

◆ 人教版

学法大视野
XUEFA DASHIYE

KAOYIBEN

考一本

课程基础导学

高中必修 1

数学



CIPG

海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

责任编辑: 范劲松 潘 丽
责任校对: 吴小燕 谭著名
装帧设计: 张 维 蒋 慧

拥有《考一本》 圆你一本梦



长郡雅礼 **联袂** 打造
一线名师 担纲编写

语文·高中必修 1, 2, 3, 4, 5(人教版)
数学·高中必修 1, 2, 3, 4, 5(人教版)
英语·高中模块 1, 2, 3, 4, 5(译林版)
物理·高中必修 1, 2(人教版)
化学·高中必修 1, 2(人教版)
历史·高中必修 1, 2, 3(人教版)
地理·高中必修 1, 2, 3(湘教版)
生物·高中必修 1, 2, 3(人教版)
思想政治·高中必修 1, 2, 3, 4(人教版)

语文·高中选修·文章写作与修改(人教版)
语文·高中选修·中国古代诗歌散文欣赏(人教版)
语文·高中选修·新闻阅读与实践(人教版)
语文·高中选修·中国文化经典研读(人教版)
语文·高中选修·外国小说欣赏(人教版)
数学·高中选修 1-1, 1-2, 2-1, 2-2, 2-3(人教版)
数学·高中选修 4-1, 4-4, 4-5, 4-7(人教版)
英语·高中模块 6, 7, 8, 9, 10, 11(译林版)
物理·高中选修 1-1, 3-1, 3-2, 3-4, 3-5(人教版)
化学·高中选修 1, 4, 5(人教版)
生物·高中选修 1, 3(人教版)
历史·高中选修 1, 3(人教版)
地理·高中选修 3, 5(湘教版)

 百校联盟
BISCHOOOL

本丛书由 www.acpub.com (中国学术出版网) 提供数字出版支持
欢迎访问 www.baishibaile.com, 查询学科资讯, 参与在线互动

ISBN 978-7-5110-0320-1



9 787511 003201 >

定价: 12.00 元



数学

高中必修1 (人教版)

组编单位: 长沙市教育科学研究院

编写指导: 王 旭 卢鸿鸣 刘维朝

(按姓氏笔画)

陈来满 雷建军 黎 奇

本册主编: 杨 科	陈 峰			
本册编者: 杨 科	龙检罗	周才凯	李彭超	陈建民
李 强	刘一波	常 君	薛祖山	刘陆军
李群丽	匡铀龄	丁正光	李 斑	皮维忠
邓志强	陈朝阳	张 臻	陈炽喜	丁秋红
李武辉	汤 芳	唐丙乾	滕晓军	李云皇
曾卫国	王平波	张志忠	高 李	赵攀峰
华接春	李生根	饶金伟	王 毅	谭泽阳
本册审读: 戴国良	马喜霞	龚德军		



海豚出版社
DOLPHIN BOOKS
中国国际出版集团

图书在版编目(CIP)数据

考一本·课程基础导练. 数学. 1: 必修 / 杨科, 陈峰
主编. —北京: 海豚出版社, 2010.7

ISBN 978-7-5110-0320-1

I. ①考… II. ①杨… ②陈… III. ①数学课—高中—习题 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 135214 号

书 名: 考一本·课程基础导练 数学(必修1)

作 者: 杨 科 陈 峰

责任编辑: 范劲松 潘 丽

责任校对: 吴小燕 谭著名

装帧设计: 张 维 蒋 慧

出 版: 海豚出版社

网 址: <http://www.dolphin-books.com.cn>

地 址: 北京市百万庄大街 24 号 邮 编: 100037

客服电话: 0731-84322947 84313942 82254875

传 真: 0731-84322947 82322805

印 刷: 湖南版艺印刷有限公司

开 本: 16 开(880 毫米×1230 毫米)

