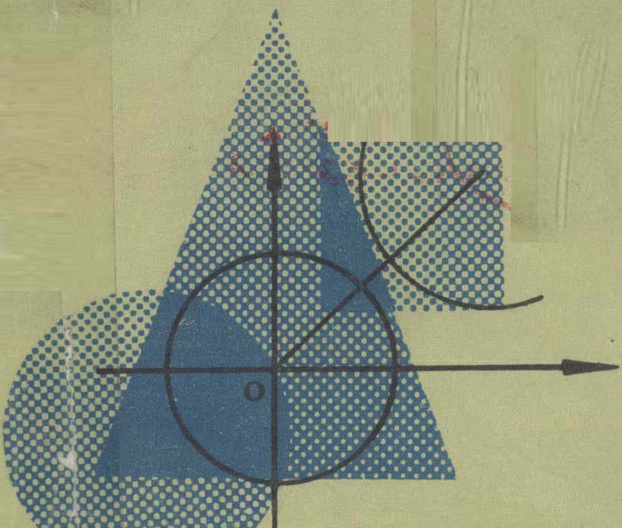
HONGXUESHUXUE
HUXINGJIEHEJIETI
ANGFAYUJIQIAO

中学数学

数形结合解题方法与技巧



林 涛 刘友莲 编著

广西民族出版社

中 学 数 学

数形结合解题方法与技巧

林 涛　　刘友莲　编著

广西民族出版社

（桂）新登字02号

中 学 数 学

数形结合解题方法与技巧

林涛　刘友莲　编著

☆

广西民族出版社出版
广西新华书店发行
广西永福县印刷厂印刷

开本787×1092　1／32　8印张　166千字
1992年9月第一版　1992年9月第一次印刷
印数：1—5,000册
ISBN 7-5363-1806-5/G·618

定价：3.60元

数形本是相倚依，焉能分作两边飞？
数缺形时少直觉，形少数时难入微，
数形结合百般好，隔离分家万事休，
几何代数统一体，永远联系莫分离。
——华罗庚

如果一个特定的问题可以被转化为一个图形，那么思想就整体地把握了问题，并且能创造性地思索出问题的解法。
——斯蒂恩

前　言

作为中学数学的一个重要的学习方法和解题思维方式——数形结合在当前的数学教学中的地位越来越重要。为了适应数学教学改革形势发展的需要，本书作者凝聚了二十多年的教学经验及最新教学参考资料的精粹，试图通过丰富的解题实例系统地叙述在中学数学中典型而又常见的数形结合的解题方法与技巧，旨在帮助广大青少年学生开拓视野，提高解题的能力和速度，以搞好平时的数学学习及适应各级各类的考试。同时，也希望能为广大数学教师的教学工作提供一点微薄的帮助。

在编写本书的过程中，得到广西南宁三中高级教师葛鹏飞同志的大力协助和认真校正，在此表示感谢。

由于我们的水平有限，书中一定存在不足之处，恳请读者不吝指教，不胜感激。

编著者

1992年2月15日

目　　录

诸 论

数学是一门研究空间形式与数量关系的自然科学。人们在认识和改造自然的过程中发现数与形之间有着紧密的联系，数与形是数学研究中两个不同的侧面，在一定条件下，它们可以互相转化，相辅相成。数学中的数与式是一种从实践生活中抽象出来的量，然大量的数式问题却又潜存在着它们的图形背景，挖掘出两者的潜在关系，利用图形具体、直观的特点往往能帮助我们去解决困难、繁琐的数学问题，克服研究数与式的抽象枯燥的推理及冗长的计算的困难。

十七世纪法国数学家笛卡尔通过建立坐标系，将平面上的点与有关序实数对对应、曲线与方程联系起来，用数量关系研究图形的性质，为研究几何图形开辟了新的捷径。而反过来我们又可以借助于几何图形的直观和具体化去降低某些代数问题的难度。在中学数学中，数轴上的点与实数集，笛卡尔（直角）坐标平面上的点与有序实数对、高斯平面（复平面）上的点与复数的一一对应关系等是数形结合解题的基础。我们常用的数形之间的关系有：勾股定理、锐角三角函数、函数及其图象、解析几何中两点间距离公式、直线的斜率、二次曲线方程等等。

透彻地了解代数式或方程的几何意义是我们能灵活地运用数形结合的方法去解决数学问题的前提。例如我们看到一个复数方程$|z-z_0|=2$就应了解$|z-z_0|$是复平面上两

个点Z与Z_0之间的距离，如果z_0是常量，则$|z-z_0|=2$的几何意义便是复平面上到定点Z_0的距离等于2的点集，显然Z对应的点集应是一个以Z_0为圆心2为半径的圆。又如我们遇到代数式二次三项式x^2+bx+c就可联想起平面上两点间距离公式，将它化为

