普通高等教育“十二五”规划教材

概率统计教程

（第二版）

马江洪　主编

Probability Statistics

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

概率统计教程

（第二版）

马江洪　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是在2005年出版的第一版基础上修订而成的，内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计基本知识、参数估计和假设检验等.全书结构体系合理，突出对基本概念和基本思想的阐述，注重对基本方法的训练和实际应用能力的培养，部分章节还介绍了MATLAB软件的相关统计功能.

本书可作为高等工科院校非数学专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程/马江洪主编. —2版. —北京：科学出版社，2010
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-029471-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①马… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第218151号

责任编辑：张中兴 赵 靖 / 责任校对：张 林
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
明辉印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005年1月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2011年1月第 二 版 印张：13
2011年1月第九次印刷 字数：260 000
印数：28 001—32 000

定价：24.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

第二版前言

本书自 2005 年出版以来，作为工科大学生的本科基础课教材经过了六年的教学实践检验，不少教师在充分肯定的同时，也指出了本书的不足之处，特别是长安大学的任功全老师、刘小云老师、冯复科老师、张全兴老师等提出了很多宝贵的意见，在此向他们表示诚挚的感谢. 同时，我们还要感谢科学出版社的赵靖编辑和张中兴编辑，感谢她们多年来的支持和鼓励使本书得以修订再版.

第二版总体上仍然保持原书的基本框架和结构，只是对部分内容进行了一些局部增减和调整，希望能更好地满足工科“概率论与数理统计”课程教学的需要.

不当之处敬请读者指正.

编　者

2010 年 9 月

第一版前言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的学科，在自然科学、社会科学、工程技术等领域有十分广泛的应用.概率论着眼于随机现象统计规律的演绎研究，而数理统计是随机现象统计规律的归纳研究，二者互相联系、互相渗透，在科学研究、技术开发、生产管理和社会经济生活等诸多方面发挥了重要作用.概率论与数理统计课程也因此成为理工科大学生的一门必不可少的基础课程.

本书按照最新的"工科类本科数学基础课程教学基本要求(修订稿)"的精神编写，目的是作为高等工科院校非数学专业概率论与数理统计课程的教材.本书既注重对基本概念、基本理论和基本方法的阐述，强调直观和应用背景，突出主题和基本思想，又力求融入一些增强思想性、趣味性和实用性的新内容，体现求精、求变的指导原则，以适应目前学时压缩多、扩招压力大、本科教育大众化的新特点，使学生通过对本课程的学习，能够较好掌握研究随机现象的思想方法，并具备一定的实际运用能力.

本书的选材都是最基本的，个别稍难但又比较重要的内容则放到附录中供读者学习查阅.例题尽量采用具有代表性的典型题目或结合专业背景的实际题目，并且很多例题都做了适当的解题方法评述，以期达到举一反三的效果.论述力求在不失严谨的前提下尽可能地简洁明快，直接揭示和把握问题的本质.为便于工程应用，在本书的一些章节还附有 MATLAB 数学软件的相应统计函数命令，同时，大部分专业术语首次出现时也都附有相应的英文对照，供读者学习参考.

全书在充分讨论、博采众长的基础上由长安大学数学与信息科学系的部分教师执笔完成.马江洪教授任主编，全面负责本书的编写体系、内容安排、MATLAB 命令的审定以及最终的统稿、定稿等工作.具体各章的编写分工如下：第 1 章、第 6 章和附表由马江洪编写，第 2～4 章由姜根明编写，第 5 章由窦龙编写，第 7 章由张俊祖编写，第 8 章由左大海编写，任丽梅为第 1 章和第 6 章配备了习题和答案.

在本书的完成过程中，长安大学理学院的有关领导、数学与信息科学系的诸多老师都给予了极大的关心和支持，本书不少地方采纳了他们的宝贵经验和有益建议.封建湖教授和科学出版社的杨波先生、赵靖女士更是为本书的出版付出了很大的努力.在此，我们一并表示衷心的感谢.

由于时间仓促，水平所限，书中考虑不周或错误之处在所难免，祈望读者不吝赐教.