印 张: 6

字 数: 180 千字

版 次: 2010 年 7 月第 1 版 2010 年 7 月第 1 次印刷

标准书号: ISBN 978-7-5110-0320-1

定 价: 12.00 元

版权所有 侵权必究

PREFACE

编者寄语

积经年之底蕴,凝教学之精华。全新呈现在您面前的《考一本·课程基础导练》是由湖南省四大名校之长郡中学、雅礼中学联手倾力打造,经校内众多长年奋战在教学一线上的特、高级教师精心编写而成的。长郡、雅礼两校此番在教辅用书上的联袂合作,尚属首次,而由各学科带头人牵头的作者队伍,也都是教育界的精兵强将。作为编者,我们有足够的理由相信,《考一本·课程基础导练》这套新型教辅用书必将给广大师生带来福音。

本套丛书立足于学业水平考试,跟踪服务新高考,以最新教材为依托,彰显教育教学新理念,整体来说,具有权威、同步、联动、实用等几大特色。

权威 本套丛书的编写团队,不仅具有扎实的教学功底,丰富的教学经验,而且深谙高中教育教学的规律和特点,由学科带头人领队的编写更是有力地保证了该套丛书的权威性。

同步 教与学一体,知识与能力同步,将“怎么学”与“怎么教”放在一起同步设计,以方法为主线实施教学,使学生不仅能轻松地掌握基础知识,而且能尽快地提高综合能力。本套丛书以全新的视角向广大师生介绍这种符合教学规律的立体化学习方案。

联动 教与学联动,相互促进,涵盖全部知识点的教法学法设计,抓住重难点的讲练结合编排,使这个主体充满鲜活而翔实的内容。

实用 本套丛书注重基础,突出实用、好用,并充分照顾到不同层次、不同阶段的学生学习时的实际需要,在知识和能力的安排上循序渐进,难易有度。书中例题和习题的选取充分考虑最新命题趋势,既博采众长,又自成系统。各分册体例相对统一,但又根据模块特点和各年级教学实际有所不同,各具特色。

踏破铁鞋无觅处。但愿《考一本·课程基础导练》正是您苦苦寻觅中的教辅用书,并祈求它的上乘品质能带给您成功的好运。

本套丛书的编辑与出版,得益于教育界、出版界众多知名人士的热情帮助和大力支持,他们提出了诸多很好的建议,在此谨表衷心感谢。恳切希望广大师生和教育专家在这套丛书问世后,多提宝贵意见,以便我们进一步修订完善。

编者

2010年7月

CONTENTS

目 录

第一章 集合与函数概念	001
第1课时 § 1.1.1 集合的含义与表示	001
第2课时 § 1.1.2 集合间的基本关系	003
第3课时 § 1.1.3 集合的基本运算(1)	005
第4课时 § 1.1.3 集合的基本运算(2)	007
第5课时 § 1.2.1 函数的概念(1)	009
第6课时 § 1.2.1 函数的概念(2)	011
第7课时 § 1.2.2 函数的表示法(1)	013
第8课时 § 1.2.2 函数的表示法(2)	016
第9课时 § 1.3.1 单调性与最大(小)值(1)	019
第10课时 § 1.3.1 单调性与最大(小)值(2)	022
第11课时 § 1.3.2 奇偶性	025
第12课时 第一章集合与函数概念复习	028
第二章 基本初等函数(I)	032
第13课时 § 2.1.1 指数与指数幂的运算(1)	032
第14课时 § 2.1.1 指数与指数幂的运算(2)	034
第15课时 § 2.1.2 指数函数及其性质(1)	037
第16课时 § 2.1.2 指数函数及其性质(2)	040
第17课时 § 2.1.2 指数函数及其性质(3)	044
第18课时 § 2.2.1 对数与对数运算(1)	047
第19课时 § 2.2.1 对数与对数运算(2)	049
第20课时 § 2.2.1 对数与对数运算(3)	051
第21课时 § 2.2.2 对数函数及其性质(1)	053
第22课时 § 2.2.2 对数函数及其性质(2)	056
第23课时 § 2.2.2 对数函数及其性质(3)	058
第24课时 § 2.3 幂函数	060
第25课时 第二章基本初等函数(I)复习	062

