普通高等教育"十一五"规划教材

大学数学教学丛书

微积分（下册）

主编 张琴

编者 朱立勋 闫厉

单国栋 张志尚

经管类

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”规划教材
大学数学教学丛书

微积分(经管类)

(下 册)

主 编 张 琴
编 者 朱立勋 闫 厉
单国栋 张志尚

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书由一线数学教师结合多年的教学实践编写而成. 全书把微积分和相关经济学知识有机结合, 内容的深度和广度与经济类、管理类各专业微积分教学要求相符.

全书分上、下两册, 共 12 章. 本书是下册, 内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程、MATLAB 在微积分中的应用. 各节均配有一定量的习题, 章末附有自测题, 书后附有习题答案.

本书可供普通高等院校经济类、管理类各专业及相关专业教学使用, 也可供学生自学.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(经管类)下册/张琴主编. —北京: 科学出版社, 2010
普通高等教育"十一五"规划教材·大学数学教学丛书
ISBN 978-7-03-028168-5

Ⅰ. 微… Ⅱ. 张… Ⅲ. 微积分-高等学校-教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010) 第 123316 号

责任编辑: 张中兴 于俊杰 / 责任校对: 张怡君
责任印制: 张克忠 / 封面设计: 耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
明辉印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张: 36 3/4
印数: 1—3 000 字数: 738 000

定价: 55.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

目　　录

第 7 章　空间解析几何与向量代数

自然界中的很多量既有大小、又有方向, 对它们进行抽象、研究和发展, 就得到了数学中的向量. 向量在自然科学与工程技术中有着广泛的应用, 是一种重要的数学工具. 平面解析几何使一元函数的微积分有了直观的几何意义; 相应的, 为了学习多元函数的微积分, 必须先学习空间解析几何的知识.

本章首先介绍空间直角坐标系, 进而引进向量的概念, 然后利用向量学习平面的方程和直线的方程及其解法, 最后介绍空间曲面方程的基本概念、空间曲线的基本概念, 使学生完成从二维到三维的思维跨越.

§7.1　空间直角坐标系

7.1.1　空间直角坐标系的概念

为了确定平面上任意一点的位置, 我们建立了平面直角坐标系. 现在, 为了确定空间任意一点的位置, 相应的就要引入空间直角坐标系.

在空间中任意取定一点 O(称为*原点*), 过 O 点作三条两两垂直的直线, 就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴 (有刻度和单位长度), 依次记作 x 轴 (横轴)、y 轴 (纵轴)、z 轴 (竖轴), 统称为*坐标轴*. 它们构成一个直角坐标系, 称为 *$Oxyz$ 坐标系*(图 7-1-1). 具体作图时, 通常把 x 轴和 y 轴配置在水平面上, 而 z 轴则是铅垂线. 按要求, 它们的三个正方向之间符合*右手规则*: 即右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从 x 轴的正向以 90° 角度转向 y 轴的正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向.

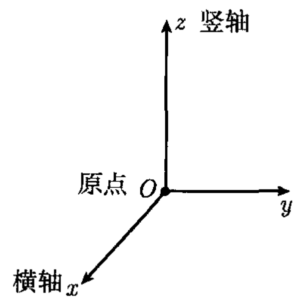
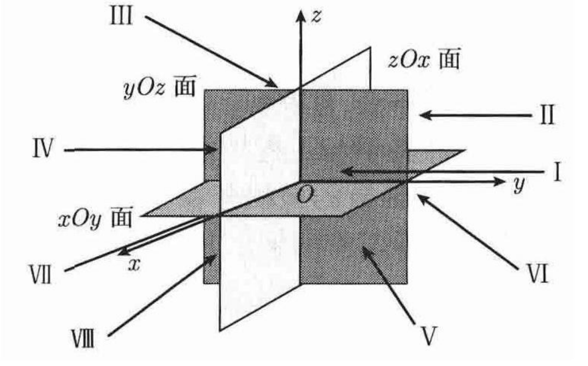


图 7-1-1

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面, 这三个平面统称为*坐标面*. x 轴和 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面, 另两个面由 y 轴及 z 轴和 z 轴及 x 轴所确定的坐标面分别称为 yOz 面及 $zOx(xOz)$ 面.

