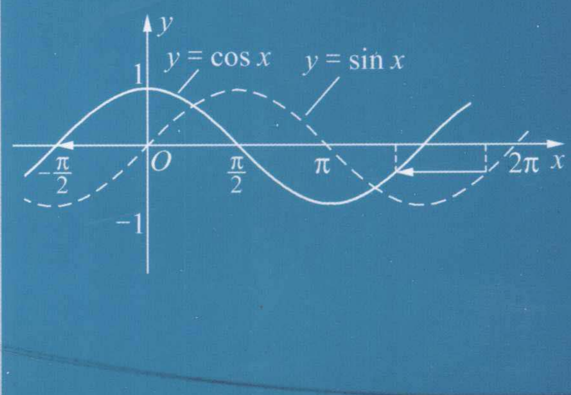
经全国中小学教材审定委员会2004年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学 4

SHU XUE

必修



凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE
凤凰国标教材

普通高中课程标准实验教科书

数学 必修 4

苏教版高中数学教材编写组　编著

凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

主　　　编　单　墫

副　主　编　李善良　陈永高　王巧林

本册主编　樊亚东

主要编写人员　寇恒清　陈光立　祁建新　张乃达　樊亚东　陈永高　等

参与设计　徐稼红　葛福生　仇炳生　石志群

责任编辑　蔡　立

普通高中课程标准实验教科书
书　　名　数学4（必修）
责任编辑　蔡　立
出版发行　凤凰出版传媒集团
凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
发　　行　广东新华发行集团股份有限公司
照　　排　南京展望文化发展有限公司
印　　刷　东莞市雅达彩印有限公司
开　　本　890×1240毫米　1/16
印　　张　7.75
版　　次　2007年6月第3版
2010年5月第6次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5343-6225-5
定　　价　7.07元
盗版举报　025-83658551

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与东莞市雅达彩印有限公司联系调换。
地址：东莞市望牛墩镇朱平沙港口工业区　邮编 523213　电话：（0769）88557911

数学是科学的大门和钥匙.

——伽利略

一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到完善的地步.

——马克思

致 同 学

亲爱的同学,你感到高中阶段的学习生活有趣吗?

我们知道,数学与生活紧密相连.数学可以帮助我们认识世界,改造世界,创造新的生活.数学是高中阶段的重要学科,不仅是学习物理、化学等学科的基础,而且对我们的终身发展有较大的影响.

面对实际问题,我们要认真观察、实验、归纳,大胆提出猜想.为了证实或推翻提出的猜想,我们要通过分析,概括、抽象出数学概念,通过探究、推理,建立数学理论.我们要积极地运用这些理论去解决问题.在探究与应用过程中,我们的思维水平会不断提高,我们的创造能力会得到发展.在数学学习过程中,我们将快乐地成长.

考虑广大同学的不同需要,本书提供了较大的选择空间.

书中的引言、正文、练习、习题中的"感受·理解"部分、阅读、回顾等内容构成一个完整的体系.它体现了教材的基本要求,是所有学生应当掌握的内容.相信你一定能学好这部分内容.

本书还设计了一些具有挑战性的内容,包括思考、探究、链接,以及习题中的"思考·运用"、"探究·拓展"等,以激发你探索数学的兴趣.在掌握基本内容之后,选择其中一些内容作思考与探究,你会更加喜欢数学.

目　　录

本书部分常用符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\overrightarrow{AB}$	向量$\overrightarrow{AB}$
$\|\boldsymbol{a}\|$	向量 $\boldsymbol{a}$ 的模（或长度）
$\|\overrightarrow{AB}\|$	向量$\overrightarrow{AB}$的模（或长度）
$\mathbf{0}$	零向量
$\boldsymbol{e}$	单位向量
$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$	平面直角坐标系中 x，y 轴方向的单位向量
$\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行（共线）
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直
$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和
$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差
$\lambda \boldsymbol{a}$	实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积
$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$	向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积

第1章 三角函数

- 三角函数
  - 任意角、弧度
    - 任意角
    - 弧度制
  - 任意角的三角函数
    - 任意角的三角函数
    - 同角三角函数关系
    - 三角函数的诱导公式
  - 三角函数的图象和性质
    - 三角函数的周期性
    - 三角函数的图象与性质
    - 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象
    - 三角函数的应用

Trigonometry contains the science of continually undulating magnitude . . . .