目录

CONTENTS

第三章 函数的应用	066
第26课时 § 3.1.1 方程的根与函数的零点(1)	066
第27课时 § 3.1.1 方程的根与函数的零点(2)	068
第28课时 § 3.1.2 用二分法求方程的近似解	070
第29课时 § 3.2.1 几类不同增长的函数模型(1)	072
第30课时 § 3.2.1 几类不同增长的函数模型(2)	076
第31课时 § 3.2.2 函数模型的应用实例(1)	080
第32课时 § 3.2.2 函数模型的应用实例(2)	084
第33课时 第三章函数的应用复习	088

第一章 集合与函数概念

第1课时 § 1.1.1 集合的含义与表示

发现问题



情景导思

集合论是德国著名数学家康托尔于19世纪末创立的。集合语言(自然语言、符号语言、图形语言)是现代数学的基本语言,可以简洁、准确地表达数学内容。那么集合的含义是什么?如何表示集合呢?

互动课堂



知识清单

知识点1:集合的含义

一般地,我们把研究对象统称为元素,把一些元素组成的总体叫做集合(简称为集)。经常用大写拉丁字母 $A, B, C, \dots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a, b, c, \dots$ 表示集合中的元素。

数学中一些常用的数集及其记法如下:非负整数集(或自然数集) N , 正整数集 N^+ 或 N_+ , 整数集 Z , 有理数集 Q , 实数集 R 。

知识点2:集合中元素的特性

(1)确定性:给定一个集合,任何对象是不是这个集合的元素是确定的。

(2)互异性:集合中的元素一定是不同的。

(3)无序性:集合中的元素没有固定的顺序,若两个集合的元素完全一样,则这两个集合相等,记为: $A=B$ 。

知识点3:元素与集合的关系

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于集合 A , 记作 $a \in A$;

如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于集合 A , 记作 $a \notin A$ 。

要注意“ $\in$ ”的方向,不能把 $a \in A$ 颠倒过来写。

知识点4:集合的表示方法

我们可以用自然语言描述一个集合,还可以用列举法、描述法等来表示集合。

(1)把集合中的元素一一列举出来,并用花括号“ $\{ \}$ ”括起来表示集合的方法叫做列举法。区分 a 与 $\{a\}$: $\{a\}$ 表示一个集合,该集合只有一个元素 a ; a 表示这个集合中的一个元素。

(2)用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法,基本形式为 $\{x \in I | P(x)\}$, 其中的 x 表示集合中的代表元素, I 表示代表元素 x 的取值范围, $P(x)$ 则表示代表元素 x 的共同特征。

学法指导

1. 注意集合的“三性”

【例1】以方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 和方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为元素构成集合 M , 则 M 中元素的个数为 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【解析】由集合元素的互异性可知,两个相同的对象只能算作集合中的一个元素。方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = 3$; 方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的解为 $x_1 = -1, x_2 = 2$ 。所以 $M = \{-1, 2, 3\}$, 故选 C。

【点评】对于涉及集合元素的问题,首先应想到其确定性、互异性、无序性。

变式训练:下列命题正确的有 (填序号)。

①很小的实数可以构成集合; ②集合 $\{1, 5\}$ 与集合 $\{5, 1\}$ 是相同的集合; ③集合 $\{(1, 5)\}$ 与集合 $\{(5, 1)\}$ 是同一个集合; ④由 $1, \frac{3}{2}, \frac{6}{4}, |-\frac{1}{2}|, 0.5$ 这些数组成的集合有 5 个元素。

