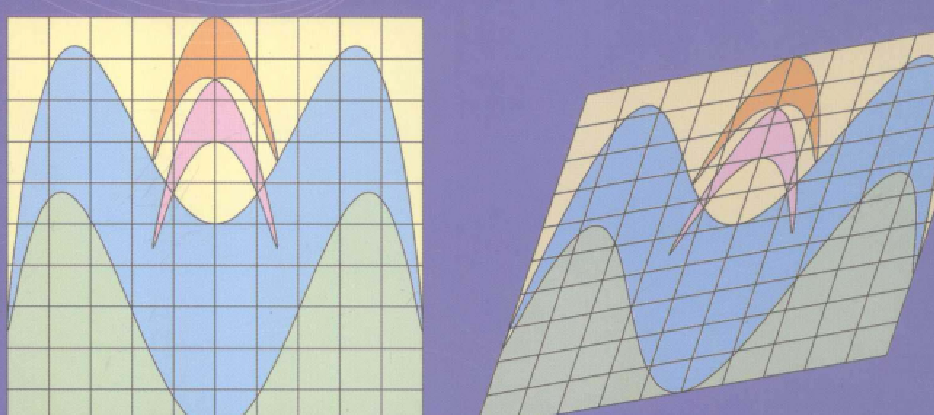
经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过

普通高中课程标准

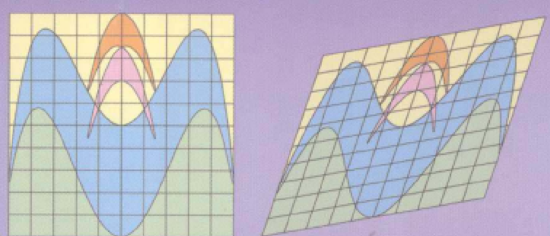
实验教科书

选修系列4－2

矩阵与变换



湖南教育出版社



ISBN 7-5355-4609-9

9 787535 546098 >

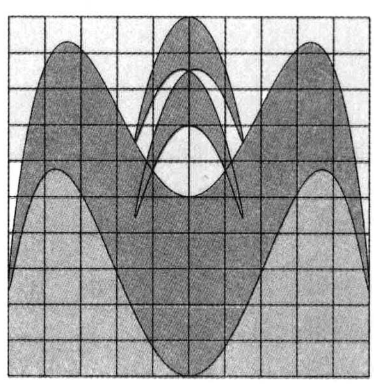
G · 4604 定价：6.80元

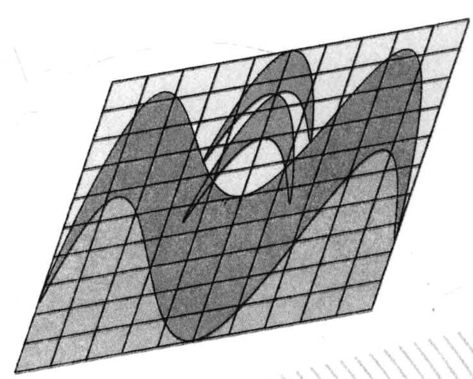
普通高中课程标准

实验教科书

选修系列 4–2

矩阵与变换





普通高中课程标准实验教科书
选修 4—4
坐标系与参数方程
责任编辑：孟实华　邹伟华　甘　哲
美术编辑：肖　毅
技术插图：徐　航
湖南教育出版社出版发行（长沙市韶山北路 643 号）
网　　址：http：//www.hneph.com
电子邮箱：postmaster @ hneph.com
湖南省新华书店经销
湖南新华印刷集团有限责任公司印刷
890 × 1240　16 开　印张：4.75　字数：110000
2005 年 8 月第 1 版　2006 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 7 - 5355 - 4606 - 4 / G · 4601
定价：6.30 元