— Augustus De Morgan

日出日落，寒来暑往……自然界中有许多“按一定规律周而复始”的现象，这种按一定规律不断重复出现的现象称为周期现象. 周期现象一般与周期运动有关. 一个简单又基本的例子便是“圆周上一点的运动”.

如图 1，P 是半径为 r 的圆 O 上一点，点 P 的运动可以形象地描述为“周而复始”. 那么，点 P 按怎样的规律不断重复出现？用什么样的数学模型来刻画呢？

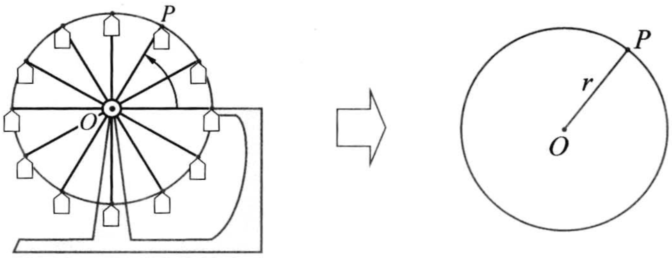


图 1

为了回答上述问题，需要将点 P 表示出来. 我们进行如下思考：

(1) 如图 2 和图 3，以水平方向作参照方向，有序数对 $(r,\ \alpha)$，$(r,\ l)$ 都可以表示点 P；

(2) 如图 4，以水平线为 x 轴，圆心 O 为坐标原点建立直角坐标系，有序数对 $(x,\ y)$ 也可以表示点 P.

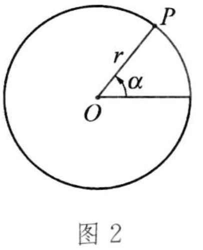


图 2

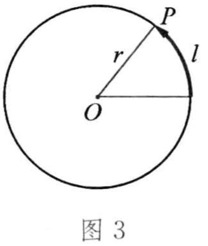


图 3

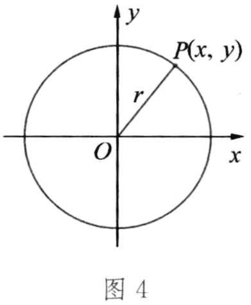
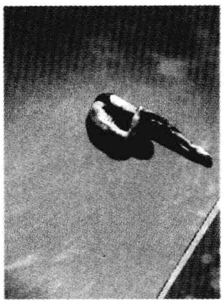


图 4

在表示点 P 的过程中，我们先后选用了角、弧长和直角坐标.

● α, l, x, y 之间有着怎样的内在联系呢？

1.1 任意角、弧度



我们已经学习过一些角，如锐角、直角、钝角、平角、周角. 利用这些角，我们已能表示圆周上某些点 P. 但要表示圆周上周而复始地运动着的点，仅有这些角是不够的. 如点 P 绕圆心旋转一周半，所在位置怎样用角来表示？在生活中，也有类似情形. 如在体操、跳水中，有“转体 720°”、“翻腾两周半”这样的动作名称，“720°”在这里也是用来表示旋转程度的一个角.

● 720°是怎样的一个角？

1.1.1 任意角

一个角可以看做平面内一条射线绕着它的端点从一个位置旋转到另一个位置所形成的图形. 射线的端点称为角的顶点，射线旋转的开始位置和终止位置称为角的始边和终边.

> 约在公元前2 000年，巴比伦人就习惯将圆周划分为 360 度，每度分为 60 分，每分再划分为 60 秒. 这种度量方法一直沿用至今.