$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2=\left[x-\left(-\frac{b}{2}\right)\right]^2+\left(0-\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)^2$$

而将它看成是平面上点A（x，0）到点$B\left(-\frac{b}{2},\frac{\sqrt{4c-b^2}}{2}\right)$的距离的平方等等。同一个问题，由于采用不同的角度去观察考虑，从而产生了很多妙不可喻、令人拍案叫绝的解法，从中体现了数学内在的和谐美。从而溅起了思维灵感的火花，产生认识的飞跃。）

中学数学中的数与形关系分常规性的数形结合与非常规数形结合。前者是教科书中叙述到的几何图形的性质、函数图象、曲线方程、复数及其几何意义等。后者是客观实际中的没有一定内在联系的数与形的关系。如用某一特定的几何图形及格点、点阵树形图等用以反映抽象的数量关系。又如我们熟悉的用正六边形的六个顶点代表六个三角函数，借助它的边与对角线可以反映同角三角函数的平方倒数、商数关系等。非常规的数形结合由于它需要更高层次的思维方式，所以使用起来较为困难。

从现代数学的角度看来，数形结合的解题思想实质上是现代数学中作为科学方法的映射观点（RMI原则）。其原理是：给定一个含有目标原象x的关系结构系统R，如果能找

到一个确定的映射φ，将R映入或映满R*，R*也是一个关系结构系统，R与R*的两种结构之间在φ的对应下有某种不变的联系。如果我们能用依x所满足的R中结构关系找出R*中相应的数学结构关系，并定出$x^*=\phi(x)$，那么，通过反演映射φ^{-1}就可以找到目标对象$x=\varphi^{-1}(x^*)$，它将符合我们的原意。这个映射原则，它的核心是在映射φ的作用下，R与R*的结构之间存在某种意义的不变性。从形到数，从数到形的转化过程，形式完全变了，但实质未变，二者反映的是同一问题，只是表现的形式及叙述的语言不同而已。如几何图形中两点之间直线段的长度最短这一公理与解几中表示两点间的距离$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$这一代数式的最小值，这两者都是反映平面上两个点之间的最短距离这一客观事实。尽管有时这两者之间的确定的映射φ是隐蔽的和复杂的，但这些不变的规律性是存在的。象这样在平几这个关系结构系统R与解几这个关系结构系统R*之间存在某种意义下的不变性，现代数学中称之为同构。因此，数形结合的思想实质是属于同构思想的范畴。

总而言之，自觉地使用数形结合方法解决数学问题的能力是反映学生数学素养高低的一个重要体现。在学习中经常性地使用数形结合的思维方式能使我们加深对数学知识的内在联系的认识，培养起良好的数学思维品质，从而达到开拓视野，增强能力，发展智力的目的。

为便于在校学生学习使用，本书将按现行教学大纲取材并基本按照现行教材顺序叙述。

第一章　集合

集合中常用文氏图来反映集合与集合之间，集合与元素之间的关系。用一个长方形表示全集 I（图 1—1），一个圆表示某个集合 A（图 1—2），两个圆相交的部分表示 $A\cap B$（图 1—3），两个圆所覆盖的区域表示 $A\cup B$（图 1—4），在全

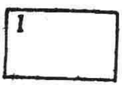


图 1—1

图 1—2

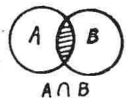


图 1—3

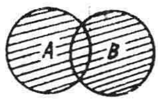


图 1—4

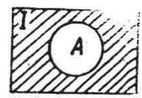


图 1—5

集 I 中除去圆 A 之外的区域表示 $\overline{A}$（图 1—5），一个全集 I 中若有两个真子集 A、B，经常将全集分成四个区域 $A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$（或写成 $\overline{A\cup B}$）。

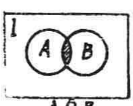


图 1—6

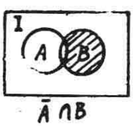


图 1—7

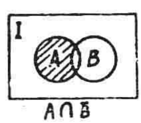


图 1—8

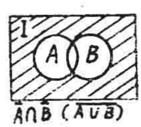


图 1—9

利用文氏图经常可帮助我们解决很多的集合中繁冗的推理和计算问题。

例 1　设 $I=\{x\mid x$ 为不大于20的质数$\}$ 为全集，且 $A\cap\overline{B}=\{3,5\}$，$\overline{A}\cap B=\{7,19\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,17\}$，求集合 A，B。

解：依题意 $I=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

$\because\quad A\cap\overline{B}=\{3,5\}$，$\overline{A}\cap B=\{7,19\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{2,17\}$

