$. 由 $C \subset A$ 可知，$I_C(\omega) \leqslant I_A(\omega)$，其中 $I_C(\omega) \geqslant 0$ 为 C 的示性函数，从而在不等式 $0 \leqslant I_C(\omega) \leqslant I_A(\omega)$ 两边同时乘上非负函数 $I_B(\omega)$ 后有 $0 \leqslant I_C(\omega)I_B(\omega) \leqslant I_A(\omega)I_B(\omega)$，这样由 $I_A(\omega)I_B(\omega) = 0$ 即知 $I_C(\omega)I_B(\omega) = 0$，从而 $BC = \varnothing$，故原式成立.

(3) 原式不成立，其理由是

$$\text{左式} = (A \cup B) - B = (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B} \cup B\overline{B} = A\overline{B} \cup \varnothing = A\overline{B},$$

一般不等于右式 A.

(4) 原式不成立，其理由是

$$\text{左式} = (A-B) \cup B = (A\overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = (A \cup B)\Omega = A \cup B,$$

一般不等于右式 A.

注：从此例可以看出，在事件进行运算时，对减法要特别小心.

1.2 概率的定义及性质

1.2.1 概率的统计定义与几何定义

正如上节所指出的随机事件是概率论中的主要考察对象，随机事件有两个重要特性，即

发生结果与机会大小，其发生结果的多样性可以用引进样本点 ω 的办法处理，而机会大小就要用概率(Probability)来表示. 概率可用多种方法加以定义.

概率的统计定义:在不变条件下重复做 n 次试验，记 m 为 n 次试验中事件 A 发生的次数. 当试验次数 n 很大时，如果频率 $\frac{m}{n}$ 稳定在某一数值 p 的附近摆动，而且一般说来，随着试验次数的增多，这种摆动的幅度愈来愈小，此时数值 p 称为随机事件 A 发生的概率，记作 $P(A)=p$. 上述定义可以简单地说成"概率是频率的稳定值". 频率在一定条件下具有稳定性，这可以用后面的极限定理加以严格证明，也可以用试验加以验证. 历史上曾经有一些著名的统计学家进行过抛掷硬币的试验，其结果如表 1.2.1 所示.

表 1.2.1　硬币试验

试验者	抛掷硬币次数(n)	出现正面次数(m)	频率$\left(\frac{m}{n}\right)$
蒲　丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

模仿上述试验可用 Excel 软件进行仿真. 例如，首先使用统计函数 RANDBETWEEN (−1 000，1 000)产生随机数，然后用 IF 函数，根据随机数的正负确定硬币抛掷后出现正面与反面，经累加可得频数 m，进一步计算频率 $\frac{m}{n}$ 后，就可观察到当 n 变大后频率变化趋势的稳定性. 与物理化学中的实验类似，在概率统计中模拟仿真的正确使用常可帮助验证结论，发现规律，建议读者通过上机实验逐步掌握计算机软件的这一重要功能.

概率的几何定义:若随机现象的样本空间 Ω 是某几何区域，该区域的"测度"(一维时指"长度"，二维时指"面积"等)为 $S_\Omega(S_\Omega<\infty)$，进一步假设随机事件发生具有某种等可能性，即任意一点落入测度相等的子区域(形状可以不同)是等可能的. 若事件 A 表示 Ω 的某个子区域，S_A 为子区域 A 的测度，则 A 发生的概率 $P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}$.

例 1.2.1(会面问题)　甲、乙两人约定在下午 7 时到 8 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人 20 min，过时即可离去，求两人能会面的概率.

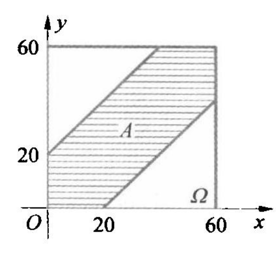


图 1.2.1　区域 Ω 与 A

解:以 7 点 x 分和 7 点 y 分分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间(x、y 的单位:min)，在平面上建立 xOy 直角坐标系(图 1.2.1).

因为甲、乙都是在 0 至 60 min 内等可能地到达，所以这是一个几何概率问题. (x, y)的所有可能取值是边长为 60 的正方形，其面积为 $S_\Omega=60^2$. 而事件 $A=$"两人能够会面"相当于 $|x-y|\leqslant 20$，即图 1.2.1 中的阴影部分，其面积为 $S_A=60^2-$