华中科技大学数学创新教材

多元分析学

◎黄永忠　刘艳红　韩志斌　编

科学出版社

华中科技大学数学创新教材

多元分析学

黄永忠　刘艳红　韩志斌　编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要包含级数、多元函数微分学与积分学、含参变量积分以及空间初步和常微分方程的定性理论初步等内容. 全书详略得当；注意逻辑思维能力和大局观的培养，注重数学思想的体现；例题、习题丰富.

本书可用于研究型大学理工科各专业实验班或提高班的教材或教学参考书，也可作为数学专业低年级学生或非数学专业对数学要求较高学生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

多元分析学/黄永忠，刘艳红，韩志斌编. 一北京：科学出版社，2011.2
华中科技大学数学创新教材
ISBN 978-7-03-030039-3

Ⅰ.①多… Ⅱ.①黄…②刘…③韩… Ⅲ.①多元分析一高等学校一教材
Ⅳ.①O212.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 009213 号

责任编辑：高 嵘 / 责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市科利德印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2011 年 2 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011 年 2 月第一次印刷 印张：22 1/4
印数：1—3 000 字数：430 000

定价：38.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛 书 序

随着教学实践的深入进行，现行大学数学教育体系已呈现诸多弊病. 一方面，一些学生反映：数学太抽象，学习数学太枯燥，学完之后仅记得几个数学符号和概念，难以做到学以致用；另一方面，一些高年级本科生和研究生反映：本科阶段所学的数学远远不能满足其专业需求，学懂了的数学用不上，要用的数学没学过. 这一切都说明，现行的"教"与"学"、"学"与"用"严重脱节，现行的数学教学已远远不能满足现代教育及高速发展的科学技术的需要，改革与创新势在必行.

我国的大学数学教育长期以来沿用了前苏联的模式：从课程设置来说，着重于近代数学而较少融入现代数学；从教材内容来说，重理论及其推导而轻知识拓展及其应用. 众所周知，数学是自然科学与工程技术的基础，它已渗透到当代社会科学的众多领域，对于培养和开发学生潜能起着重要作用. 如何构建当代大学数学知识体系，使学生乐而学之、学以致用，是摆在我们每位大学数学教师面前的艰巨任务.

对于非数学专业的数学课程设置问题，我们对国内外高校及我校的开课现状进行了全面调研. 从国外高校情况来看，其课程设置各不相同，没有统一模式，而且他们的非数学专业与数学专业、本科生与研究生的大部分课程是相通的，即非数学专业的学生可修数学专业各层次课程. 对于我们来说，这点是没有可参照性的，因为我国高校的各专业、各层次课程基本上是各自为阵，教育管理部门也有相关规定予以制约. 但从其最基本的数学课程所涵盖的知识内容来看，则大致相同，主要涵盖：微积分、代数、几何、复分析、概率论、微分方程理论、统计学及数值计算等课程. 这些数学课程不但可以给学生以数学、统计、计算等方面知识，而且可以开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力及知识应用能力. 因此，基于改革与创新的宗旨，我们拟将大学数学的主体知识内容分解为下列课程：《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》、《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》.

鉴于目前非数学专业教材内容不足以满足专业的需求，且部分内容已经老化，因此我们拟在各科教材中适当更换和增加新的内容. 如以往的《计算方法》教材仅有多项式插值、线性方程组的古典迭代法、数值积分、标量非线性方程数值解及常微分方程初值问题数值解的内容，而当今各专业用于计算机仿真的数值算法有广泛需求，其教材内容显然难以满足诸专业需要，本次改革拟增加线性方程组的 Krylov 子空间法、非线性方程组数值解、常微分方程边值问题数值解及偏微分方

程数值解等重要内容. 此外，在教材整体架构方面，《一元分析学》、《多元分析学》、《解析几何与线性代数》、《应用复分析》将偏重于数学理论以训练和开发学生的逻辑思维能力、空间想象能力；而《应用概率统计》、《应用偏微分方程》、《科学计算引论》则力求理论与应用二者兼顾，以开发学生应用知识的能力. 由上可知我们的教学内容改革不仅仅是名称上的变化，也不只是知识的重新排列组合，而是一次由表及里的实质性改革.

本套大学数学系列创新教材是由十余位教学经验丰富、科研基础好的专班教师编写的，他们对大学数学课程的改革问题进行了深入研究和探讨，制定出了科学的编写计划. 本套教材特别注重教学内容各部分知识的系统性和逻辑性，体现其由浅入深、由易到难、由简单到复杂，按照逻辑系统和认知理论相结合的思想组织整套书出版工作. 力求突出学生的主体地位，以学生的发展为本，充分体现数学知识的趣味性、时代性、可实践性及有用性.

