



普通高等教育“十一五”规划教材

大学数学教学丛书

微积分 (下册)

主编 张 琴
编者 朱立勋 闫 厉
单国栋 张志尚

经管类



科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
大学数学教学丛书

微积分(经管类)

(下 册)

主 编 张 琴
编 者 朱立勋 闫 厉
单国栋 张志尚

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书由一线数学教师结合多年的教学实践编写而成. 全书把微积分和相关经济学知识有机结合, 内容的深度和广度与经济类、管理类各专业微积分教学要求相符.

全书分上、下两册, 共 12 章. 本书是下册, 内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程、MATLAB 在微积分中的应用. 各节均配有一定量的习题, 章末附有自测题, 书后附有习题答案.

本书可供普通高等院校经济类、管理类各专业及相关专业教学使用, 也可供学生自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(经管类)下册/张琴主编. —北京: 科学出版社, 2010
普通高等教育“十一五”规划教材·大学数学教学丛书
ISBN 978-7-03-028168-5

I. 微… II. 张… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 123316 号

责任编辑: 张中兴 于俊杰 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

明辉印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本: B5(720 × 1000)

2010 年 8 月第一次印刷 印张: 36 3/4

印数: 1—3 000 字数: 738 000

定价: 55.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目 录

第 7 章 空间解析几何与向量代数	287
§7.1 空间直角坐标系	287
7.1.1 空间直角坐标系的概念	287
7.1.2 空间中点的坐标	288
7.1.3 空间中两点的距离公式	288
§7.2 向量及其线性运算	289
7.2.1 向量的概念	289
7.2.2 向量的线性运算	290
7.2.3 利用坐标作向量的线性运算	292
7.2.4 向量的模、方向角、投影	293
习题 7.2	295
§7.3 数量积 向量积 * 混合积	295
7.3.1 数量积 (点积、内积)	295
7.3.2 向量积 (叉积、外积)	298
*7.3.3 混合积	300
习题 7.3	301
§7.4 平面及其方程	301
7.4.1 平面的点法式方程	301
7.4.2 平面的一般方程	303
7.4.3 两平面的夹角	304
7.4.4 点到平面的距离	306
习题 7.4	307
§7.5 空间直线及其方程	307
7.5.1 空间直线的一般方程	307
7.5.2 空间直线的对称式方程与参数式方程	307
7.5.3 两直线的夹角	308
7.5.4 直线与平面的夹角	309

习题 7.5	311
§7.6 曲面及其方程	311
7.6.1 曲面方程的概念	311
7.6.2 旋转曲面	313
7.6.3 柱面	315
7.6.4 二次曲面	316
习题 7.6	319
§7.7 空间曲线及其方程	319
7.7.1 空间曲线的一般方程	319
7.7.2 空间曲线的参数方程	320
*7.7.3 曲面的参数方程	322
7.7.4 空间曲线在坐标面上的投影	323
习题 7.7	324
章末自测 7	325
第 8 章 多元函数微分学	328
§8.1 多元函数的基本概念	328
8.1.1 多元函数的概念	328
8.1.2 二元函数的极限与连续	330
习题 8.1	332
§8.2 偏导数	333
8.2.1 偏导数的概念	333
8.2.2 二阶偏导数	336
8.2.3 偏导数在经济学中的应用	339
习题 8.2	340
§8.3 全微分	341
8.3.1 全微分的概念	341
8.3.2 全微分在近似计算中的应用	343
习题 8.3	345
§8.4 多元复合函数求导法则	345
8.4.1 多元复合函数的求导法则	345
8.4.2 全微分形式不变性	350
习题 8.4	351