2. 选取集合的表示方法

【例2】已知集合 $C = \left\{ \frac{6}{1+x} \in Z | x \in N \right\}$, 求集合 C 。

【解析】对于本题,集合 C 中元素应是 $\frac{6}{1+x}$, 而不是 x , 满足的条件是 $\frac{6}{1+x} \in Z$ 且 $x \in N$ 。

$\because x \in N, \therefore x+1 \geq 1$, 又 $\frac{6}{1+x} \in Z, \therefore 1+x = 1, 2, 3, 6$ 。

$\therefore \frac{6}{1+x} = 6, 3, 2, 1$, 即 $C = \{6, 3, 2, 1\}$ 。

【点评】当集合为有限集时,一般用列举法。当集合为无限集时,一般不采用列举法,因为不能将其一一列出,这时宜用描述法。对于同一集合,有时既可用列举法又可用描述法,这时应择优选用。

变式训练:(1)一次函数 $y = x - 2$ 与 $y = -2x + 7$ 的图象的交点组成的集合是 _____;

(2)函数 $y = \frac{3}{x^2 - 2}$ 的自变量 x 的值组成的集合是 _____。

3. 元素和集合的关系

【例3】给出下列关系:

- ① $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$; ② $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$; ③ $|-3| \in \mathbf{N}_+$; ④ $|\sqrt{3}| \in \mathbf{Q}$ 其

中正确的个数为 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【解析】 $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, 而不是 $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}$, ①错, ②对, ③错, ④错. 故选 A.

【点评】常用数集的记法要记住. 对于一个元素 a 和集合 A 而言, 只有“ $a \in A$ ”与“ $a \notin A$ ”这两种结果.

变式训练: 集合 M 的元素为自然数, 且满足: 如果 $x \in M$, 则 $8-x \in M$, 试求所有满足条件的 x 构成的集合 M .

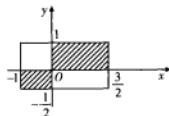
自主成长

夯实基础

- 下列各项中, 不可以组成集合的是 ()
A. 所有的正数 B. $-1, -2, -2, -3, 5$
C. 接近于 0 的数 D. 不等于 0 的偶数
- 直线 $y=2x+1$ 与 y 轴的交点所组成的集合为 ()
A. $\{0, 1\}$ B. $\{(0, 1)\}$
C. $\{-\frac{1}{2}, 0\}$ D. $\{(-\frac{1}{2}, 0)\}$
- 设 $a, b \in \mathbf{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \{0, \frac{b}{a}, b\}$, 则 $b-a =$ ()
A. 1 B. -1 C. 2 D. -2
- 点集 $M = \{(x, y) | xy \geq 0\}$ 是指 ()
A. 第一象限内的点集
B. 第三象限内的点集
C. 第一、第三象限内的点集
D. 不在第二、第四象限内的点集
- 下列关系式中: ① $2 \in \mathbf{Q}$; ② $\mathbf{N} \in \mathbf{R}$; ③ $2 \in \{(2, 1)\}$; ④ $2 \in \{(2), \{1\}\}$; ⑤ 菱形 $\in$ {四边形与三角形}; ⑥ $2 \in \{y | y = x^2\}$. 其中正确的关系式的序号是_____.
- 方程组 $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=5 \end{cases}$ 的解集用列举法表示为_____; 用描述法表示为_____.
- 已知集合 $A = \{x | ax^2 - 3x + 2 = 0\}$ 至多有一个元素, 则 a 的取值范围是_____.

能力提升

8. 用描述法表示图中的阴影部分(包括边界).



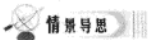
- (1) 已知 $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, $B = \{y | y = |x|, x \in A\}$, 求 B (用列举法表示);
(2) 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{N} | \frac{6}{1+x} \in \mathbf{Z}\}$, 求 A (用列举法表示).