大学数学教材的改革与创新是一项长期而艰巨的任务，我们愿以本套教材的编写为起点和契机，继续深入开展教学内容的变革，以使我们的教书育人工作充分适应时代发展的要求.

由于编者水平所限，仓促付梓，书中必有疏漏之处，诚望读者指正.

编委会

2010 年 5 月 20 日

前　言

本书是大学数学创新教材之一的《多元分析学》，它的编写基于以下几个认识：

（1）对学生的认识. 我们面对的是创新实验班的学生，他们的中学数理知识较为扎实，并且有良好的学习习惯和学习自觉性，所以我们安排的内容较通常的微积分要多，内容的渐进也来得快些，同时注重数学分析能力的培养.

（2）对目的的认识. 加强学生厚实的数学基础，培养他们的数学思想方法和逻辑思维能力，进而建立扎实的数学分析功底是我们的目的.

（3）对应用的认识. 持续了很多年的教材改革，每谈必有加强应用. 多年以后的今天，就具体应用而言，积累的大量素材为我们有专业针对性地布置课外阅读材料提供了现实可能性. 例如，改革后的《数学分析》及《微积分》教材有大量的应用例子，还有为数众多的《数学建模》书籍供阅读.

（4）数值处理及数学软件的加入也是教材改革的一种常见形式，由于后续有科学计算课程，我们也不打算具体地涉及它们. 其实，常见的数学软件，如 Mathematica、Matlab、Maple，只需花很少的时间就可以学会用它们处理微积分的内容.

有了以上认识，我们在考虑教材内容时就将绝大部分精力用来关注数学层面的知识，回到"传统"方式. 我们始终认为，作为一年级的学生，打下坚实的数理基础才是创新的根本所在. 一年级的数学学习不要问有用没用，只管学得精不精，这才是为学之道(任继愈先生关于学问的意思转述).

本书特点：

（1）内容包含精讲部分和介绍性部分，详略得当. 具体地，级数、多元函数微积分学写得详尽，这是要求学生精通的内容；空间理论初步和常微分方程的定性理论初步写得简略，目的是让学生开阔视野，提升认识. 对此内容的基本要求：熟练掌握度量空间的点集理论，掌握 Banach 不动点定理及其应用；知道常见的完备空间及作为特例的 Hilbert 空间；透彻理解常微分方程解的存在唯一性定理，掌握自治系统平衡位置稳定性的判断，以及简单情形 Liapunov 函数的构造.

（2）注意逻辑思维能力和大局观的培养，注重数学思想的体现. 我们常常通过多种方式让读者感受所学知识的逻辑必然性和全局把握. 例如级数，我们当然会展示众多的结论，但一开始我们就通过几个方面来说明级数的作用；在谈到函数项级数的和函数的分析性质时，强调和函数就是一个函数，是分析学的研究对象，我们当然要关注它的连续性、可积性、可微性等分析性质. 对含参变量的积分也是如此. 再如，将二重积分、三重积分，以及第一型曲线、曲面积分视为几何体上的积分

(以往只在复习总结时采用此观点,现在有不少教材也直接这样做了,如文献[2]),这样可以写出统一的定义和性质,看到它们是定积分的推广,计算技巧,如利用对称性,都是同一个道理. 数学思想的体现也是贯穿全书的,这些思想包括"转化"的思想,无穷的"有限"逼近思想,分析、代数、几何的融合思想,特殊到一般及一般到特殊的思想(抽象与具体的思想),分类的思想,等等.

(3) 贴近读者实际. 本书主要用于创新实验班一年级的第二学期,此时专业基础课陆续进入,学生的学业负担明显加重,学生自由支配时间的减少影响着他们对知识的消化与思考,因此如何帮助他们学好本课程是我们时刻注意的事. 在要求读者精通的内容部分,我们写得较为详尽,也给出众多的注记,这样削弱了对读者的启发,但加强了读者对知识的理解和掌握,重要的是为读者节约了时间. 加大习题量,不少是具有启发性的问题,便于真正学有余力的读者思考.

(4) 适当注意创新实验班数学课程体系的衔接与融合. 这体现在以下诸内容的安排上:再谈常微分方程;在变换下的偏导数运算及多种形式的三大积分公式的例题、习题中,特别注意源自偏微分方程及其边值问题求解的问题;抽象空间初步知识;代数与几何相关知识的运用等.