编　者

2004 年 8 月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

客观世界有两类常见的现象.一类称为确定性现象,这类现象对应那些必然要发生的确定性结果,例如,"太阳必然从东方升起"、"正方形的面积一定是边长的平方"等.另一类是随机现象,简单地说,它们对应的结果发生与否是随机的,即可能发生也可能不发生.这类现象在自然界和日常生活中十分普遍,比如,抛一枚硬币,可能出现有国徽的一面,也可能出现有数字的一面;掷一颗骰子,可能会出现"1"点,也可能不出现"1"点而出现其他点数;随便走到一个有交通灯的十字路口,可能会遇到红灯,也可能会遇到绿灯或黄灯.

概率论与数理统计就是研究随机现象客观规律性的科学.由于随机现象的普遍性,概率论与数理统计已在自然科学、社会科学、工程技术等领域得到了十分广泛的应用,其特有的思想方法已经成为我们研究随机现象必不可少的重要工具.

作为基础,本章将围绕随机事件及其概率展开讨论.

1.1 随机事件

1. 随机事件的概念

为进一步明确随机现象的含义,我们先从随机试验谈起.什么是"随机试验"呢?在概率论中,一个试验(或观察)如果满足以下条件:

① 试验在相同条件下可重复进行;

② 试验的所有可能的基本结果事先明确且不止一个;

③ 每次试验究竟出现哪个结果不能事先肯定,

则称其为一个**随机试验**,简称**试验**,常用字母 E 表示.而把随机试验所反映的现象称为**随机现象**.以后,若无特别声明,我们谈到的试验均指随机试验(包括符合以上定义的观察).

例 1.1　掷一颗骰子是随机试验.显然,该试验满足条件①,同时也满足条件②和③.因为事先已明确其所有可能的 6 个结果,并且试验之前不能肯定究竟出现哪个结果,所以这个试验是随机试验.

例 1.2　观察上午 9～10 点经过某交通收费站的汽车流量(单位:辆).事先已明确可能出现的结果是所有非负整数中的某一个,但究竟是哪一个要等观察之后才能知道,事先不能肯定.可验证,这个观察也是随机试验.

要研究随机现象,就要研究随机试验.在概率论中,把随机试验的每个可能的

基本结果称为**样本点**(sample point)，用 ω 表示；把样本点的全体称为该试验的**样本空间**(sample space)，用 Ω 表示. 比如，在掷一颗骰子的试验中，所有样本点有 6 个：$\omega_1,\cdots,\omega_6$，其中 ω_i 表示"出现 i 点"，$i=1,2,\cdots,6$，因此，样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_6\}$. 可以说，样本点是随机试验的基本成分，样本空间则是认识随机现象的出发点.

我们看到，在随机试验中每个样本点都可能出现，也可能不出现，至于究竟出现与否只有等试验有了结果才能知道. 一般地，把随机试验中那些可能出现、也可能不出现的结果称为"**随机事件**"(random event)，用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示. 特别地，每个样本点都是随机事件，称为**基本事件**. 除基本事件外，在一个随机试验上还可定义很多其他随机事件.

在例 1.1 中，令 $A=$"掷出奇数点"，$B=$"掷出偶数点"，$C=$"掷出素数点"，则它们都是随机事件但不是基本事件. 不过，可以看出，这些随机事件都可用一些基本事件（样本点）来描述，如 A,B,C 分别可用 $\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，$\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，$\{\omega_2,\omega_3,\omega_5\}$ 来描述.

一般而言，任何随机事件都是随机试验的可能结果，而样本空间已包含了所有可能的基本结果(样本点). 因此，随机事件总可以用一部分样本点或样本空间的子集来描述. 这样，我们有以下定义：

称随机试验的**样本空间的子集**为**随机事件**，以后简称**事件**. 当事件子集中任何一个样本点在试验中出现时，就称该事件**发生**，即事件 A 发生的充要条件是试验结果出现的样本点 $\omega\in A$.

这样，事件既可用明确的陈述语句描述，也可用集合表示.