如图 1－1－1 所示，射线 OA 绕端点 O，按箭头所示方向旋转到 OB 便形成角 α. 点 O 是角 α 的顶点，射线 OA 和 OB 分别是角 α 的始边和终边. 因此 720°就是旋转两周所形成的角.

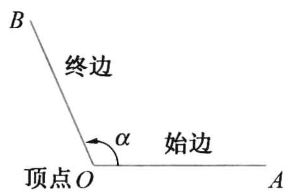


图 1－1－1

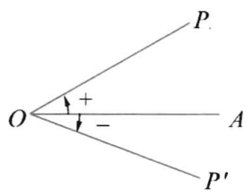


图 1－1－2

为了表示不同旋转方向所形成的角，联想到用正负数可表示具有相反意义的量，我们作如下规定：

按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角. 如果射线没有作任何旋转，那么也把它看成一个角，叫做零角(图 1－1－2).

这样就把角的概念推广到了任意角，包括正角、负角和零角. 图 1－1－3 中的 $\alpha=420°$，$\beta=-150°$.

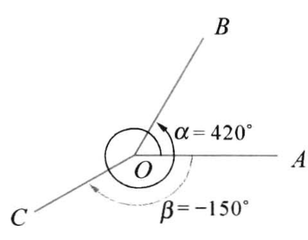


图 1－1－3

> 如果角的终边在坐标轴上，称这个角为轴线角.

为了便于研究，今后我们常以角的顶点为坐标原点，角的始边为 x 轴正半轴，建立平面直角坐标系. 这样，角的终边(除端点外)在第几象限，就说这个角是第几象

限角.

思考

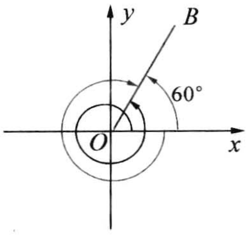


图 1-1-4

(1) $-300°$, $-150°$, $-60°$, $60°$, $210°$, $300°$, $420°$角分别是第几象限角？其中哪些角的终边相同？

(2) 具有相同终边的角彼此之间有什么关系？你能写出与 $60°$角终边相同的角的集合吗？(图 1-1-4)

一般地，与角 α 终边相同的角的集合为

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + \alpha,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

例 1 在 $0°$到 $360°$的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并分别判断它们是第几象限角：

(1) $650°$； (2) $-150°$； (3) $-990°15'$.

分析 只需将这些角表示成 $k \cdot 360° + \alpha(0° \leqslant \alpha < 360°)$ 的形式，然后根据 α 来确定它们所在的象限.

解 (1) 因为

$$650° = 360° + 290°,$$

所以 $650°$的角与 $290°$的角终边相同，是第四象限角.

(2) 因为

$$-150° = -360° + 210°,$$

所以 $-150°$ 的角与 $210°$ 的角终边相同，是第三象限角.

(3) 因为

$$-990°15' = -3 \times 360° + 89°45',$$

所以 $-990°15'$ 的角与 $89°45'$ 的角终边相同，是第一象限角.

例 2 已知 α 与 $240°$角的终边相同，判断 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角.

解 由 $\alpha = k \cdot 360° + 240°(k \in \mathbf{Z})$，可得

$$\frac{\alpha}{2} = k \cdot 180° + 120°(k \in \mathbf{Z}).$$

为什么要对 k 分奇数和偶数进行讨论？

若 k 为偶数，设 $k = 2n$, $n \in \mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2} = n \cdot 360° + 120°(n \in \mathbf{Z}),$$

$\frac{\alpha}{2}$ 与 $120°$角的终边相同，是第二象限角；

若 k 为奇数，设 $k = 2n+1$, $n \in \mathbf{Z}$，则

$$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 360^\circ+300^\circ(n\in\mathbf{Z}),$$

已知 α 与 240° 角的终边相同，怎样判断 2α 是第几象限角？

$\frac{\alpha}{2}$ 与 300° 角的终边相同，是第四象限角.