动态的解析几何

学习平面几何，需要将一个图形在保持形状不变的前提下移动，与另一个图形比较，看它们是否全等或相似．需要将图形作平移、旋转、轴对称或位似变换来研究它们的几何性质．

生活、生产和科学研究中大量用到图形的变换．

图形是由点组成的．只要知道了图形上每个点变到什么位置，就确定了图形的变换．

平面上的变换，是一种对应关系，将平面上每个点 P 对应到平面上某一点 P'．

平面上建立了直角坐标系，就可以将点的位置与坐标对应起来．只要知道了变换前的点的坐标(x,y)与变换后的点的坐标(x',y')之间的函数关系，就确定了平面上的变换．

x'，y'与 x，y 之间最简单的函数关系是常数项为零的一次函数关系$\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy. \end{cases}$

将其中的一次项系数排成一个表$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，这个表称为矩阵．这个矩阵就刻画了这个变换．

通过对矩阵及其运算的研究就可以研究变换的性质．

我们以前学的解析几何，将点对应于坐标，曲线对应于方程，这可以说是“静态的”解析几何．现在研究点和曲线的运动，将变换对应于矩阵，是“动态的”解析几何，是更高级的解析几何．

作 者

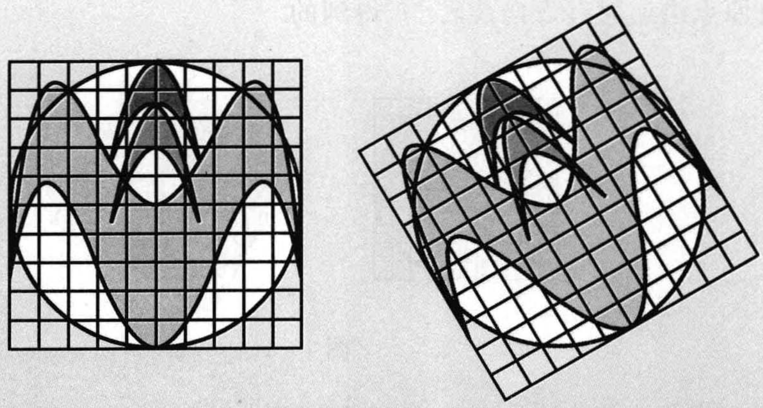
2004 年 12 月

目录

第 1 章

平面上的变换与矩阵

星移斗转落银河，
月印三潭伴碧波.
保长保短皆变换，
能伸能屈是几何.



变换是点到点的对应关系，可以用点的坐标之间的函数关系来刻画.

矩阵反映了坐标之间的变换关系，是研究变换的有力工具.

平面上的变换，是一种对应关系，将平面上每个点 P 对应到平面上某一点 P'，将 P 的坐标(x,y)对应到 P' 的坐标(x',y').

x'，y' 与 x，y 之间最简单的函数关系是常数项为零的一次函数关系 $\begin{cases} x'=ax+by, \\ y'=cx+dy. \end{cases}$

将一次项系数排成一个表 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，称为矩阵. 这个矩阵就刻画了这个变换.

1.1 旋转变换

实验 观察图 1－1 中的图形. 其中右边的图形是由左边的图形绕原点沿逆时针方向旋转 30°得到的.

图形的旋转使用得很广泛. 比如，由数码照相机拍出的照片，有时候就需要在计算机上作适当旋转，以适合我们的需要.

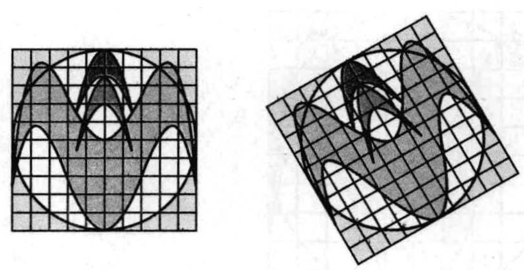


图 1－1

试自己摹仿画出图 1－1 中的图形.

先画左边的图形. 这个图形包括：与 x 轴平行的直线和与 y 轴平行的直线，以原点为中心的圆，曲线图形.

先将左边的平行直线画好，组成网格. 再将圆画好. 然后再根据曲线每一部分在网格中的位置画出曲线图形. 这也是实际画图的人员经常采用的方法：先画格子，再以格子为背景画出图形.