例 1.3　在例 1.1 的试验中，有如下表示：事件 $A=$"掷出奇数点"$=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$，$B=$"掷出偶数点"$=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，$C=$"掷出素数点"$=\{\omega_2,\omega_3,\omega_5\}$，而基本事件可表示为 $A_i=\{\omega_i\}$，$i=1,2,\cdots,6$. 如果掷一颗骰子出现的结果是 ω_3，那么事件 A 和 C 便发生了，而事件 B 未发生.

显然，样本空间 Ω 表示的事件在每次试验中必然发生，称其为**必然事件**；空集 $\varnothing$ 表示的事件在每次试验中必定不发生，称其为**不可能事件**. 本质上，这两个事件都不是随机的，但为了研究方便，我们仍把它们当作特殊的随机事件来看待，正如在高等数学中将常量视为变量的特例一样，便于统一处理.

顺便指出，这里所说的事件与日常生活中所说的事件含义是不同的. 日常生活中所指的事件往往是已经发生了的结果，如某某沉船事件、撞车事件等，而概率论中的事件是对一个结果的"陈述"，它可能发生，也可能不发生.

为进一步认识和研究复杂事件，我们首先需要建立事件间的关系和运算，建立复杂事件和一些简单事件的相互联系，进而为计算复杂事件的概率奠定基础.

2. 事件间的关系

首先声明,下面的讨论均在同一个样本空间中进行.

(1) 事件的包含与相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,即 A 的每个样本点都是 B 的样本点,则称 B **包含** A,记作 $A\subseteq B$. 从事件的集合表示看,事件 B 包含事件 A 就是样本空间的子集 B 包含子集 A,如图 1.1(a)所示.

显然,对任何事件 A,总有 $A\subseteq\Omega$. 在例 1.3 中,有 $A_1\subseteq A$,$A_2\subseteq B$,$A_2\subseteq C$.

如果 $A\subseteq B$,同时 $B\subseteq A$,则称事件 A 和事件 B **相等**,记为 $A=B$,即 A 与 B 含有相同的样本点.

(2) 事件的互斥

如果事件 A 和 B 不可能同时发生,即 A 与 B 没有公共样本点,则称 A 与 B **互斥**(mutually exclusive)或**互不相容**. 换句话说,两个事件 A 与 B 互斥就是样本空间的两个子集 A 与 B 不相交,如图 1.1(b)所示.

如果一组事件中任意两个事件都互斥,则称该组事件**两两互斥**,或简称该组事件**互斥**.

由定义可知,任意两个不同的基本事件都是互斥的. 在例 1.3 中,事件 A 与 B 是互斥的,事件组 $A_1,\cdots,A_6$ 是互斥的,而事件 A 与 C 却不是互斥的,因为 A 与 C 有可能同时发生,比如掷出结果 ω_3 或 ω_5.

(3) 事件的互逆

如果事件 A 和 B 中必有一个发生但又不可能同时发生,则称 A 与 B 是**互逆**(mutually inverse)或**对立**的,称 B 为 A 的**逆事件**(或**对立事件**),记作 $B=\overline{A}$. 两个事件 A 与 B 互逆就是样本空间的两个子集 A 与 B 互补,A 的逆事件 $B=\overline{A}$ 就是 A 的补集,如图 1.1(c)所示.

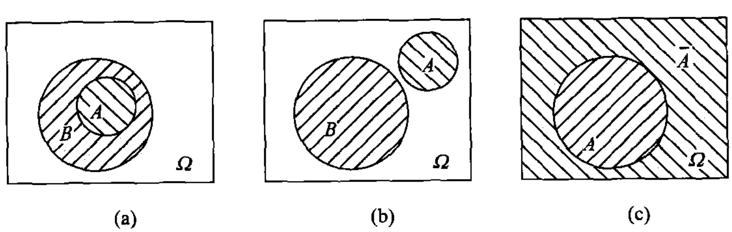

图 1.1

可以看出,事件 A 与 $\overline{A}$ 一定互斥,但互斥的事件却不一定互逆. 例如,在例1.3 中,事件 A 与 B 是互逆的,即 $B=\overline{A}$,$A=\overline{B}$,而事件 A 与 A_2 虽互斥,但不互逆.