挑战自我

- 数集 A 满足条件: 若 $a \in A, a \neq 1$, 则 $\frac{1}{1-a} \in A$.
(1) 若 $2 \in A$, 则在 A 中还有两个元素是什么?
(2) 试讨论该集合是否为单元素集合.

第2课时 §1.1.2 集合间的基本关系

发现问题

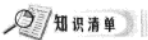


实数有相等关系、大小关系,如 $5=5, 5<7, 5>3$,等等.类比实数之间的关系,观察下面两个例子,你会想到集合之间的什么关系?

$$(1) A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

(2) $C = \{x | x \text{ 是两条边相等的三角形}\}, D = \{x | x \text{ 是等腰三角形}\}.$

互动课堂



知识点1:子集

一般地,对于两个集合 A, B ,如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素,我们就说这两个集合有包含关系,称集合 A 为集合 B 的子集,记作 $A \subseteq B$ (或 $B \supseteq A$),读作: A 含于 B (或 B 包含 A).

$$\text{如: } \{x | x > 3\} \subseteq \{x | 3x - 6 > 0\}.$$

知识点2:两集合相等

如果集合 A 是集合 B 的子集($A \subseteq B$),且集合 B 是集合 A 的子集($B \subseteq A$),此时,集合 A 与集合 B 中的元素是一样的,因此,集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.

$$\text{如: } \{x | x^2 - 1 = 0\} = \{-1, 1\}.$$

知识点3:真子集

如果集合 $A \subseteq B$,但存在元素 $x \in B$,且 $x \notin A$,我们称集合 A 是集合 B 的真子集,记作 $A \subset B$ (或 $B \supset A$).

$$\text{如: } A = \{x | x \text{ 是正方形}\} \subset B = \{x | x \text{ 是四边形}\}.$$

知识点4:Venn图

在数学中,我们经常用平面上封闭曲线的内部代表集合,这种图称为Venn图.如: $A \subseteq B$ 可以用下图表示:



知识点5:空集

我们把不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\emptyset$.

$$\text{如: } \{x | x^2 + 1 = 0\} = \emptyset.$$

规定:空集是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.

知识点6:基本性质

(1)任何一个集合是它本身的子集,即 $A \subseteq A$;

(2)对于集合 A, B, C ,如果 $A \subseteq B, B \subseteq C$,那么 $A \subseteq C$;

(3)若集合 A 含有 n 个元素,则 A 的子集个数为 2^n , A 的真子集个数为 $2^n - 1$, A 的非空真子集个数为 $2^n - 2$.

学法指导

1. 注意 $\emptyset, \{\emptyset\}$ 的关系

【例1】下列关系错误的是 ()

- A. $\emptyset \subseteq \{0\}$ B. $0 \in \{0\}$
C. $0 \in \emptyset$ D. $0 \notin \{0\}$

【解析】C

【点评】数0是元素, $\{0\}$ 是含一个元素0的集合, $\emptyset$ 是不含任何元素的集合, $\{\emptyset\}$ 是以 $\emptyset$ 作为元素的集合.要注意它们的区别与联系.

变式训练:集合 $\emptyset$ 与 $\{0\}$ 的关系是 ()

- A. $\{0\} = \emptyset$ B. $\emptyset \in \{0\}$
C. $\emptyset \subseteq \{0\}$ D. $\{0\} \subseteq \emptyset$

2. 注意符号“ $\in$ ”与“ $\subseteq$ ”的区别

【例2】设 $M = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \sqrt{10}\}$, $a = 3$,则下列关系正确的是 ()

- A. $a \subseteq M$ B. $a \notin M$
C. $\{a\} \in M$ D. $\{a\} \subseteq M$

【解析】 a 是元素, $\{a\}$ 与 M 是集合,由于 $3 \leq \sqrt{10}$,故选D.

【点评】符号“ $\in$ ”用在元素和集合间表示从属关系;符号“ $\subseteq$ ”用在两集合间表示包含关系.特别需要指出的是,“ $a, b \in A$ ”与“ $\{a, b\} \subseteq A$ ”之间既有区别又有联系.