(5) 每章节的所有定义、定理、命题、例子等拉通编号,这样做的目的是便于读者快速查找相关内容. 我们还给出了符号表和索引,希望增强本书的友好性.

另外,为适应不同层次的需要,在一些地方加上星号以示可选用.

本书的第 1、第 2、第 6、第 7 章及第 4 章的第 7 节由黄永忠编写,第 3 章由刘艳红编写,第 4、第 5 章由韩志斌编写,全书由黄永忠统稿和润色. 限于编者的水平,加之时间仓促,书中的不足在所难免,敬请读者批评指正.

本书的编写是在华中科技大学数学与统计学院的创新教材编写组的统一部署下开展的,得到学校教务处的大力支持;科学出版社对本书的编写和出版给予了持续关注和帮助;例题、习题的选编参考了我院大学数学中心提供的资料,特别得到吴洁老师的无私帮助;我们的硕士生方厚章、陈小锋、刘海霞、许婷婷、方丹等同学输入了部分文稿,在此一并致谢.

编 者

2010 年 9 月

符 号 表

$:=$	定义为或记为
$\mathbf{N}_+$	正整数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{R}^n$	n 维实欧氏空间，$\mathbf{R}^1=\mathbf{R}$
$\rightrightarrows$	一致收敛
$\Leftrightarrow$	充要条件，等价刻画
A°, $\mathrm{int}A$	点集 A 的内点全体
A'	点集 A 的极限点全体，导集
$\overline{A}$	点集 A 的闭包，即 $\overline{A}=A'\cup A$
∂A	点集 A 的边界
$A\times B$	$\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$
$N(a,\delta)$	欧氏空间中点 a 的 δ 邻域
$O(x_0,\delta)$	抽象空间中点 x_0 的 δ 邻域
$\Vert x\Vert$	x 的范数
$\rho(x,y)$	两点 x,y 间的距离
$\langle x,y\rangle$	两点 x,y 的内积
$\boldsymbol{x}$	向量，如此小写字母均为向量
定理 1.1.10	第 1.1 节的定理，10 是与定义、例子等的拉通编号
* 证	该证明可选用，全书中加星号内容均为此意
证毕	定理、命题等的证明完毕标志
□	较长例子、注记的结束标志

目　　录

第 1 章　无穷级数 ………… 1

1.1　数项级数 ………… 3

1.2　函数列与函数项级数 ………… 27

1.3　幂级数 ………… 41

1.4　* Weierstrass 逼近定理 ………… 58

1.5　Fourier 级数 ………… 61

第 2 章　空间初步 ………… 80

2.1　度量空间 ………… 81

2.2　线性赋范空间 ………… 86

2.3　n 维 Euclid 空间 ………… 92

第 3 章　多元函数微分学 ………… 100

3.1　多元函数的极限与连续性 ………… 100

3.2　多元函数的偏导数与全微分 ………… 106

3.3　方向导数与梯度 ………… 131

3.4　多元函数的极值问题 ………… 137

3.5　多元函数微分学在几何上的简单应用 ………… 150

3.6　空间曲线的曲率与挠率 ………… 159

3.7　多元向量值函数的导数与微分 ………… 164

第 4 章　多元数量值函数积分学及其应用 ………… 171

4.1　多元数量值函数积分的概念与性质 ………… 171

4.2　二重积分的计算 ………… 177

4.3　三重积分的计算 ………… 192

4.4　第一型曲线积分的计算 ………… 206

4.5　第一型曲面积分的计算 ………… 211

4.6　多元数量值函数积分的应用 ………… 220

4.7　反常重积分 ………… 233

第 5 章　向量值函数的曲线积分与曲面积分 ······ 238
5.1　第二型曲线积分 ······ 238
5.2　Green 公式及曲线积分与路径的无关性 ······ 248
5.3　第二型曲面积分 ······ 267
5.4　Gauss 公式与 Stokes 公式 ······ 278
5.5　场论初步 ······ 289

第 6 章　含参变量积分 ······ 299
6.1　含参变量的正常积分 ······ 299
6.2　含参变量的反常积分 ······ 304
6.3　Euler 积分 ······ 310

第 7 章　常微分方程(续) ······ 317
7.1　首次积分 ······ 317
7.2　初值问题解的存在唯一性 ······ 320
7.3　定性理论初步 ······ 322

参考文献 ······ 337
索引 ······ 338

第1章　无穷级数

对给定的数列$\{a_n\}$,形式上可写出如下**无穷和**:

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots, \tag{1.0.1}$$

称它为以a_n为通项的**无穷级数**,简称为**级数**,记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

级数首项的下标也可以是其他整数,如0或3. 当不必强调级数的首项时,通常将级数(1.0.1)简记成$\sum\limits_{n}a_n$或$\sum a_n$.