§8.5 隐函数的求导法则	352
8.5.1 一个方程确定的隐函数的求导法则	352
8.5.2 一个方程组确定的隐函数的求导法则	354
习题 8.5	356
§8.6 二元函数的极值和最值	357
8.6.1 二元函数的极值	357
8.6.2 条件极值	360
8.6.3 拉格朗日乘数法	361
习题 8.6	363
章末自测 8	364
第 9 章 重积分	369
§9.1 二重积分的概念与性质	369
9.1.1 二重积分的概念	369
9.1.2 二重积分的性质	372
§9.2 二重积分的计算	373
9.2.1 直角坐标系下二重积分的计算	373
9.2.2 极坐标系下二重积分的计算	379
习题 9.2	382
章末自测 9	384
第 10 章 无穷级数	388
§10.1 常数项级数的概念与性质	388
10.1.1 常数项级数的概念	388
10.1.2 收敛级数的基本性质	392
10.1.3 收敛级数的必要条件	394
习题 10.1	395
§10.2 正项级数及其审敛法	396
10.2.1 正项级数的概念	396
10.2.2 正项级数的审敛法	396
习题 10.2	404
§10.3 任意项级数	404
10.3.1 交错级数	405
10.3.2 绝对收敛与条件收敛	407

习题 10.3	410
§10.4 幂级数	410
10.4.1 函数项级数	410
10.4.2 幂级数及其收敛性	411
10.4.3 幂级数的运算和性质	415
习题 10.4	420
§10.5 函数的幂级数展开	420
10.5.1 泰勒级数	420
10.5.2 函数展开成幂级数	422
10.5.3 函数展开成幂级数的应用	427
习题 10.5	429
章末自测 10	430
第 11 章 微分方程与差分方程	433
§11.1 微分方程	433
11.1.1 引例	433
11.1.2 微分方程的基本概念	434
习题 11.1	437
§11.2 可分离变量方程与齐次方程	438
11.2.1 可分离变量方程	438
11.2.2 齐次方程	440
习题 11.2	443
§11.3 一阶线性微分方程	443
11.3.1 一阶线性微分方程的概念	443
*11.3.2 伯努利方程	448
习题 11.3	450
§11.4 可降阶的高阶微分方程	451
11.4.1 $y^{(n)} = f(x)$ 型微分方程	451
11.4.2 $y'' = f(x, y')$ 型微分方程	452
11.4.3 $y'' = f(y, y')$ 型微分方程	453
习题 11.4	455
§11.5 线性微分方程解的性质与解的结构	455
11.5.1 二阶线性齐次方程解的结构	456

11.5.2 线性非齐次方程解的结构	457
习题 11.5	458
§11.6 二阶常系数齐次线性微分方程	458
习题 11.6	462
§11.7 二阶常系数非齐次线性微分方程	462
11.7.1 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型	462
11.7.2 $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型	466
习题 11.7	468
§11.8 差分方程	469
11.8.1 差分的一般概念	469
11.8.2 差分方程的一般概念	471
11.8.3 一阶常系数线性差分方程	472
11.8.4 二阶常系数线性差分方程及其解的性质	476
11.8.5 二阶常系数线性齐次差分方程的解	476
11.8.6 二阶常系数线性非齐次差分方程的解法	478
习题 11.8	480
§11.9 微分方程和差分方程的应用	481
11.9.1 一阶微分方程的应用	481
11.9.2 二阶微分方程的应用	488
11.9.3 微分方程在经济中的应用	495
11.9.4 差分方程在经济中的应用	497
习题 11.9	499
章末自测 11	499
第 12 章 MATLAB 在微积分中的应用	502
§12.1 MATLAB 基础	502
§12.2 MATLAB 在一元函数微分学中的应用	507
12.2.1 应用 MATLAB 求一元函数的极限	507
12.2.2 应用 MATLAB 求一元函数的导数与微分	508
12.2.3 一元函数微分学的应用在 MATLAB 中实现	510
§12.3 MATLAB 在一元函数积分学中的应用	515
12.3.1 应用 MATLAB 求一元函数的不定积分与定积分	515
12.3.2 一元函数的积分学的应用在 MATLAB 中实现	519