所以，$\frac{\alpha}{2}$是第二或第四象限角.

思 考

(1) 终边落在 x 轴正半轴上的角的集合如何表示？终边落在 x 轴上的角的集合如何表示？

(2) 终边落在坐标轴上的角的集合如何表示？

(3) 若 α 是第三象限角，则$\frac{\alpha}{2}$是第几象限角？

练 习

1. 下列命题中正确的是(　　).

   A. 第一象限角一定不是负角　　B. 小于 90°的角一定是锐角

   C. 钝角一定是第二象限角　　D. 第一象限角一定是锐角

2. 分别作出下列各角的终边，并指出它们是第几象限角：

   (1) 330°；　(2) -200°；　(3) 945°；　(4) -650°.

3. 在 0°到 360°的范围内，找出与下列各角终边相同的角，并判断它们是第几象限角：

   (1) -55°；　(2) $395^\circ8'$；　(3) $1\,563^\circ$.

4. 试求出与下列各角终边相同的最小正角和最大负角：

   (1) $1\,140^\circ$；　(2) $1\,680^\circ$；　(3) $-1\,290^\circ$；　(4) $-1\,510^\circ$.

5. 若 α 是第四象限角，试分别确定$-\alpha$，$180^\circ+\alpha$，$180^\circ-\alpha$ 是第几象限角.

1.1.2　弧度制

在本章引言中，我们曾考虑用(r, l)来表示点 P，那么，

● r，l 与 α 之间具有怎样的关系呢？

我们已学习过角的度量，规定周角的$\frac{1}{360}$为 1 度的角，这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制(degree measure). 除了采用角度制外，在科学研究中还经常采用弧度制.

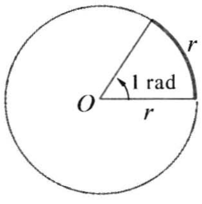


图 1-1-5

长度等于半径的圆弧所对的圆心角叫做 **1 弧度**(radian)的角，记作 1 rad(图 1-1-5). 用弧度作为角的单位来度量角的单位制称为**弧度制**(radian measure).

用弧度表示角的大小时，只要不引起误解，可以省略单位. 例如 1 rad，2 rad，π rad，可分别写成 1，2，π.

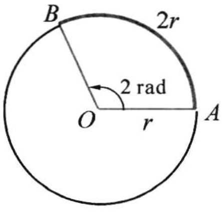


图 1-1-6

正角的弧度数是正数，负角的弧度数是负数，零角的弧度数为 0.

若圆半径为 r，圆心角$\angle AOB$(正角)所对的圆弧长为 $2r$，那么$\angle AOB$ 的弧度数就是 $\frac{2r}{r}=2$ (图 1-1-6).

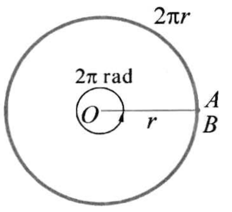


图 1－1－7

若圆半径为 r，圆心角 $\angle AOB$（正角）所对的圆弧长为 $2\pi r$，则 $\angle AOB$ 的弧度数就是 $\frac{2\pi r}{r}=2\pi$（图 1－1－7）. 故有

$$360^\circ = 2\pi\ \text{rad},$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\ \text{rad} \approx 0.017\,45\ \text{rad},$$

$$1\ \text{rad} = \frac{180}{\pi}\ 度 \approx 57.30^\circ.$$

图 1－1－8 给出了一些角的弧度数与角度数之间的关系.