右边的图形怎么画？需要将左边的图形作旋转.

直线由两点决定. 只要在旋转前的每条直线上选两点，画出这两点旋转后的位置，再连接起来就得到旋转后的直线. 当然，你可以在作出其中的一条之后，将它平行移动作出与它平行的那一组直线.

圆由圆心和半径决定. 经过旋转后这个圆的半径和圆心都没有变，圆也不变.

将旋转后的直线网格作好之后，以它为背景画出旋转后的曲线图形.

图 1－1 是计算机画出来的. 很多计算机软件都可以根据图形的方程画出图形.

假定你已经会使用计算机软件画图. 要画出图 1－1，就需要知道其中各图形的方程.

直线和圆的方程你可以自己建立. 要画出旋转后的直线，需要根据原来的方程得出旋转后的方程.

如果想利用计算机软件画出图 1－1 中的曲线图形，需要知道以下信息：曲线由两部分组成，两部分的参数方程分别是：

$$\begin{cases} x=1.5\sin 4t, \\ y=-3\sin 3t\ \sin 5t+2, \end{cases} t\in[0,2\pi)；\quad \begin{cases} x=5\sin 2t, \\ y=5\sin 3t\ \sin 5t, \end{cases} t\in[0,2\pi).$$

对于区间$[0,2\pi)$内每一个值 t，代入参数方程就得到一点. 让 t 取遍曲线$[0,2\pi)$内所有的值，得到的所有的点就组成一个曲线图形. 可以让计算机软件根据这个方程画出它的图形.

怎样将这个曲线图形旋转 30°？参数 t 的每一个值确定旋转前的曲线上的一个点，需要由这个点的坐标算出它旋转后的坐标，计算机可以根据所有这些点旋转后的坐标画出旋转后的图形.

问题 反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象是什么曲线？

反比例函数 $y=\dfrac{1}{x}$的图象 C 如图 1－2. 我们知道它的图象是双曲

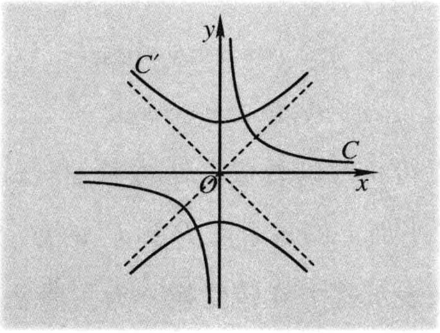


图 1－2

线. 但是它的方程 $y=\dfrac{1}{x}$ 不是双曲线的标准方程. 需要将它的图象 C 绕原点旋转 45° 变成曲线 C'，C' 的方程才有可能是双曲线的标准方程. 为了由 C 的方程求出 C' 的方程，需要知道 C 上每一点 $P(x,y)$ 与旋转后的点 $P'(x',y')$ 的坐标之间的关系.

你知道怎样由旋转前的坐标计算旋转后的坐标吗?

例 1 设平面上建立了直角坐标系，如图 1-3. 所有的点绕原点沿逆时针方向旋转同一个角 α. 求点 $P(x,y)$ 经过旋转之后到达的点 P' 的坐标 (x',y').

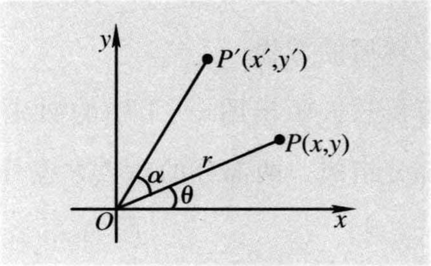


图 1-3

解 将 P 的位置用向量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度 $r=|OP|$ 和方向角 $\theta=\angle xOP$ 来表示. 点 P 的坐标 (x,y) 可以用 r，θ 表示为

$$\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta. \end{cases}$$

$\overrightarrow{OP}$ 旋转到 $\overrightarrow{OP'}$，长度 $|OP'|=|OP|=r$ 不改变；方向角增加 α，变为 $\angle xOP'=\angle xOP+\alpha=\theta+\alpha$. 于是点 P' 的坐标为

$$\begin{cases} x'=r\cos(\theta+\alpha)=r\cos\theta\cos\alpha-r\sin\theta\sin\alpha=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=r\sin(\theta+\alpha)=r\cos\theta\sin\alpha+r\sin\theta\cos\alpha=x\sin\alpha+y\cos\alpha, \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} x'=x\cos\alpha-y\sin\alpha, \\ y'=x\sin\alpha+y\cos\alpha. \end{cases} \quad ①$$