3. 事件间的运算

(1) 和事件

对事件 A 和 B，定义它们的**和事件**为

$$A \cup B = \text{“}A\text{ 发生或 }B\text{ 发生”} = \text{“}A\text{ 和 }B\text{ 中至少有一个发生”},$$

即只要 A 与 B 中的一个发生了，就算和事件 $A \cup B$ 发生了，如果 A 与 B 都没发生，当然和事件 $A \cup B$ 也就不发生.

作为样本空间的子集，和事件 $A \cup B$ 是由事件 A 和 B 中的所有样本点组成的新事件，是样本空间子集 A 与 B 的并集，如图 1.2(a)所示. 类似地，可定义

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \text{“}A_1, A_2, \cdots, A_n\text{ 中至少有一个发生”}.$$

注意　当 A 与 B 互斥时，通常将 $A \cup B$ 记为 $A+B$；当事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥时，将它们的和事件 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$.

利用集合的运算关系，容易验证和事件满足关系：$A+\overline{A}=\Omega$，$A \cup \Omega = \Omega$，$A \cup A = A$；当 $A \subseteq B$ 时，还有 $A \cup B = B$.

(2) 积事件

定义事件 A 与 B 的**积事件**为

$$AB = \text{“}A\text{ 和 }B\text{ 同时发生”}.$$

换句话说，积事件 AB 是由 A 与 B 的所有公共样本点组成的新事件，是样本空间的子集 A 与 B 的交集，如图 1.2(b) 所示. 类似地，可定义

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \text{“}A_1, A_2, \cdots, A_n\text{ 同时发生”}.$$

同样可验证积事件满足关系：$A\overline{A} = \varnothing$，$A\Omega = A$，$AA = A$；当 $A \subseteq B$ 时，有 $AB = A$.

(3) 差事件

定义事件 A 与 B 的**差事件**为

$$A - B = \text{“}A\text{ 发生且 }B\text{ 不发生”} = \text{“}A\text{ 与 }\overline{B}\text{ 同时发生”}.$$

即差事件 $A-B$ 是由在 A 中但不在 B 中的所有样本点组成的新事件，是子集 A 与 B 的差集 $A-B$，如图 1.2(c)所示.

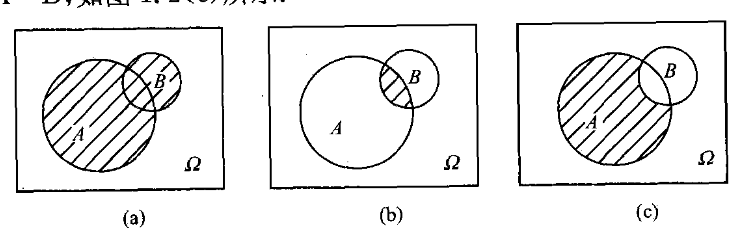

图 1.2

由定义或借助于集合的观点易知，差事件满足关系：

① $A-B=A\overline{B}=A-(AB)$；

② $\Omega-A=\overline{A}$；

③ $(A-B)+B=A\cup B$.

注意以上关系中的(AB)和$(A-B)$都是一个整体记号，分别代表一个积事件和一个差事件，不能对它们做算术运算. 比如，不能推出$(A-B)+B=A$.

由于事件是样本空间的子集，我们在给出事件间关系和运算的概念时，也从集合的观点对它们进行了解释和说明，而且采用了与集合对应关系相一致的记号，便于读者用集合的观点来理解它们. 但是，以后还必须学会直接用本节的概率论语言来思考这些关系和运算，这对后续的学习十分有益.

例 1.4 某射手进行一次打靶射击，所有可能的结果有 11 个：$\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{10}$，其中 ω_0 表示未中靶，ω_i 表示"击中 i 环"，$i=1,\cdots,10$. 易知这是一个随机试验. 若令事件 A="击中 4 至 6 环"，B="击中 5 至 7 环"，C="击中 7 至 9 环"，问下列事件的含义是什么？

① $A\cup B$；② $\overline{A}B$；③ $A-B$；④ $\overline{A(B\cup C)}$.