§12.4	MATLAB 在多元函数微积分学中的应用	522
12.4.1	应用 MATLAB 求多元函数的极限、偏导数与全微分	522
12.4.2	多元函数微分学的应用在 MATLAB 中的实现	523
12.4.3	应用 MATLAB 计算二重积分	527
§12.5	MATLAB 在级数和微分方程中的应用	529
12.5.1	应用 MATLAB 求级数的和及判别级数的敛散性	529
12.5.2	应用 MATLAB 求函数的泰勒展开式	531
12.5.3	求解微分方程在 MATLAB 中实现	531
12.5.4	应用 MATLAB 绘图	532
习题答案		536
参考文献		563

第 7 章 空间解析几何与向量代数

自然界中的很多量既有大小、又有方向, 对它们进行抽象、研究和发展, 就得到了数学中的向量. 向量在自然科学与工程技术中有着广泛的应用, 是一种重要的数学工具. 平面解析几何使一元函数的微积分有了直观的几何意义; 相应的, 为了学习多元函数的微积分, 必须先学习空间解析几何的知识.

本章首先介绍空间直角坐标系, 进而引进向量的概念, 然后利用向量学习平面的方程和直线的方程及其解法, 最后介绍空间曲面方程的基本概念、空间曲线的基本概念, 使学生完成从二维到三维的思维跨越.

§7.1 空间直角坐标系

7.1.1 空间直角坐标系的概念

为了确定平面上任意一点的位置, 我们建立了平面直角坐标系. 现在, 为了确定空间任意一点的位置, 相应的就要引入空间直角坐标系.

在空间中任意取定一点 O (称为原点), 过 O 点作三条两两垂直的直线, 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴 (有刻度和单位长度), 依次记作 x 轴 (横轴)、 y 轴 (纵轴)、 z 轴 (竖轴), 统称为坐标轴. 它们构成一个直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 坐标系 (图 7-1-1). 具体作图时, 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线. 按要求, 它们的三个正方向之间符合右手规则: 即右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从 x 轴的正向以 90° 角度转向 y 轴的正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向.

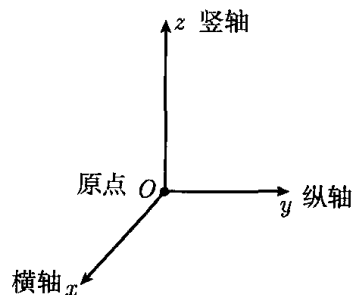
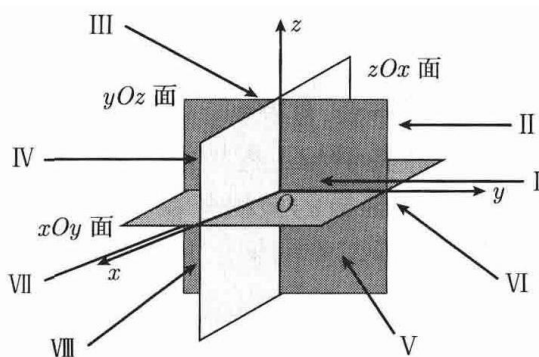


图 7-1-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这三个平面统称为坐标面. x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面, 另两个面由 y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的坐标面分别称为 yOz 面及 $zOx(xOz)$ 面.

三个坐标面把空间分成八个部分, 每一个部分称为一个卦限. 包含 x 轴和 y 轴及 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限; 第二卦限、第三卦限、第四卦限, 同样在 xOy 面的上方, 按逆时针方向 (视线在 z 轴正方向) 确定. 第五至第八卦限, 在

xOy 面的下方, 在第一卦限之下的部分称为第五卦限, 其他第六、第七、第八卦限同样按逆时针方向确定. 这八个卦限分别由字母 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示, 如图 7-1-2 所示.



空间直角坐标系共有八个卦限

图 7-1-2

总结: 空间直角坐标系的核心知识可以概括为 1, 3, 3, 8. 即: 一个原点; 三条坐标轴; 三个坐标面; 八个卦限.

7.1.2 空间中点的坐标

设 M 是空间中的任意一点, 过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴, 并和 x 轴、 y 轴和 z 轴分别交于 P 、 Q 、 R 三点. 点 P 、 Q 、 R 分别称为点 M 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影. 设这三个投影在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次为 x 、 y 、 z . 于是空间任意一点 M 唯一地确定了一个有序数组 x, y, z . 反过来, 对于给定的有序数组 x, y, z , 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P , 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q , 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R , 过点 P 、 Q 、 R 分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的三个平面, 这三个平面的交点 M 就是有序数组 x, y, z 确定的唯一点 (图 7-1-2). 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标, 按序称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标, 并把点 M 记为 $M(x, y, z)$.