平面上绕原点旋转 α 可以看成一个变换(transformation)，称为旋转变换，它建立了平面上的每个点 P 到 P' 的对应关系.

用一个字母 $\boldsymbol{T}$ 来表示这个旋转变换. 为了表示点 P 对应 P'，写成 $P'=\boldsymbol{T}(P)$，称 P' 是 P 在变换 $\boldsymbol{T}$ 作用下的像(image). 并且用箭头

来表示 P 与 P' 的这种关系：

$$\boldsymbol{T}: P \mapsto P' \text{ 或 } \boldsymbol{T}: P \mapsto \boldsymbol{T}(P).$$

在平面上建立了直角坐标系之后，每个点 P 由坐标 (x,y) 表示，当然点 $P'=\boldsymbol{T}(P)$ 也用坐标 (x',y') 表示. 因此，$\boldsymbol{T}$ 也建立了这两个点的坐标之间的对应：

$$\boldsymbol{T}:(x,y)\mapsto(x',y').$$

只要指明了怎样由 x，y 计算 x' 和 y'，就刻画清楚了这个变换 $\boldsymbol{T}$. 比如，例 1 中得出的关系式(1)，就刻画了绕原点旋转角 α 的变换.

例 2　设变换 $\boldsymbol{T}$ 将平面上每个点绕原点旋转 $\frac{\pi}{2}$. 求以下点的像：

$A(0, 0)$，　$B(2, 1)$，　$C(0, 1)$，　$D(1, -2)$.

解　由例 1 的结果①，知道每一点 $P(x,y)$ 的像 $P'(x',y')$ 的坐标为

$$\begin{cases} x'=x\cos\frac{\pi}{2}-y\sin\frac{\pi}{2}=-y, \\ y'=x\sin\frac{\pi}{2}+y\cos\frac{\pi}{2}=x. \end{cases} \quad ②$$

将 A，B，C，D 的坐标代入关系式②可算出它们的像的坐标，分别为

$A(0, 0)\mapsto A'(0, 0)$，　　$B(2,1)\mapsto B'(-1, 2)$，

$C(0, 1)\mapsto C'(-1, 0)$，　　$D(1, -2)\mapsto D'(2, 1)$.

例 1 得到的关系式①左边的 x'，y' 组成点 P' 的坐标 (x', y')，可以看成向量 $\overrightarrow{OP'}$ 的坐标，排成一列 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 的形式，称为**列向量**(column vector). 可以利用向量记号将关系式①的两个等式合成一个向量等式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x\cos\alpha-y\sin\alpha \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{pmatrix} \quad ③$$

表示左右两边向量的分量对应相等.

为了叙述方便，我们有时还用一个字母表示一个列向量. 比如，

变换与函数有类似之处. 函数 f 是将定义域中的每个数 x 对应到值域中的某个数 y，记为 $y=f(x)$. 变换与函数的区别只是：函数是数到数的对应，而变换是点到点的对应.

以后凡是说旋转 α，都是沿逆时针方向旋转，如果沿顺时针方向旋转 α，那就是旋转 $-\alpha$.

在本教材以后的叙述中，总是将每个点 P 对应于向量 $\overrightarrow{OP}$，将 P 的坐标 (x, y) 也看作向量 $\overrightarrow{OP}$ 的坐标，并且经常写成列向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的形式. 两个列向量相等，是指它们的分量对应相等. 列向量可以进行向量的运算.

记 $X_1=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$，$X_2=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$，写 X_1+X_2 表示它们的和，λX_1 表示实数 λ 与 X_1 的积.