变式训练:(1)若 $a, b \in (3, 4.5)$,则函数 $y = ax^2 + bx$ 有多少条不同的对称轴?

(2)若 $\{a, b\} \subseteq \{3, 4.5\}$,则函数 $y = ax^2 + bx$ 有多少条不同的对称轴?

3. 利用集合之间的关系确定变量的范围

【例3】已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m-4 < x \leq 2m+7\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 m 的取值范围.

【解析】利用数轴, 得 $\begin{cases} m-4 < -2, \\ 2m+7 \geq 5, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq m < 2$.

【点评】数轴法是解决此类题型的一种很好的方法.

变式训练:(1)已知集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 5\}$, $B = \{x | m+1 \leq x \leq 2m-1\}$, 且 $B \subseteq A$, 求实数 m 的取值范围.

(2)已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 且 $A \supseteq B$, 求实数 a 组成的集合.

自主成长

夯实基础

- 以下六个关系式: ① $0 \in \{0\}$; ② $\{0\} \supseteq \emptyset$; ③ $0.3 \in \mathbf{Q}$; ④ $0 \in \mathbf{N}$; ⑤ $\{a, b\} \subseteq \{b, a\}$; ⑥ $\{x | x^2 - 2 = 0, x \in \mathbf{Z}\}$ 是空集. 其中错误的个数是 ()
A. 4 B. 3 C. 2 D. 1
- 下面关于集合的表示正确的个数是 ()
① $\{2, 3\} \neq \{3, 2\}$;
② $\{(x, y) | x+y=1\} = \{y | x+y=1\}$;
③ $\{x | x > 1\} = \{y | y > 1\}$;
④ $\{x | x+y=1\} = \{y | x+y=1\}$.
A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
- 下列四个集合中, 是空集的是 ()
A. $\{x | x+3=3\}$
B. $\{(x, y) | y^2 = -x^2, x, y \in \mathbf{R}\}$
C. $\{x | x^2 \leq 0\}$
D. $\{x | x^2 - x + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\}$
- 已知集合 $M \subseteq \{4, 7, 8\}$, 且 M 中至多有一个偶数, 则这样的集合共有 ()
A. 3个 B. 4个 C. 6个 D. 5个

5. 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$.

6. 已知 $\{x | x-1=0\} \subseteq A \subseteq \{x \in \mathbf{N} | 0 \leq x-1 < 3\}$, 则满足条件的集合 A 的个数是 个.

7. 集合 $\{x, y | x+y-2=0 \text{ 且 } x-2y+4=0\} \subseteq \{(x, y) | y=3x+b\}$, 则 $b =$.

能力提升

8. 写出集合 $\{0, 1, 2\}$ 的所有子集, 并指出其非空真子集.

9. 设集合 $A = \{x, x^2, y^2-1\}$, $B = \{0, |x|, y\}$, 且 $A=B$, 求 x, y 的值.

挑战自我

10. 已知 $A = \{x | (m-1)x+1=0\}$, $B = \{x | x^2-2x-3=0\}$, 若 $A \subseteq B$, 求 m 的值.

第3课时 §1.1.3 集合的基本运算(1)

发现问题



情景导思

我们知道,实数有加法运算,类比实数的加法运算,集合是否也可以“相加”呢?

考察下列各个集合,你能说出集合C与集合A、B之间的关系吗?

$$(1) A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

(2) $A = \{x | x \text{ 是有理数}\}, B = \{x | x \text{ 是无理数}\}, C = \{x | x \text{ 是实数}\};$

$$(3) A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{3, 5, 8, 12\}, C = \{8\}.$$

互动课堂



知识清单

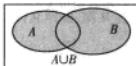
知识点1:并集

一般地,由所有属于集合A或属于集合B的元素组成的集合,称为集合A与B的并集,记作 $A \cup B$ (读作“A并B”),即 $A \cup B = \{x | x \in A, \text{ 或 } x \in B\}$. 并集的 Venn 图如下图所示.