7.1.3 空间中两点的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 则

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 7-1-1 求证以 $M_1(4, 3, 1)$, $M_2(7, 1, 2)$, $M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14,$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6,$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6,$$

所以 $|M_2M_3| = |M_3M_1|$, 即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 7-1-2 在 z 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 及 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

解 因为所求点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0, 0, z)$, 依题意有

$$|MA| = |MB|,$$

即

$$\begin{aligned} & \sqrt{(0+4)^2 + (0-1)^2 + (z-7)^2} \\ &= \sqrt{(3-0)^2 + (5-0)^2 + (-2-z)^2}, \end{aligned}$$

两边去根号, 解得

$$z = \frac{14}{9}.$$

所以, 所求点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$.

§7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 如位移、速度、加速度、力等, 这样一类既有大小又有方向的量则称为向量(或矢量).

数学中用一条有向线段来表示向量, 向量的表示符号是 \mathbf{a} 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$ (以 M_1 为起点、 M_2 为终点的有向线段, 见图 7-2-1. 有向线段的长度表示向量的大小, 向量的大小则称为向量的模, 向量 \mathbf{a} 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模依次记作 $|\mathbf{a}|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$. 模为 1 的向量则称为单位向量, 记作 $|\mathbf{a}^0|$ 或 $|\overrightarrow{M_1M_2}^0|$.

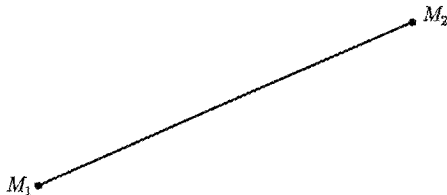


图 7-2-1

模长为 0 的向量则称为零向量, 记为 0 . 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看做是任意的.

数学中我们只研究与起点无关的向量, 不考虑起点位置的向量则称为自由向量(简称向量). 如果遇到起点位置有关的向量, 在一般的原则下做特殊处理.

如果两个向量 a 与 b 大小相等, 且方向相同则称向量 a 与 b 是相等的, 记作 $a = b$. 由于我们只讨论自由向量, 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果两个向量 a 与 b 大小相等但方向相反, 则称向量 b 是向量 a 的负向量, 记作 $a = -b$. 空间直角坐标系中任一点与原点构成的向量称为向径. 两个非零向量 a 与 b 方向相同或相反的向量称为向量 a 与 b 平行, 记作 $a // b$ (可认为零向量与任何向量平行).

7.2.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

设两个向量 a 与 b , 则 $a + b$ 可以由下列两种方式 (法则) 表示 (本质是一样的):

(1) 平行四边形法则 (类似力学上求合力的平行四边形法则) $a + b = c$, 见图 7-2-2;

(2) 三角形法则 $a + b = c$, 见图 7-2-3.

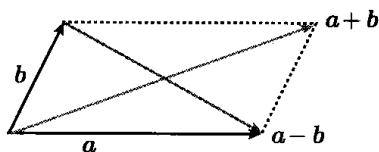


图 7-2-2

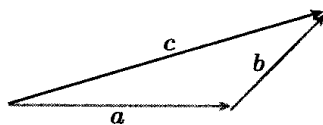


图 7-2-3

向量的加法符合下列运算规律:

- (1) 交换律 $a + b = b + a$;
- (2) 结合律 $(a + b) + c = a + (b + c)$.

2. 向量的减法

$(a + b) - b = a$ (图 7-2-4);

$a - b = c$ (图 7-2-6).

注意减法特殊情况: 若 $a // b$, 则

- (1) 同向: $|c| = |a| + |b|$.
- (2) 反向: $|c| = |a| - |b|$.