若级数的诸项为常数,则称(1.0.1)为**常数项级数**,简称为**数项级数**,如$\sum\frac{1}{n}$和$\sum\frac{1}{2^n}$;若级数的诸项为函数,则称(1.0.1)为**函数项级数**,如$\sum x^n$和$\sum\frac{\sin nx}{n^2}$.

级数作为表示函数的工具,在研究函数性质和进行近似计算时扮演十分重要的角色,甚至具有不可替代的作用,是分析学的一个重要内容. 在展开学习之前,我们先从三个方面来认识级数学习的必要性,当然级数的应用并不仅仅在这三个方面.

1. 实际需要:时钟的时针与分针重合问题——Zeno问题

例1.0.1　试求在第k点钟到第$k+1(k=1,2,\cdots,11)$点钟之间的什么时间,时钟的时针与分针恰好重合?

解　注意到分针的速度是时针速度的12倍,当分针从0(或12)走到第k点钟时,时针到$k+\frac{k}{12}$处;当分针到$k+\frac{k}{12}$处时,时针到$k+\frac{k}{12}+\frac{k}{12^2}$处;以此类推,时钟的时针与分针在

$$k+\frac{k}{12}+\frac{k}{12^2}+\cdots+\frac{k}{12^n}+\cdots$$

处重合,即在$\frac{12k}{11}$处重合(等比数列求和,取极限而得).

我们现在来看这个重合问题是非常简单的. 但是在2400多年前,类似问题曾使初等几何学的发明家们辩论得舌焦口燥. 这个类似问题就是著名的Zeno悖论. 说的是Achilles(古希腊一位善跑的英雄,神话人物)和乌龟赛跑,他的速度是乌龟的十倍,但乌龟的起跑点靠前100码. 古希腊的哲学家Zeno说Achilles永远也追不上乌龟,因为当他跑到乌龟的起跑处时,乌龟到了110码处;当他到110码处时,乌龟到了111码;以此类推,Achilles是逐渐逼近乌龟,但永远也追不上乌龟. 这显然

是一个有悖于常识的荒谬结论,我们用时钟的分针与时针重合问题的相同思考,得到 Achilles 在他起跑后的

$$100+10+1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots+\frac{1}{10^n}+\cdots,$$

即 $110+\frac{10}{9}$ 码处追上乌龟. 尽管相加的项有无穷个,但其和却是有限数.

这里,我们遇到的是无限个数相加的问题. 通过前面的学习,我们知道但凡遇到无限问题,就不是有限问题的简单推广. 由此产生的问题是:这种无限相加是否有意义?例 1.0.1 中的式子看来是有意义的;另一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ 有意义吗?有限个数相加时的一些运算法则,如加法交换律与加法结合律对于无限个数还有效吗?两个级数的乘积又是怎么回事?等等. 这正是本章要考虑的一些基本问题.

2. 对常数 e 和 π 的认识

在学习了 Taylor 公式后,我们能证明 e 是无理数,并给出其值的近似计算. 在本章,我们将得到

$$\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots.$$

对 π,有

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots.$$

3. 积分 $F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 的计算

众所周知,试图用一个如初等函数的解析式子来表达 $F(x)$ 是徒劳的(它不是初等函数!),在学习本章以后,我们可以用函数项级数来表示它,进而研究其进一步的性质. 事实上,很快就知晓

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad |x|<+\infty.$$

所以

$$F(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t^2)^n}{n!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{2n}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

其中第二个等号的成立不是平凡的,即求积分运算与无穷求和运算交换顺序是有条件的. 这条件是什么,学习函数项级数时就明白了. 其实,数学物理和工程技术领域涉及较多的特殊函数大多是用级数来表示的,如著名的 Bessel 方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-1)y=0$$

的解是 $J_1(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$,称为阶 1 的 Bessel 第一类函数. 有兴趣的读

者可见《特殊函数概论》(王竹溪、郭敦人. 科学出版社,1965;重印:北京大学出版社,2000). 毫不夸张地说,级数的函数表示作用是我们学习和研究级数的最重要动机所在. 下面我们开始级数理论的学习.