性质: $A \cup B = B \cup A$;

$$A \cup A = A; A \cup \emptyset = A;$$

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$



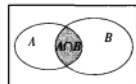
知识点2:交集

一般地,由属于集合A且属于集合B的所有元素组成的集合,称为A与B的交集,记作 $A \cap B$ (读作“A交B”),即 $A \cap B = \{x | x \in A, \text{ 且 } x \in B\}$. 交集的 Venn 图如下图所示.

性质: $A \cap B = B \cap A$;

$$A \cap A = A; A \cap \emptyset = \emptyset;$$

$$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B.$$

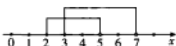


学法指导

1. 利用数轴法或 Venn 图求集合的交、并集

【例1】已知集合 $A = \{x | 2 \leq x < 5\}, B = \{x | 3 \leq x < 7\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

【解析】利用数轴工具,画出集合A、B的示意图,如图:



可以得到 $A \cap B = \{x | 3 \leq x < 5\}, A \cup B = \{x | 2 \leq x < 7\}$.

【点评】利用数形结合的思想,将满足条件的集合在数轴上一表示出来,从而可求出集合的交集与并集.

变式训练:设A、B、C为三个集合,如果 $A \cup B = B \cap C$,那么一定有

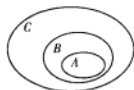
()

$$A. A \subseteq C$$

$$B. C \subseteq A$$

$$C. A \neq C$$

$$D. A = \emptyset$$



2. 利用集合运算,确定变量的值或范围

【例2】已知 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}, B = \{x | ax - 2 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数a组成的集合C.

【解析】当 $a = 0$ 时, $B = \emptyset$ 符合题意;

当 $a \neq 0$ 时, $B = \{\frac{2}{a}\}$, 而 $A = \{1, 2\}$,

$$\therefore A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A, \therefore \frac{2}{a} = 1 \text{ 或 } \frac{2}{a} = 2,$$

$$\therefore a = 2 \text{ 或 } a = 1.$$

$$\text{综上, } C = \{0, 1, 2\}.$$

【点评】因为 $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$, 可据此求a的值, 但要注意 $B = \emptyset$ 的情形.

变式训练: 已知集合 $A = \{2, 3, a^2 + 4a + 2\}, B = \{0, 7, a^2 + 4a - 2, 2 - a\}$, 且 $A \cap B = \{3, 7\}$, 求a的值.

3. 注意数集与点集的区别

【例3】(1) 已知 $A = \{(x, y) | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{(x, y) | y = 7 - x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____;

(2) 已知 $A = \{y | y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}\}, B = \{y | y = 7 - x^2, x \in \mathbf{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

【解析】解方程组 $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 7 - x^2 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

曲线 $y = x^2 - 1$ 和 $y = 7 - x^2$ 的两交点为 $(-2, 3)$ 和 $(2, 3)$.

第(1)题中A、B为点集, $A \cap B = \{(-2, 3), (2, 3)\}$.

第(2)题因为A、B都表示数集, 它们分别表示函数 $y = x^2 - 1, x \in \mathbf{R}$ 和 $y = 7 - x^2, x \in \mathbf{R}$ 的函数值的集合, 有 $A = \{y | y \geq -1\}, B = \{y | y \leq 7\}$, 因此 $A \cap B = \{y | -1 \leq y \leq 7\}$.

【点评】容易出现两方面的错误. 一是书写上的错误, 如把点集 $\{(-2, 3)\}$ 误写为 $\{2, 3\}$ 或 $\{x = 2, y = 3\}$ 等; 二是理解上的错误, 如把数集 $\{y | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 误写为 $\{(x, y) | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 或 $\{x | y = x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ 等.

注意: 认识一个集合, 首先要看其代表元素, 再看该元素的属性, 从而确定其实质.