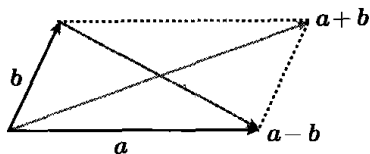


图 7-2-4

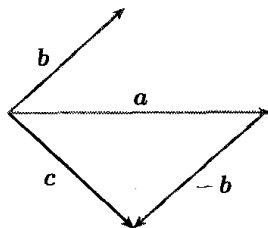


图 7-2-5

由于三角形两边之和大于第三边. 结合向量运算法则可得如下结论:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数, 向量 \mathbf{a} 与 λ 的乘积记作 $\lambda\mathbf{a}$. 规定 $\lambda\mathbf{a}$ 为一个向量, 它的模和方向有如下情况 (图 7-2-6):

- (1) 当 $\lambda > 0$ 时, λ 与 \mathbf{a} 同向, $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;
- (2) 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda\mathbf{a}| = 0$;
- (3) 当 $\lambda < 0$ 时, λ 与 \mathbf{a} 反向, $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$.

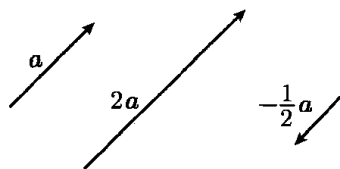


图 7-2-6

4. 数与向量的乘积的运算律

数与向量的乘积符合下列运算规律:

- (1) 结合律: $\lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$.
- (2) 分配律: $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

向量相加、减及数乘向量统称为向量的线性运算.

5. 两个向量的平行关系

两个向量的平行关系由下面定理描述.

定理 7-2-1 设向量 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 那么, 向量 \mathbf{b} 平行于向量 \mathbf{a} 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

证明 条件的充分性显然, 下面证明条件的必要性.

设 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$, 取 $|\lambda| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 当 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 同向时 λ 取正值, 当 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 反向时 λ 取负值, 即有 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$. 这是因为此时 \mathbf{b} 与 $\lambda\mathbf{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, 又设 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 两式相减, 得 $(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0}$, 即 $|\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0$. 因 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

定理证毕.

前面已经介绍了模为 1 的向量为单位向量, 设向量 a^0 表示非零向量 a 的单位向量, 按照向量与数的乘积规定, 由于 $|a| > 0$, 所以 $|a|a^0$ 与 a 的方向相同. 所以

$$\frac{a}{|a|} = a^0 \Rightarrow a = |a|a^0.$$

上式表明: 一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 7-2-1 化简 $a - b + 5\left(-\frac{1}{2}b + \frac{b - 3a}{5}\right)$.

$$\text{解 } a - b + 5\left(-\frac{1}{2}b + \frac{b - 3a}{5}\right) = a - b + \left(-\frac{5}{2}\right)b + b - 3a = -2a - \frac{5}{2}b.$$

7.2.3 利用坐标作向量的线性运算

任给向量 r , 对应点 M , 使 $r = \overrightarrow{MO}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RBCM - OQAP$, 如图 7-2-7 所示.

由此可有向量的坐标表示: $r = \overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$. 设 $\overrightarrow{OP} = xi$, $\overrightarrow{OQ} = yj$, $\overrightarrow{OR} = zk$, 则 $r = \overrightarrow{MO} = xi + yj + zk$.

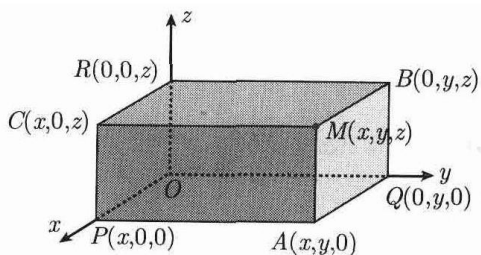


图 7-2-7

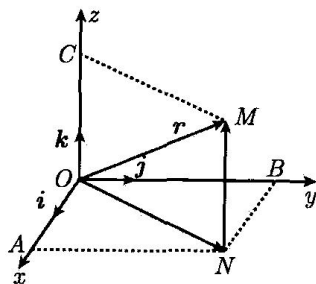


图 7-2-8

上式称为向量 r 的坐标分解式, xi , yj , zk 称为三个坐标轴方向的分向量. i , j , k 称为三个坐标轴方向的单位分向量, 见图 7-2-8.