1.1 数项级数

数项级数的诸项为常数,但并不排除级数的通项含有在一定范围内取值的参数,只是不强调这些参数的变动. 因此,本节的结果自然可用于其后考虑的函数项级数.

1.1.1 敛散性、性质

记级数(1.0.1)的前 n 项之和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,称 $\{S_n\}$ 为级数(1.0.1)的**部分和数列**.

定义 1.1.1(级数的敛散性与和) 若级数(1.0.1)的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,则称级数(1.0.1)**收敛**,并称

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

为它的**和**,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$;否则,称级数(1.0.1)发散. 级数的收敛与发散统称为**敛散性**. 收敛级数的和与其部分和之差 $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ 称为该级数的**余项**.

值得注意的是,若 $S = \pm\infty$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 有和 $+\infty$ 或 $-\infty$,但它不收敛.

在级数与数列之间存在一个简单的一一对应. 事实上,级数唯一地确定其部分和数列;反之,任给定数列 $\{S_n\}$,令 $a_1 = S_1, a_n = S_n - S_{n-1}\,(n \geqslant 2)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 以 $\{S_n\}$ 为其部分和数列. 充分注意到级数与数列的这种对应关系,对于理解本章内容是重要的. 下面我们来认识几个基本级数的敛散性.

例 1.1.2 讨论**等比级数**(或称**几何级数**)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的敛散性.

解 该级数的部分和为

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q|<1$ 时,由于

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q},$$

故该级数收敛,且其和为$\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|>1$ 时,由于$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,故该级数发散;显然,当 $q=1$ 时级数也发散. 当 $q=-1$ 时,级数变为

$$a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots,$$

由于它的部分和

$$S_n=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数},\\ a, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

显然是一个发散数列,所以该级数发散.

综上所述,当 $|q|<1$ 时,等比级数收敛,其和为$\dfrac{a}{1-q}$;当 $|q|\geqslant1$ 时,等比级数发散. 特别地,得到$\sum(-1)^{n-1}$ 是发散的. □

例 1.1.3 证明:**调和级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的.

证 该级数的部分和为

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbf{N}_+,$$

我们只需证明$\{S_n\}$是发散数列. 其实,注意到对 $x\in(k,k+1)(k\in\mathbf{N}_+)$,成立$\dfrac{1}{k}>\dfrac{1}{x}$,我们有

$$\begin{aligned}S_n&=\int_1^2 1\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{2}+\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{3}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{n}\\&>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_3^4\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(n+1),\quad n\in\mathbf{N}_+.\end{aligned}$$

由 $\ln(n+1)\to+\infty(n\to\infty)$ 得到 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$. □

例 1.1.4 设 p 是常数,讨论 p **级数**$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$的敛散性.

解 p 级数的部分和数列

$$S_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

显然是单调增加的,它收敛与否取决于其是否有界.

(1) 当 $p>1$ 时,记 $r=\frac{1}{2^{p-1}}$,则 $0<r<1$. 由于

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=r,$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=r^2,$$

……

$$\frac{1}{2^{kp}}+\frac{1}{(2^k+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1}-1)^p}<\frac{2^k}{2^{kp}}=r^k,$$

所以

$$S_n\leqslant S_{2^n-1}<1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}<\frac{1}{1-r}.$$

这表明当 $p>1$ 时,部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛,也即 p 级数收敛.

(2) 当 $p\leqslant 1$ 时,有

$$\frac{1}{2^p}\geqslant\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$

……

$$\frac{1}{(2^k+1)^p}+\frac{1}{(2^k+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+1})^p}>\frac{2^k}{2^{k+1}}=\frac{1}{2},$$

从而有

$$S_{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

这表明当 $p\leqslant 1$ 时,数列 $\{S_{2^n}\}$ 是正无穷大量. 而部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的,所以 $\{S_n\}$ 是正无穷大量. 故当 $p\leqslant 1$ 时,p 级数是发散的,其和为 $+\infty$. □

至此,我们认识了几何级数与 p 级数的敛散性,还包含了两个典型的发散级数,即 $\sum(-1)^{n-1}$ 与调和级数.

定义 1.1.1 将判别级数的敛散性及其求和问题分别转化为判别它的部分和数列的敛散性与求部分和数列的极限问题. 这种利用极限通过有限相加(部分和)来认识、研究无限项相加(级数)是数学中的一个重要思想方法.

利用数列极限的有关性质,不难证明级数的一些基本性质.