又$\because$ 交集中具有的元素，原集合中必具有，于是

$\overline{A}=\{2,7,17,19\}$

$\overline{B}=\{2,3,5,17\}$

$\therefore\quad A=\{3,5,11,13\}\quad B=\{7,11,13,19\}$

以上推理过程显得有点抽象，若用文氏图则一目了然。

画出一个矩形表示全集 I，在 I 中画两个相交的圆 A、B。依题意，先在 $A\cap\overline{B}$ 的区域填上 3，5；然后在 $\overline{A}\cap B$ 区域填上 7，19，再在 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 区域填上 2，17；则余下 $A\cap B$ 的区域只好填上 I 中剩下的两个数11，13。这样从图上立即看出结果。$A=\{3,5,11,13\}\quad B=\{7,11,13,19\}$。

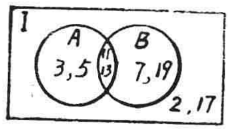
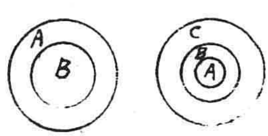


图 1—10

我们常用一个大圆 A 中含有一个小圆 B 来表示 $B\subset A$ 的关系，利用它可帮助我们理解题意，寻求解题的途径。



(1)　　　(2)

图1—11

例2　证明：对于集合 A、B、C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$。

证：画出文氏图来观察⊙A 包含在⊙B中，⊙B又包含在⊙C中明显看出⊙A包含在⊙C中。（见图 1—11(2)）

从定义出发，设 x 是集合 A 中的任一元素，

$\because\ A\subset B \qquad \therefore\ x\in B$

又$\because\ B\subset C \qquad \therefore\ x\in C$

这就是说 A 中的任一元素都是 C 中的元素。

又$\because\ A\subset B \quad \therefore$ B中至少有一个元素 y，$y\notin A$

而 $B\subset C \quad \therefore\ y\in C$

这就是说 C 中至少有一个元素不属于 A，

$\therefore$ A 为 C 的真子集

说明：使用文氏图不能代替严格的理论证明，我们使用图形的直观性及代数抽象的理论证明的严密性相结合，才能完满地解决问题。

例3 设全集 I 含12个元素，$A\cap B$ 含 2 个元素，$\overline{A}\cap\overline{B}$ 含 4 个元素，$\overline{A}\cap B$ 含 3 个元素，求集合 A，B 所含元素的个数。

解：如图，画出全集 I 及集 A、B，先在 $A\cap B$ 的区域上填上②（表示该集含有 2 个元素），然后在 $\overline{A}\cap\overline{B}$ 区域处填上④，再在 $\overline{A}\cap B$ 处填上③，由于全集有12个元素，所以在 $B\cap A$ 处填上③，表明求出该集含有 3 个元素。于是从图中可看出 A，B 中各有 5 个元素。

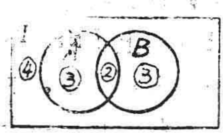


图 1—12

说明：要解决这类问题，首先要清楚地了解各区域的含义。详见章首的叙述部分。

例4 某班有30个学生，其中19人会打乒乓球，16人会

打网球，如果每人至少会打两种球中的一种，问会打两种球的有几个人？

解：设全班学生集合为I，n(I)=30，会打乒乓球的学生和会打网球的学生组成的集合分别为A，B。

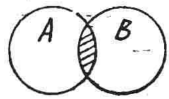


图1—13

n(A)=19，n(B)=16

结合文氏图可看出下列关系，

$$n(I)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\therefore\quad n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(I)$$

$$=19+16-30$$

$$=5$$

即会打两种球的学生有5人。

说明：由于每人至少会打一种球，所以全集$I=A\cup B$。又由于会打乒乓球和会打网球的总人数35多于全班人数30，必定会有某些人会打两种球，即$A\cap B$非空。全集I元素的个数应为A，B中元素的和还要减去$A\cap B$中元素的个数，从文氏图看出⊙A，⊙B所覆盖的面积等于⊙A的面积加上⊙B的面积减去两圆重复部分的面积。

例5 某校先后举行数、理、化竞赛，学生中至少参加一种的有：数学800人，物理700人，化学400人，至少参加两种的有数学、物理500人，数学、化学300人，物理、化学200人，三种都参加的有150人，试计算参加竞赛的学生总人数。

解：设参加竞赛的学生集合为I，参加数、理、化竞赛的学生的集合分别为A、B、C。

则　$n(A)=800$，$n(B)=700$，$n(C)=400$，

$n(A\cap B)=500$，$n(A\cap C)=300$，

$n(B\cap C)=200$，$n(A\cap B\cap C)=150$

∵　$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$

∴　$n(A\cup B\cup C)=800+700+400-500-300-200+150=1050$

说明：单凭推理去理解（1）式是相当困难的，但结合文氏图去考虑就直观多了。图中⊙A、⊙B、⊙C所覆盖的面积等于三个圆的面积之和减去每两个圆叠加部分的面积后，由于三个圆叠加的部分的面积被多减去过一次，应该加回一次。