表达式③的右边的两个分量 $x\cos\alpha-y\sin\alpha$，$x\sin\alpha+y\cos\alpha$ 都是自变量 x，y 的常数项为 0 的一次函数，它们的自变量 x，y 是 P 的坐标，可以看作$\overrightarrow{OP}$的坐标，用列向量$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$表示. 将这两个一次函数的自变量 x，y 分离出去之后，让 4 个系数排成 2 行 2 列的数表

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \tag{4}$$

的形式，表达式③就成为

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}. \tag{5}$$

将⑤式右边$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$中的每一行的系数与$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$中的字母 x，y 分别对应相乘再相加，就还原成为表达式③的右边.

一般地，如果变换 $\boldsymbol{T}:P(x,y)\mapsto P'(x',y')$前后坐标之间的关系具有如下的形式：

$$\begin{cases}x'=ax+by,\\ y'=cx+dy.\end{cases} \tag{6}$$

也就是 x'，y'都是 x，y 的常数项为 0 的一次函数，就将这样的变换 $\boldsymbol{T}$ 称为**线性变换**(linear transformation)，此时可以将变换表达式⑥写成

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \tag{7}$$

的形式. 不同的线性变换的差别仅仅在于一次函数表达式中的 4 个系数 a，b，c，d 的不同. 因此，这 4 个数排成的 2 行 2 列的数表$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$决定了平面上的线性变换. 我们将这样由 4 个数排成的 2 行 2 列的数表称为 2 行 2 列的**矩阵**(matrix)，也称为 2×2 矩阵. 表达式

⑦所描述的变换完全由矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{⑧}$$

决定，我们称它为这个变换的矩阵．而称这个变换是由这个矩阵表示的变换．

例如，由旋转变换的表达式⑤可知：绕原点旋转 α 的变换是线性变换，它的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

将矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 每一行的系数与列向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的两个变量分别相乘再相加得到 $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ 的过程称为矩阵与列向量的乘法，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}. \tag{⑨}$$

在按⑨的法则做矩阵与列向量的乘法的时候，a，b，c，d，x，y 可以是任何数．比如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\times5+2\times6 \\ 3\times5+4\times6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

例 3 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 表示什么变换？

解法 1 这个矩阵表示的变换 $\boldsymbol{T}: P(x, y)\mapsto P'(x', y')$ 满足条件

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{即} \quad \begin{cases} x'=x, \\ y'=y. \end{cases}$$

于是 P'，P 的坐标相同，是同一点．变换 $\boldsymbol{T}$ 将每个点 P 变到自己，也就是使每个点保持不动．

解法 2 将矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与绕原点旋转 α 的变换的矩阵 $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ 相比较，发现 A 就是 $\alpha=0$ 的情形，因此 A 表示的变

注意：

$\begin{cases} x'=(-1)x+0y, \\ y'=0x+(-1)y, \end{cases}$

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$

换是绕原点旋转角为 0 的变换，所有的点在此变换下都不动.

将平面上所有的点都保持不动的变换称为**恒等变换**(identity transformation).

例 4 将直角坐标平面上所有的点 $P(x, y)$变到 P 关于原点的中心对称点 $P'(x', y')$，这样的变换称为中心对称变换. 试求点 $P(x, y)$的中心对称点 P'的坐标(x', y').

中心对称变换是否线性变换？如果是，求出它的矩阵.

解法 1 $\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y, \end{cases}$ 因此中心对称变换是线性变换，它的矩阵为 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

解法 2 中心对称就是绕对称中心(本题对称中心为原点)旋转角 π. 由例 1 知它是线性变换，变换矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

习题 1

1. 将平面绕原点沿逆时针方向旋转 90°，写出表示变换的矩阵.