解 由定义知，和事件 $A\cup B$="击中 4 至 7 环"；积事件 $\overline{A}B$="$\overline{A}$ 和 B 同时发生"="击中 7 环"；差事件 $A-B$="A 发生且 B 不发生"="击中 4 环"；和事件 $B\cup C$="击中 5 至 9 环"；积事件 $A(B\cup C)$="击中 5 至 6 环"；逆事件$\overline{A(B\cup C)}$="未击中 5 至 6 环".

本例也可用样本空间 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\cdots,\omega_{10}\}$的子集来表示其中的事件，然后再解释各自的含义，但不如用概率论语言叙述直接.

例 1.5 为检查某企业的产品质量，依次任取三件产品进行检验. 设事件 A_i="第 i 次取得的是合格品"，$i=1,2,3$，则下列事件可用简单事件 A_1,A_2,A_3 表示如下：

"三次抽取中至少有一次取得合格品"$=A_1\cup A_2\cup A_3$，

"三次抽取都未取得合格品"$=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$，

"三次抽取中恰有一次取得合格品"$=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$，

"三次抽取中至少有一次取得不合格品"$=\overline{A_1A_2A_3}$(或 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$).

最后，我们列出事件满足的基本运算规律：

① 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

② 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$；

③ 分配律 $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC), A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

④ 德摩根(De Morgan)律 $\overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}, \overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

注意 一般地，$\overline{AB}\neq\overline{A}\,\overline{B}, \overline{A\cup B}\neq\overline{A}\cup\overline{B}$.

1.2　随机事件的概率

就随机现象而言，仅仅知道可能发生哪些事件是不够的，更重要的是对事件发生的可能性做出定量的描述. 这就涉及一个概念——事件的概率(probability). 简单地说，一个事件 A 的概率(记为 $P(A)$)就是能刻画该事件发生的可能性大小的一个数值. 因此，凭直觉我们可以说，在掷一枚硬币的试验中"出现数字面"的概率为 1/2，而在掷一颗骰子的试验中"出现'1'点"的概率为 1/6. 但是，对一般的事件而言，单凭主观直觉来确定其发生的概率显然是行不通的，必须从客观分析中寻求答案. 那么，概率有客观性吗？数学上如何定义呢？下面，我们将逐步明确这些问题.

1. 概率的统计定义

对一个事件 A 来说，无论它发生的可能性是大还是小，在一次试验或观察中都可能发生或者不发生. 因此，根据一次试验或观察的结果并不能确定任何一个事件发生的概率(事件 $\varnothing$ 和 Ω 除外). 不过，在大量的重复试验或观察中，事件发生的可能性却可呈现出一定的统计规律，并且随着试验或观察次数的增加，这种规律会表现得愈加明显.

显然，在重复试验或观察中，要反映一个事件发生的可能性大小，最直观的一个量就是**频率**(frequency)，其定义是：若在 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，则 A 在 n 次试验中发生的频率为

$$F_n(A)=\frac{n_A}{n}. \tag{1.1}$$

我们知道，频率 $F_n(A)$ 越大(或小)，事件 A 发生的可能性就越大(或小)，即 A 的概率就越大(或小). 可见，频率是概率的一个很好的反映. 但是，频率却不能因此作为概率，因为概率应当是一个确定的量，不应像频率那样随重复试验和重复次数的变化而变化. 不过即使这样，频率还是可以作为概率的一个估计，而且是一个有客观依据的估计. 这个依据就是所谓的**频率稳定性**：当试验或观察次数 n 较大时，事件 A 发生的频率 $F_n(A)$ 会在某个确定的常数 p 附近摆动，并渐趋稳定. 这是人们通过长期研究和观察总结得出的结果，在一定程度上揭示了事件发生的统计规律性.

例如，在抛硬币的重复试验中，历史上就有不少人统计过事件"出现数字面"(记为 A)发生的频率，结果见表 1.1(其中的随机模拟是用计算机完成的).