三个坐标面把空间分成八个部分, 每一个部分称为一个*卦限*. 包含 x 轴和 y 轴及 z 轴的正半轴的那个卦限称为第一卦限; 第二卦限、第三卦限、第四卦限, 同样在 xOy 面的上方, 按逆时针方向 (视线在 z 轴正方向) 确定. 第五至第八卦限, 在

xOy 面的下方, 在第一卦限之下的部分称为第五卦限, 其他第六、第七、第八卦限同样按逆时针方向确定. 这八个卦限分别由字母 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅵ, Ⅶ, Ⅷ表示, 如图 7-1-2 所示.



空间直角坐标系共有八个卦限

图 7-1-2

总结: 空间直角坐标系的核心知识可以概括为 1, 3, 3, 8. 即: 一个原点; 三条坐标轴; 三个坐标面; 八个卦限.

7.1.2　空间中点的坐标

设 M 是空间中的任意一点, 过 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴和 z 轴, 并和 x 轴、y 轴和 z 轴分别交于 P、Q、R 三点. 点 P, Q, R 分别称为点 M 在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影. 设这三个投影在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x, y, z. 于是空间任意一点 M 唯一地确定了一个有序数组 x, y, z. 反过来, 对于给定的有序数组 x, y, z, 可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P, 在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q, 在 z 轴上取坐标为 z 的点 R, 过点 P, Q, R 分别作垂直于 x 轴、y 轴、z 轴的三个平面, 这三个平面的交点 M 就是有序数组 x, y, z 确定的唯一一点 (图 7-1-2). 这样, 空间的点 M 与有序数组 x, y, z 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 x, y, z 称为点 M 的坐标, 按序称 x, y, z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标, 并把点 M 记为 $M(x, y, z)$.

7.1.3　空间中两点的距离公式

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点, 则

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

例 7-1-1　求证以 $M_1(4,3,1)$, $M_2(7,1,2)$, $M_3(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形.

解 因为

$$|M_1M_2|^2=(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2=14,$$

$$|M_2M_3|^2=(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2=6,$$

$$|M_3M_1|^2=(4-5)^2+(3-2)^2+(1-3)^2=6,$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$, 即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形.

例 7-1-2 在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 及 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解 因为所求点在 z 轴上, 所以设该点为 $M(0,0,z)$, 依题意有

$$|MA|=|MB|,$$

即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2},$$

两边去根号, 解得

$$z=\frac{14}{9}.$$

所以, 所求点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

§7.2 向量及其线性运算

7.2.1 向量的概念

客观世界中有这样一类量, 它们既有大小, 又有方向, 如位移、速度、加速度、力等, 这样一类既有大小又有方向的量则称为*向量*(或*矢量*).

数学中用一条有向线段来表示向量, 向量的表示符号是 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$(以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段, 见图 7-2-1. 有向线段的长度表示向量的大小, 向量的大小则称为向量的模, 向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模依次记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|$. 模为 1 的向量则称为*单位向量*, 记作 $|\boldsymbol{a}^0|$ 或 $\left|\overrightarrow{M_1M_2^0}\right|$.

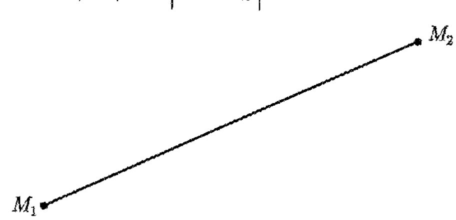


图 7-2-1

模长为 0 的向量则称为**零向量**, 记为 $\mathbf{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看做是任意的.

数学中我们只研究与起点无关的向量, 不考虑起点位置的向量则称为**自由向量**(简称向量). 如果遇到起点位置有关的向量, 在一般的原则下做特殊处理.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等, 且方向相同则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是**相等**的, 记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 由于我们只讨论自由向量, 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等但方向相反, 则称向量 $\boldsymbol{b}$ 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记作 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$. 空间直角坐标系中任一点与原点构成的向量称为**向径**. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$**平行**, 记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$(可认为零向量与任何向量平行).