2. 变换 $\boldsymbol{T}: P(x,y) \mapsto P'(x', y')$由以下表达式决定：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(1) 写出由 x，y 计算 x'，y'的表达式；

(2) 已知点 $O(0, 0)$，$A(1, 0)$，$B(1, 1)$，$C(0, 1)$，计算这 4 个点经过变换之后的像 O'，A'，B'，C'的坐标. 正方形 $OABC$ 被 $\boldsymbol{A}$ 变成什么图形？

(3) 试说明变换 $\boldsymbol{T}$ 的几何意义；

(4) 变换 $\boldsymbol{T}$ 将(2)中的点 O'，A'，B'，C'分别变到 O''，A''，B''，C''，分别求 O''，A''，B''，C''的坐标.

3. 计算矩阵与列向量的乘积：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

1.2 旋转变换中图形的变化

平面上的变换 $\boldsymbol{T}$ 将每个点 P 变到某个点 $T(P)$，也就将平面上的每个图形 G 变成某个图形 $T(G)$，图形 $T(G)$ 由图形 G 中所有的点在 $\boldsymbol{T}$ 作用下的像组成.

例 1 设变换 $\boldsymbol{T}$ 将每个点绕原点 O 沿逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$. 点 A 的坐标为(1,1). 以下图形变成什么图形？

(1) 点 A；　　(2) 线段 OA；

(3) 直线 $y=x$；　　(4) 直线 l：$x+y=1$；

(5) 反比例函数 C：$y=\frac{1}{x}$的图象.

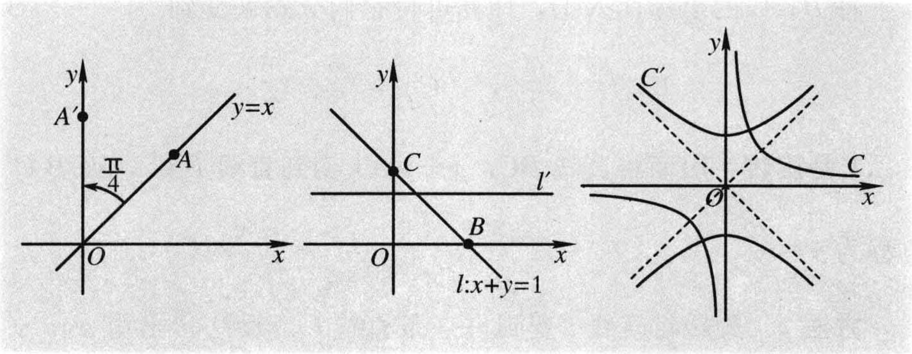


图 1－4

解 $\boldsymbol{T}$ 的变换矩阵是

$$\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

点 $P(x, y)$与它在变换 $\boldsymbol{T}$ 作用下的像 $P'(x', y')$的坐标之间的关系为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y. \end{cases} \quad ①$$

显然原点 $O(0, 0)$ 仍旋转到 $O(0, 0)$.

(1) 设点 $A(1, 1)$ 变到点 $A'(x', y')$. 则由①得

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

因此，点 $A(1, 1)$ 变到点 $A'(0, \sqrt{2})$.

(2) 线段 OA 变到线段 OA'，A' 坐标为 $(0, \sqrt{2})$.

(3) 直线 OA：$y=x$ 变到直线 OA'，OA' 即是 y 轴，即直线 $x=0$.

(4) **方法 1** 直线 $x+y=0$ 分别与坐标轴交于

$$B(1, 0), C(0, 1).$$

将 B，C 的坐标代入①，计算可得它们分别被变到

$$B'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$\boldsymbol{T}$ 是旋转，因而将直线 BC：$x+y=1$ 变到直线 $B'C'$，而 $B'C'$ 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

方法 2 旋转将直线 l 变到另一条直线 l'. 设法求出由 x'，y' 表示 x，y 的表达式，代入直线 l 的方程 $x+y=1$ 就可得到 l' 的方程.

关系式①是由 x，y 表示 x'，y' 的关系式，要得到由 x'，y' 表示 x，y 的关系式，可以在关系式①中将 x'，y' 当作已知数，解二元一次方程组求出未知数 x，y. 分别将①的两式相加、相减(后一式减前一式)，再除以 $\sqrt{2}$，得

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \\ y = \dfrac{y'-x'}{\sqrt{2}}. \end{cases} \quad ②$$