表 1.1

试验者	n	n_A	$F_n(A)$	$\|F_n(A)-0.5\|$
蒲丰(Buffon)	4040	2048	0.5069	0.0069
费勒(Feller)	10000	4979	0.4979	0.0021
皮尔逊(K. Pearson)	12000	6019	0.5016	0.0016
皮尔逊	24000	12012	0.5005	0.0005
随机模拟	1000000	499841	0.499841	0.000159

由表 1.1 可见，当 n 较大时，$F_n(A)$在常数 0.5 附近摆动，并且随着 n 的增大，摆动的幅度总体上越来越小，呈现出明显的稳定性. 这就为用 0.5 作为事件 A 的概率提供了客观的统计依据. 也就是说，0.5 作为"出现数字面"的概率并非只是出于人们的主观直觉判断，而是具有一定客观基础的.

根据频率稳定性，我们可以对概率给出一个客观描述，这就是概率的统计定义：一个事件 A 的概率 $P(A)$就是该事件的频率稳定值 p，即 $P(A)=p$.

应当看到，概率的统计定义虽然说明了概率具有客观性，并不是人们主观想象的产物，但这个定义仍有其局限性，因为它没有提供一个确定频率稳定值的方法，同时，人们无法将一个试验无限次地重复下去，从而也就不能严格确定出任何一个事件的概率. 也就是说，还是没有解决如何定义概率的问题. 不过，用频率估计概率、用频率稳定值描述概率已经使我们对概率的本质有了更进一步的认识，为引出概率的公理化定义奠定了基础.

容易验证，频率具有以下三个基本性质：

① 非负性 $F_n(A)\geqslant 0$；

② 规范性 $F_n(\Omega)=1$；

③ 可加性 当 A 和 B 互斥时，有

$$F_n(A+B) = F_n(A)+F_n(B).$$

考虑到概率是频率的稳定值，自然可设想概率也应具有类似的基本特征. 20 世纪 30 年代，著名数学家科尔莫戈罗夫(Kolmogorov)找到了概率本质的特征并首次提出了概率的公理化定义，使概率论作为一门严谨的数学分支从此得以迅速发展. 这是概率论发展史上的一个里程碑.

2. 概率的公理化定义

定义 1.1 设 Ω 是试验 E 的样本空间，$\mathscr{B}$ 是 Ω 上的事件组成的集合. 对任一事件 $A\in\mathscr{B}$，如果定义在 $\mathscr{B}$ 上的实值函数 $P(A)$满足下面三个公理：

(Ⅰ) 非负性 $P(A)\geqslant 0$；

(Ⅱ) 规范性 $P(\Omega)=1$；

（Ⅲ）完全可加性　当事件组 $A_1,A_2,\cdots$ 互斥时，总有

$$P(A_1+A_2+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots, \tag{1.2}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

需要指出，公理（Ⅲ）的式(1.2)要求对无限多个互斥事件也成立，这不同于通常的频率可加性.另外，虽然这个定义从形式上没有解决在特定场合下如何确定事件概率的问题，但它却从本质上明确了概率所必须满足的一般特征.下面，根据定义 1.1，进一步导出概率的一些重要性质.

3. 概率的重要性质

性质 1

$$P(\varnothing)=0. \tag{1.3}$$

证明　因为 $\Omega=\Omega+\varnothing+\varnothing+\cdots$，由公理（Ⅲ），有

$$P(\Omega)=P(\Omega)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots.$$

由公理（Ⅱ），$P(\Omega)=1$，从而，必有 $P(\varnothing)=0$. □

性质 2　若事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 互斥，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n). \tag{1.4}$$

证明　注意到 $A_1+A_2+\cdots+A_n=A_1+A_2+\cdots+A_n+\varnothing+\varnothing+\cdots$，则由公理（Ⅲ）和性质 1 即证式(1.4). □

性质 3

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.5}$$

证明　因为 $\Omega=A+\overline{A}$，由公理（Ⅱ）及性质 2，有

$$1=P(\Omega)=P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

故式(1.5)成立. □

性质 4(减法公式)

$$P(B-A)=P(B)-P(AB). \tag{1.6}$$

特别地，当 $A\subseteq B$ 时，$P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

证明　因为 $B=(AB)+(B-A)$，由性质 2，有

$$P(B)=P[(AB)+(B-A)]=P(AB)+P(B-A).$$

故(式 1.6)成立. □

一般地，$P(B-A)\neq P(B)-P(A)$.