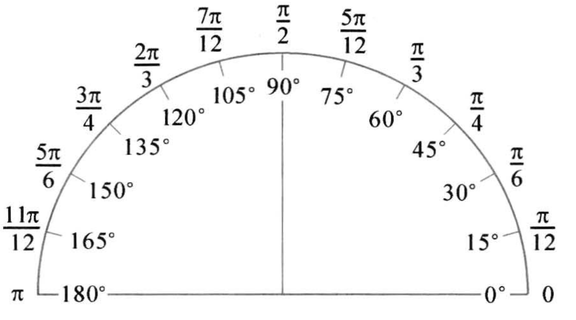


图 1－1－8

例 1 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{3\pi}{5}$； (2) 3.5.

解 (1) $\frac{3\pi}{5}\ \text{rad} = \frac{3\pi}{5} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$；

(2) $3.5\ \text{rad} = 3.5 \times \frac{180^\circ}{\pi} \approx 200.54^\circ$.

例 2 把下列各角从度化为弧度：

(1) 252°； (2) $11^\circ15'$.

解 (1) $252^\circ = 252 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{7\pi}{5}\ \text{rad}$；

(2) $11^\circ15' = 11.25^\circ = 11.25 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{16}\ \text{rad}$.

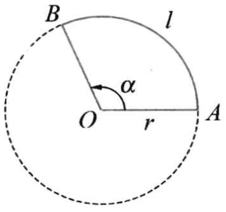


图 1－1－9

如图 1－1－9，设长度为 r 的线段 OA 绕端点 O 旋转形成角 α（α 为任意角，单位为弧度），若将此旋转过程中点 A 所经过的路径看成是圆心角 α 所对的弧，设弧长为 l，则有

$$|\alpha| = \frac{l}{r},$$

即
$$l=|\alpha|r.$$
特别地，若取 $r=1$，则有
$$l=|\alpha|.$$

若 $|\alpha|\leqslant 2\pi$，则有圆心角为 α 的扇形的面积为
$$S=\frac{|\alpha|}{2\pi}\cdot\pi r^2=\frac{1}{2}rl.$$

例3 已知扇形的周长为 8 cm，圆心角为 2 rad，求该扇形的面积.

解 设扇形的半径为 r，弧长为 l，

则有 $\begin{cases}2r+l=8,\\ l=2r,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r=2,\\ l=4.\end{cases}$

故扇形的面积为 $S=\frac{1}{2}rl=4(\text{cm}^2)$.

角的概念推广以后，在弧度制下，角的集合与实数集 **R** 之间就建立起一一对应关系：每一个角都对应惟一的一个实数；反过来，每一个实数也都对应惟一的一个角.（图 1-1-10）

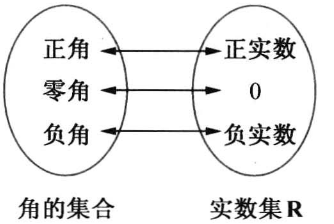


图 1-1-10

练 习

1. （口答）把下列各角从度化为弧度：

(1) 180°； (2) 90°； (3) 45°；
(4) 30°； (5) 120°； (6) 270°.

2. （口答）把下列各角从弧度化为度：

(1) 2π； (2) $\frac{\pi}{2}$； (3) $\frac{\pi}{6}$； (4) $\frac{2}{3}\pi$.

3. 把下列各角从度化为弧度：

(1) 75°； (2) −210°； (3) 135°； (4) 22°30′.

4. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $\frac{\pi}{12}$； (2) $\frac{2}{5}\pi$； (3) $-\frac{4}{3}\pi$； (4) -12π.

5. 若 $\alpha=-6$，则角 α 的终边在（　　）.

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

6. 已知半径为 240 mm 的圆上，有一段弧的长是 500 mm，求此弧所对的圆心角的弧度数.

习题 1.1

感受·理解

1. 在 $0°$ 到 $360°$ 范围内，找出与下列各角终边相同的角，并指出它们是第几象限角：

(1) $-265°$； (2) $3\,900°$； (3) $-840°10'$； (4) $560°24'$.