7.2.2 向量的线性运算

1. **向量的加法**

设两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 可以由下列两种方式 (法则) 表示 (本质是一样的):

(1) 平行四边形法则 (类似力学上求合力的平行四边形法则)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 见图 7-2-2;

(2) 三角形法则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$, 见图 7-2-3.

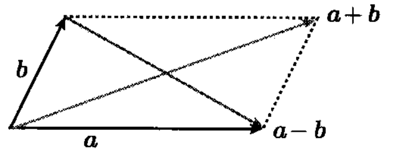


图 7-2-2

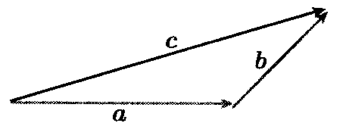


图 7-2-3

向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. **向量的减法**

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ (图 7-2-4);

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ (图 7-2-6).

注意减法特殊情况: 若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 则

(1) 同向: $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(2) 反向: $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$.

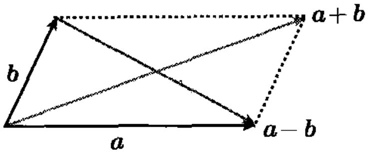


图 7-2-4

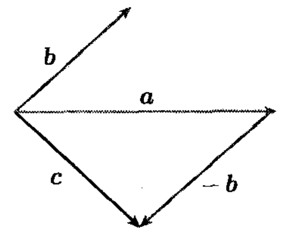


图 7-2-5

由于三角形两边之和大于第三边. 结合向量运算法则可得如下结论:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|, \quad |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数, 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 规定 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为一个向量, 它的模和方向有如下情况 (图 7-2-6):

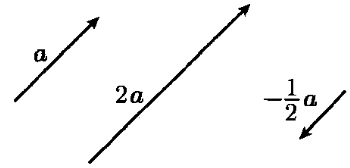


图 7-2-6

(1) 当 $\lambda>0$ 时, λ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向, $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$;
(2) 当 $\lambda=0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}|=\boldsymbol{0}$;
(3) 当 $\lambda<0$ 时, λ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向, $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$.

4. 数与向量的乘积的运算律

数与向量的乘积符合下列运算规律:
(1) 结合律: $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.
(2) 分配律: $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.
向量相加、减及数乘向量统称为向量的线性运算.

5. 两个向量的平行关系

两个向量的平行关系由下面定理描述.

定理 7-2-1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 那么, 向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于向量 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是: 存在唯一的实数 λ, 使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 条件的充分性显然, 下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$, 取 $|\lambda|=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时 λ 取正值, 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时 λ 取负值, 即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 这是因为此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 同向, 且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\,|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|.$$

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$, 又设 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 两式相减, 得 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, 即 $|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0$. 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, 故 $|\lambda-\mu|=0$, 即 $\lambda=\mu$.

定理证毕.

前面已经介绍了模为 1 的向量为单位向量, 设向量 $\boldsymbol{a}^0$ 表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量, 按照向量与数的乘积规定, 由于 $|\boldsymbol{a}|>0$, 所以 $|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 所以

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}^0 \Rightarrow \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{a}^0.$$

上式表明：一个非零向量除以它的模的结果是一个与原向量同方向的单位向量.

例 7-2-1　化简 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)$.

解　$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+5\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}+\dfrac{\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}}{5}\right)=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\left(-\dfrac{5}{2}\right)\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{a}-\dfrac{5}{2}\boldsymbol{b}.$

7.2.3　利用坐标作向量的线性运算

任给向量 $\boldsymbol{r}$, 对应点 M, 使 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MO}$. 以 OM 为对角线、三条坐标轴为棱作长方体 $RBCM-OQAP$, 如图 7-2-7 所示.