性质 5(加法公式)

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.7}$$

从而，$P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

证明 因为$A\cup B=A+(B-AB)$,所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$
$$\leqslant P(A)+P(B).$$ □

根据式(1.7),还可进一步推出(见习题1的第8题)

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.8}$$

例1.6 已知一批产品中有i件次品的概率为p_i,数值如表1.2所示.求该批产品中至少有一件次品的概率.

表1.2

i	0	1	2	3	4
p_i	0.4	0.22	0.18	0.11	0.09

解 设A_i="有i件次品",$i=0,1,2,3,4$,B="至少有一件次品",则易知A_1,A_2,A_3,A_4互不相容,$P(A_i)=p_i$,且B可表示为$B=A_1+A_2+A_3+A_4$.于是

$$P(B)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)$$
$$=0.22+0.18+0.11+0.09=0.6.$$

更简单的方法是利用$B=\overline{A}_0$,则由式(1.5)即知

$$P(B)=P(\overline{A}_0)=1-P(A_0)=1-0.4=0.6.$$

例1.7 已知事件A与B的和事件是必然事件,$P(A)=0.6$,$P(B)=0.8$.求A和B同时发生的概率.

解 由已知,$A\cup B=\Omega$,根据加法公式(1.7),可得

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=0.6+0.8-1=0.4.$$

例1.8 已知$P(A)=0.4$,$P(B)=0.6$.试在下面两种情形下分别求$P(A-B)$和$P(B-A)$:① 事件A与B互斥;② 事件A与B有包含关系.

解 ① 由已知,$AB=\varnothing$,于是由减法公式(1.6),得

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)=0.4,$$
$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)=0.6.$$

② 因为$P(A)<P(B)$,且A与B有包含关系,所以必有$A\subseteq B$.于是

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0,$$
$$P(B-A)=P(B)-P(A)=0.2.$$

例1.9 假如明天下雨的概率为0.7,后天下雨的概率为0.4,明后两天同时下雨的概率为0.2.求:① 明天下雨且后天不下雨的概率;② 明后两天都不下雨的

概率.

解 ① 设A=“明天下雨”,B=“后天下雨”,则$A\bar{B}$=“明天下雨且后天不下雨”,$A\bar{B}=A-AB$,$AB\subseteq A$,

$$P(A\bar{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)=0.7-0.2=0.5.$$

② 又$\bar{A}\bar{B}$=“明后两天都不下雨”,于是由$\bar{A}\bar{B}=\overline{A\cup B}$,得

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\,\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]\\&=1-[0.7+0.4-0.2]=0.1.\end{aligned}$$

例1.10 设$P(A)=0.7$,$P(B)=0.8$,$P(A\cup B)=0.9$,求$P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

解 由$\bar{A}\cup\bar{B}=\overline{AB}$可知

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cup\bar{B})&=P(\overline{AB})=1-P(AB)\\&=1-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]\\&=1-(0.7+0.8-0.9)=0.4.\end{aligned}$$

1.3 等可能概型的概率计算

在1.2节运用概率基本公式,可以根据一些事件的概率计算另一些事件的概率.现在的问题是这些已知概率又如何获取呢?或者说,怎样直接计算一些简单事件的概率呢?本节在等可能概率模型下讨论这一问题.

1. 古典概型

若随机试验具有以下两个特征:

①(有限性)在试验或观察中,样本空间Ω只有有限个基本事件

$$A_i=\{\omega_i\},\qquad i=1,2,\cdots,n;$$

②(等可能性)每个基本事件A_i发生的可能性都相同,即

$$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n),\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

则称这种随机试验的数学模型为**古典概型**.这种模型是概率论发展初期的主要研究对象.一方面,它相对简单、直观,易于理解;另一方面,它又能解决一些实际问题.因此,至今在概率论中它都占有比较重要的地位.下面,我们给出古典概型中概率的计算公式.

因为$\Omega=A_1+A_2+\cdots+A_n$,所以

$$1=P(\Omega)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

结合$P(A_1)=P(A_2)=\cdots=P(A_n)$,即知