2. 写出与下列各角终边相同的角的集合，并把集合中适合不等式 $-360° \leqslant \alpha \leqslant 360°$ 的元素 α 写出来：

(1) $60°$； (2) $-75°$； (3) $90°$； (4) $-180°$.

3. 把下列各角从度化为弧度：

(1) $12°30'$； (2) $-200°$； (3) $355°$； (4) $-186°45'$.

4. 如果 α 与 $120°$ 角终边相同，那么 $\frac{\alpha}{2}$ 是第几象限角？

5. 终边落在直线 $y=x$ 上的角的集合如何表示？

6. 把下列各角化成 $\alpha+2k\pi(0 \leqslant \alpha < 2\pi,\ k \in \mathbf{Z})$ 的形式，并指出它们是第几象限角：

(1) $\frac{23}{6}\pi$； (2) $-1\,500°$； (3) $-\frac{18}{7}\pi$； (4) $672°$.

7. 把下列各角从弧度化为度：

(1) $-\frac{5}{12}\pi$； (2) $\frac{8\pi}{3}$； (3) $\frac{2}{3}$； (4) 1.4.

8. 已知扇形的半径为 10 cm，圆心角为 $60°$，求扇形的弧长和面积.

9. 蒸汽机飞轮的直径为 1.2 m，以 300 r/min(转/分)的速度作逆时针旋转，求：

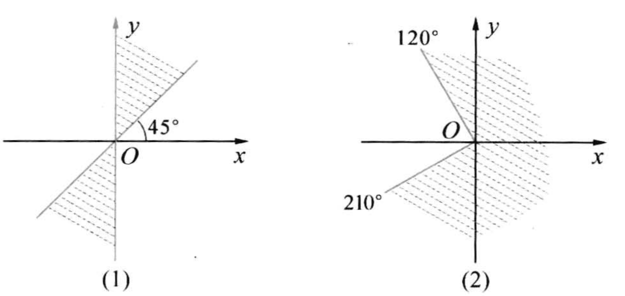
(1) 飞轮 1 s 内转过的弧度数；

(2) 轮周上一点 1 s 内所经过的路程.

思考·运用

10. 已知 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，角 β 的终边与角 α 的终边关于直线 $y=x$ 对称，求角 β 的集合.

11. 如图，写出终边落在阴影部分的角的集合(包括边界).



（第 11 题）

探究·拓展

12. 设 θ 是第一象限角，试探究：

(1) 2θ 一定不是第几象限角？

(2) $\frac{\theta}{3}$ 是第几象限角？

1.2 任意角的三角函数

用$(r,\ \alpha)$与用坐标$(x,\ y)$均可表示圆周上点 P，那么，这两种表示有什么内在联系？确切地说，

● 用怎样的数学模型刻画$(x,\ y)$与$(r,\ \alpha)$之间的关系？

1.2.1 任意角的三角函数

在初中，我们利用直角三角形定义了锐角三角函数(图 1－2－1(1)).

在平面直角坐标系中，设 α 的终边上任意一点 P 的坐标是$(x,\ y)$，它与原点的距离是 $r(r=\sqrt{x^2+y^2}>0)$.

当 α 为锐角时(图 1－2－1(2))，过 P 作 $PM\perp x$ 轴，垂足为 M. 在 $\mathrm{Rt}\triangle OPM$ 中，$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}$.