性质 1.1.5 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=A,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=B$,则

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n\pm\beta b_n)=\alpha\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\pm\beta\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha A\pm\beta B$,其中 α 和 β 是常数;

(2) 若 $a_n \leqslant b_n (\forall n \in \mathbf{N}_+)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n$，即 $A \leqslant B$.

性质 1.1.6 任意删去、添加或改变有限项不改变级数的敛散性.

性质 1.1.7 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$；(2) $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geqslant 2)$ 和 $R_n = S - S_n$ 即得证该性质，其中 S 为级数的和.

由于性质 1.1.7 中的(1) 比较容易验证，因此常被用来证明级数的发散性. 若 $\{a_n\}$ 不收敛，或者虽收敛但 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$，则级数 $\sum a_n$ 必定发散. 例如，级数 $\sum (-1)^{n-1}$ 与 $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 都是发散的. 必须强调，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 仅是级数 $\sum a_n$ 收敛的必要条件，如调和级数 $\sum \frac{1}{n}$ 是发散的.

性质 1.1.8 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为收敛级数，则不改变它的各项次序任意加入括号所得到的新级数仍收敛，并且其和不变.

证 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，部分和数列为 $\{S_n\}$. 在该级数中任意加入括号，得新级数

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}) + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots.$$

记它的部分和为 $\widetilde{S}_k$，则

$$\widetilde{S}_1 = S_{n_1}, \widetilde{S}_2 = S_{n_2}, \cdots, \widetilde{S}_k = S_{n_k}, \cdots.$$

因此 $\{\widetilde{S}_k\}$ 为原级数部分和数列 $\{S_n\}$ 的一个子列 $\{S_{n_k}\}$，从而知新级数收敛，且

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{S}_k = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} = S.$$

证毕

注 1.1.9 (1) 性质 1.1.8 说明，任何收敛的级数都具有有限个数相加的结合性. 但与有限项加法不同的是它的逆命题不一定成立. 例如，级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots + (1-1) + \cdots$$

是收敛的，但不加括号的级数 $1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$ 却发散. 不过，如下结论为真：

(2) 对级数 $\sum a_n$，若适当加括号后的新级数收敛，且括号内的项符号相同，则原级数 $\sum a_n$ 收敛. 其证明用到随后关于级数收敛的 Cauchy 准则. 留作练习.

(3) 性质 1.1.8 也表明，若对一个级数适当加入括号得到的新级数是发散的，则原级数必发散. 对此，我们得到调和级数发散的一个新证明. 看看按

$$\left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \frac{1}{2^{n-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$$

方式加括号，对调和级数有何结果．留作练习． □

与数列类似，对于级数也要研究两个基本问题：第一，它是否收敛？第二，如果收敛，如何求出它的和？一般说来，尽管我们会陆续介绍一些求和方法，但第二个问题实在比较困难．我们说第一个问题更重要，因为如果级数发散，那么它无和可求；如果级数收敛，即使无法求出其和的精确值，也可利用部分和求出它的近似值．而且根据性质 1.1.7 的(2)，近似值可以达到任意的精确度，从而满足实际问题的需要．因此，判断敛散性是级数理论的首要问题，也是我们研究的重点．

将判断数列敛散性的 Cauchy 准则转化到级数中来，就得到判断级数敛散性的一个基本结论．

定理 1.1.10(Cauchy 收敛准则) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是

$$\forall \varepsilon>0.\ \exists N\in \mathbf{N}_+,\text{使得 }\forall p\in \mathbf{N}_+,\text{当 } n>N \text{ 时，恒有}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

特别地，令 $p=1$，则得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，这是性质 1.1.7 的一个结论．其实，后面有不少结论的证明大体基于 $\varepsilon-N$ 方法和 Cauchy 准则．

注意 p 是具任意性的．若级数 $\sum a_n$ 对每个固定的 p 满足

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p})=0,$$

则级数 $\sum a_n$ 可能是发散的．例如，调和级数对每个固定的 $p\in\mathbf{N}_+$，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+p}\\&=0,\end{aligned}$$

但调和级数发散．

级数的求和涉及部分和 S_n 的求法．中学时对数列求和的拆项法、错位相减法、有理化分子(母)法是常用的，不再举例，可在习题中温故．

1.1.2 正项级数的收敛判别法

若 $a_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为**正项级数**．正项级数的一个显著特点是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增．因此，根据判定数列收敛的单调有界准则，不难得到下述判定正项级数敛散性的基本定理．

定理 1.1.11 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列有上界．

定理 1.1.11 不仅可用于判别正项级数的敛散性，而且是证明下列敛散性判别法则的基础．