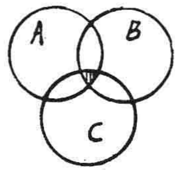


图 1—14

如果您对（1）的关系式还是想得不够清楚，如下图你可将各块小区域编上号，则

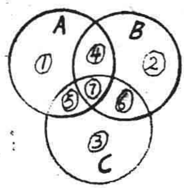


图 1—15

A=①+④+⑤+⑦

B=②+④+⑥+⑦

C=③+⑤+⑥+⑦

于是A+B+C=①+②+③+④+⑤+⑥+⑦+④+⑤+⑥+2×⑦

∴　①+②+③+④+⑤+⑥+⑦=A+B+C−④−⑤−⑥−2×⑦=A+B+C−（④+⑦）−（⑤+⑦）−（⑥+⑦）+⑦

例6 设全集 $I=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in R\}$，集合 $M=\{(x,\ y)\mid \dfrac{y-3}{x-2}=1\}$，$N=\{(x,\ y\mid y\neq x+1\}$，那么 $\overline{M\cup N}$ 等于

(A) ϕ；(B) $\{(2,\ 3)\}$；(C) $(2,\ 3)$；

(D) $\{(x,\ y)\mid y=x+1\}$。

解：I 是 xoy 平面上的点集，M 是直线 $y=x+1$ 上除去点 $(2,\ 3)$，N 是平面上除直线 $y=x+1$ 以外的点，从图上直观看出 $\overline{M\cup N}$ 应为一点 $(2,\ 3)$ 所组成的集合，∴选(B)。

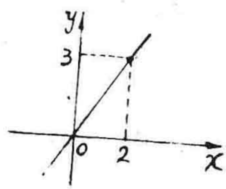


图1—16

习 题 一

1．已知集合 $I=\{x\mid x$ 为不大于30的质数$\}$，A、B 是 I 的两个子集，且满足 $A\cap\overline{B}=\{5,\ 13,\ 23\}$，$\overline{A}\cap B=\{11,\ 19,\ 29\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3,\ 7\}$，求A，B。

2．已知全集 $I=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，$\overline{A}\cap B=\{3,\ 7\}$，$A\cap\overline{B}=\{2,8\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$，求集合A、B。

3．某班50名学生考数学、语文、英语三门课程，其中不及格的人数如下：9人数学不及格，4人语文不及格，6

人英语不及格，3人数学、语文两科不及格，4人数学、英语两科不及格，2人语文、英语不及格，1人三科全不及格，求三科都及格的学生人数。

4．某班学生组成篮球队、排球队和乒乓球队各有14、15、13人。已知同时参加这三个队的有3人，既参加篮球队又参加排球队的有5人，仅参加排球队的有5人，仅参加乒乓球队的有4人，问仅参加篮球队的有几人？

5．某市举行中学生数、理、化三科竞赛，参加竞赛的学生分别依次有807人、739人、437人，其中参加数学、物理两科竞赛的有513人，参加物理、化学竞赛的有267人，参加数学、化学竞赛的有371人，三科都参加竞赛的有213人，问参加竞赛总共有多少人？

第二章 方　程

含有未知数的等式称为方程。如$5x+1=0$，$3x^2-6x+7=0$等。如果我们将方程的左边看成是一个函数式的话，则方程不过就是对应的函数的函数值为0时的特殊情况，对一元方程来说，这时方程$f(x)=0$的根的几何意义就是函数$y=f(x)$的图象与x轴交点的横坐标，对二元方程来说方程的解就是xoy平面上的一条直线。

了解方程的根的几何意义，是我们运用数形结合方法来解题的基础。

在一元一次方程中，$ax+b=0$（$a\neq0$）对应的一次函数为$y=ax+b$。它的图象是一条直线，这条直线与x轴是否有交点取决于a、b的取值。

①$a=0$，$b\neq0$时直线$y=ax+b$与ox轴平行，对应的方程$ax+b=0$无根。

②$a\neq0$，$b\in R$时，直线$y=ax+b$与ox轴有交点，这时方程$ax+b=0$有根。

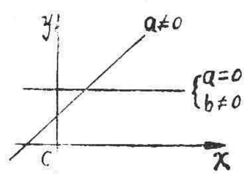


图2—1

在一元二次方程中，$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）对应的函数为$y=ax^2+bx+c$，它的图象是一条抛物线。抛物线与x轴是否有交点及交点所在范围取决于a、b、c的取