由此可有向量的坐标表示：$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$. 设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$, 则 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{MO}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

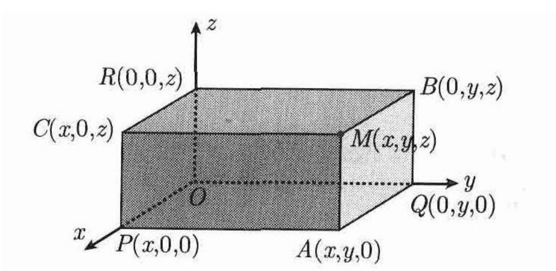


图 7-2-7

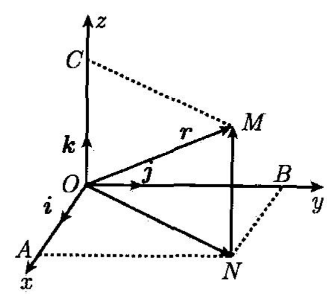


图 7-2-8

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式, $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 称为三个坐标轴方向的分向量. $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 称为三个坐标轴方向的单位分向量, 见图 7-2-8.

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\quad \boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z),\quad (\lambda\text{为实数})$$
$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$
$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时

$$\begin{aligned}\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a} &\rightleftarrows \boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}\\ &\rightleftarrows \frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}.\end{aligned}$$

例 7-2-2 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5\boldsymbol{x}-3\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}, \\ 3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, \end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{a}=(2,1,2)$, $\boldsymbol{b}=(2,2,1)$.

解

$$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b} = 2(2,1,2) - 3(2,2,1) = (-2,-4,1)$$

$$\boldsymbol{y} = 3\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} = 3(2,1,2) - 5(2,2,1) = (-4,-7,1)$$

7.2.4 向量的模、方向角、投影

1. **向量的模**

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间两点, 则

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

2. **方向角与方向余弦**

记 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\varphi=\angle AOB$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$(图 7-2-9).

$\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 所成的角, 称为 $\boldsymbol{r}$ 的方向角, 依次记为 α,β,γ(图 7-2-10). 方向角的余弦称为其方向余弦.

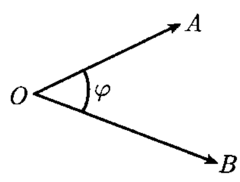


图 7-2-9

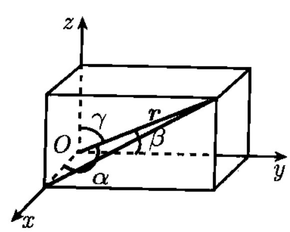


图 7-2-10

简单分析可得

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

方向余弦的性质

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

向量 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量

$$\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

例 7-2-3　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

解

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2}),$$
$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{1+1+2}=\sqrt{4}=2,$$
$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\quad \cos\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\quad \beta=\frac{\pi}{3},\quad \gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

3. 空间一向量在轴上的投影

设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$, 确定 u 轴. 任给向量 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$, 点 M' 是点 M 在 u 轴上的投影, 则向量 $\overrightarrow{OM'}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的分量 (图 7-2-11). 设 $\overrightarrow{OM'}=\lambda\boldsymbol{e}$, 则数值 λ 称为 $\boldsymbol{r}$ 在 u 轴上的投影 (图 7-2-12), 记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{r}$.

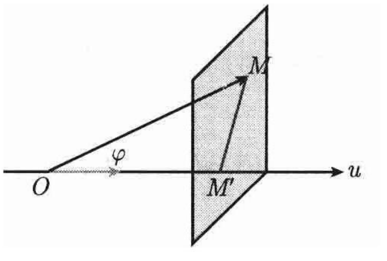


图 7-2-11

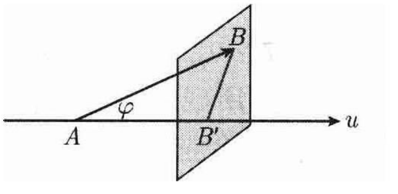


图 7-2-12

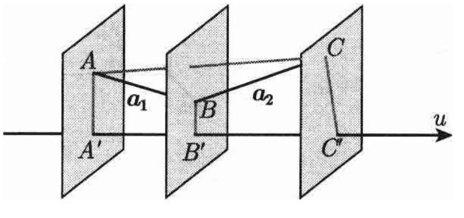


图 7-2-13

4. 向量投影的性质

(1) 性质 1：关于向量的投影定理 I . 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角的余弦

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$$

(2) 性质 2：关于向量的投影定理 II . 两个向量的和在轴上的投影等于两个向量在该轴上的投影之和 (图 7-2-13) (可以推广)：

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2.$$