$$a = (a_x, a_y, a_z), \quad b = (b_x, b_y, b_z), \quad (\lambda \text{ 为实数})$$

$$a \pm b = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z),$$

$$\lambda a = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

当 $a \neq 0$ 时

$$b // a \Leftrightarrow b = \lambda a$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}.$$

例 7-2-2 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5x - 3y = a, \\ 3x - 2y = b, \end{cases}$ 其中 $a=(2,1,2)$, $b=(2,2,1)$.

解

$$x = 2a - 3b = 2(2, 1, 2) - 3(2, 2, 1) = (-2, -4, 1)$$

$$y = 3a - 5b = 3(2, 1, 2) - 5(2, 2, 1) = (-4, -7, 1)$$

7.2.4 向量的模、方向角、投影

1. 向量的模

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 则

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2. 方向角与方向余弦

记 $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\varphi = \angle AOB$ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) 称为向量 a , b 的夹角, 记作 $(a, b) = \varphi$ (图 7-2-9).

r 和 i, j, k 所成的角, 称为 r 的方向角, 依次记为 α, β, γ (图 7-2-10). 方向角的余弦称为其方向余弦.

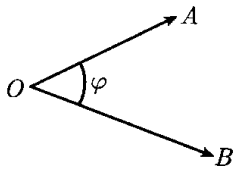


图 7-2-9

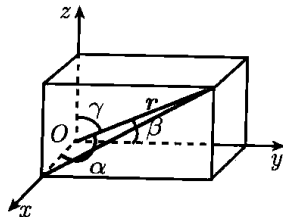


图 7-2-10

简单分析可得

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{|r|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & \cos \beta &= \frac{y}{|r|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{z}{|r|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

方向余弦的性质

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

向量 r 的单位向量

$$r = \frac{r}{r} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

例 7-2-3 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_1M_2} &= (1-2, 3-2, 0-\sqrt{2}) = (-1, 1, -\sqrt{2}), \\ |\overrightarrow{M_1M_2}| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+1+2} = \sqrt{4} = 2, \\ \cos \alpha &= -\frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \frac{1}{2}, \quad \cos \gamma = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \alpha &= \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{3\pi}{4}.\end{aligned}$$

3. 空间一向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 e , 确定 u 轴. 任给向量 $\overrightarrow{OM} = r$, 点 M' 是点 M 在 u 轴上的投影, 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 r 在 u 轴上的分量 (图 7-2-11). 设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda e$, 则数值 λ 称为 r 在 u 轴上的投影 (图 7-2-12), 记作 $\text{Prj}_u r$.

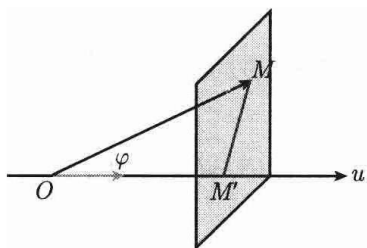


图 7-2-11

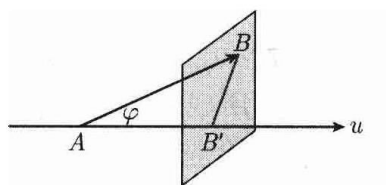


图 7-2-12

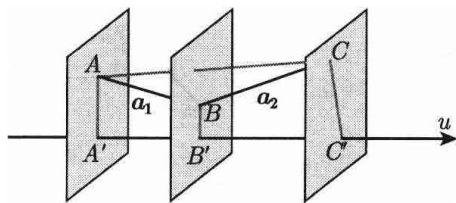


图 7-2-13

4. 向量投影的性质

(1) 性质 1: 关于向量的投影定理 I. 向量 \overrightarrow{AB} 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

(2) 性质 2: 关于向量的投影定理 II. 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和 (图 7-2-13) (可以推广):

$$\text{Prj}_u (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2.$$