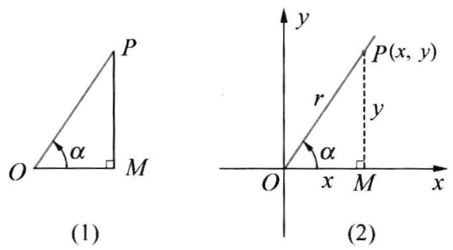


图 1－2－1

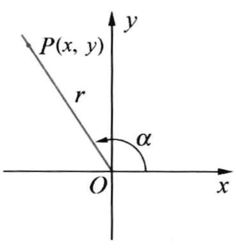


图 1－2－2

● 怎样将锐角的三角函数推广到任意角的三角函数？

一般地，对任意角 α(图 1－2－2)，我们规定：

(1) **比值$\dfrac{y}{r}$叫做α的正弦，记作 $\sin\alpha$，即**

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$

(2) **比值$\dfrac{x}{r}$叫做α的余弦，记作 $\cos\alpha$，即**

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

(3) **比值$\dfrac{y}{x}$$(x\neq 0)$叫做$\alpha$的正切，记作 $\tan\alpha$，即**

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}.$$

对于确定的角 α，比值$\dfrac{y}{r}$和$\dfrac{x}{r}$都惟一确定，故正弦和余弦都是角 α

的函数. 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，角 α 的终边在 y 轴上，故有 $x=0$，这时 $\tan\alpha$ 无意义. 除此之外，对于确定的角 $\alpha\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})\right)$，比值 $\dfrac{y}{x}$ 也是惟一确定的，故正切也是角 α 的函数. $\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 分别叫做角 α 的正弦函数、余弦函数、正切函数. 以上三种函数都称为三角函数(trigonometric function).

由定义可知，正弦函数、余弦函数、正切函数的值在各象限的符号，如图 1-2-3 所示：

正弦函数值的符号与 y 的符号相同，余弦函数值的符号与 x 的符号相同.

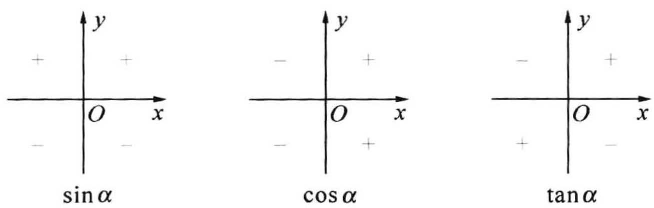


图 1-2-3

下面我们来研究正弦、余弦、正切这三种三角函数值的几何表示.

由于 $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$ 与点 $P(x, y)$ 在角 α 终边上的位置无关，为简单起见，我们取 $r=1$，即选取角 α 终边与单位圆(圆心在原点，半径等于单位长度的圆)的交点为 $P(x, y)$，则 $\sin\alpha=y$，$\cos\alpha=x$(图 1-2-4).

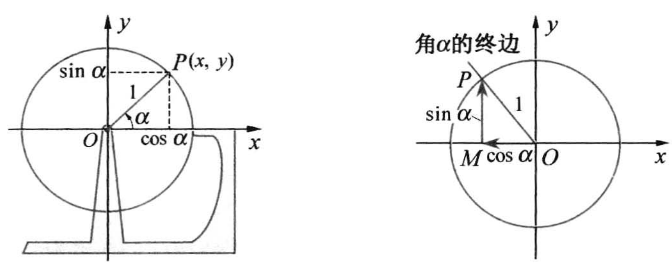


图 1-2-4

过点 P 作 x 轴的垂线，垂足为 M，显然，线段 OM 的长度为 $|x|$.

为了去掉绝对值符号，我们引入有向线段的概念.

规定了方向(即规定了起点和终点)的线段称为有向线段. 类似地，可以把规定了正方向的直线称为有向直线. 若有向线段 AB 在有向直线 l 上或与有向直线 l 平行，根据有向线段 AB 与有向直线 l 的方向相同或相反，分别把它的长度添上正号或负号，这样所得的数，叫做有向线段的数量，记为 AB.

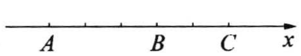


图 1-2-5

如图 1-2-5，x 轴上有三点 A，B，C，则 $AB=3$，$BC=2$，$CB=-2$.

引入有向线段的概念后，如果 $x>0$，有向线段 OM 与 x 轴同向，其数量为 x；如果 $x<0$，有向线段 OM 与 x 轴反向，其数量也为 x. 故总有 $OM=x$. 同理可知 $MP=y$. 所以，