变式训练:已知集合 $P=\{y|y=-x^2+2, x \in \mathbf{R}\}$, $Q=\{x|y=-x+2, x \in \mathbf{R}\}$, 那么 $P \cap Q=$ ()

- A. $(0,2), (1,1)$ B. $\{(0,2), (1,1)\}$
C. $\{1,2\}$ D. $\{y|y \leq 2\}$

自主成长

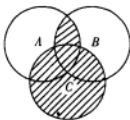
夯实基础

1. 设集合 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4\}$, 则 $A \cap B=$ ()
A. $\{2,3,4\}$ B. $\{1,2,3\}$ C. $\{2,3\}$ D. $\{1,4\}$
2. 已知集合 $A=\{-1,1\}$, $B=\{x|mx=1\}$, 且 $A \cup B=A$, 则 m 的值为 ()

- A. 1 B. -1
C. 1 或 -1 D. 1 或 -1 或 0

3. 右图中的阴影部分可以表示为 ()

- A. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
B. $(A \cup B) \cap (A \cup C)$
C. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
D. $(A \cup B) \cap C$



4. 满足 $M \cup N = \{a, b\}$ 的集合 M, N 共有 ()

- A. 7 组 B. 8 组
C. 9 组 D. 10 组

5. 若集合 $A=\{1,3,x\}$, $B=\{x^2,1\}$, $A \cup B=\{1,3,x\}$, 则满足上述条件的实数 x 的值为 _____.

6. 设 $A=\{x|-1 < x \leq 8\}$, $B=\{x|x > 4 \text{ 或 } x < -5\}$, 则 $A \cap B=$ _____, $A \cup B=$ _____.

7. 已知 $M=\{1\}$, $N=\{1,2\}$, 设 $A=\{(x,y)|x \in M, y \in N\}$, $B=\{(x,y)|x \in N, y \in M\}$. 则 $A \cap B=$ _____, $A \cup B=$ _____.

能力提升

8. (1) 已知集合 $A=\{y|y=x^2-2x-2, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{y|y=-x^2-2x, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B, A \cup B$.

- (2) 已知集合 $A=\{(x,y)|y=x^2-2x-2, x \in \mathbf{R}\}$, $B=\{(x,y)|y=-x^2-2x, x \in \mathbf{R}\}$, 求 $A \cap B$.

9. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两个不相等实根为 α, β , 集合 $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{2,4,5,6\}$, $C=\{1,2,3,4\}$, $A \cap C=A$, $A \cap B=\emptyset$, 求 p, q 的值.

挑战自我

10. 在高一年级数理化三科竞赛中, 某班学生每人至少参加了数理化竞赛中的一种, 已知获奖结果是: 有 13 人获数学奖, 10 人获物理奖, 11 人获化学奖, 28 人未获奖, 假定这三科竞赛是不同时间里举行的, 问这个班至多有多少人, 至少有多少人?

第4课时 §1.1.3 集合的基本运算(2)

发现问题



情景导思

在下列范围内解方程 $(x-2)(x^2-3)=0$.

(1)有理数范围; (2)实数范围.

不同的范围对问题的结果有何影响?

我们发现:在有理数范围内原方程只有一个解2,即

$$\{x \in \mathbb{Q} | (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2\};$$

在实数范围内原方程有三个解:2, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, 即

$$\{x \in \mathbb{R} | (x-2)(x^2-3)=0\} = \{2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}.$$

在研究集合问题时,我们经常需要确定研究对象的范围.

互动课堂



知识清单

知识点1:全集

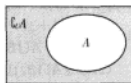
一般地,如果一个集合含有我们所研究问题中涉及的所有元素,那么就称这个集合为全集,通常记作 U .

说明:全集是相对于研究的问题而言的,如在整数范围内研究问题,则 $\mathbb{Z}$ 是全集,而在实数范围内研究问题,则 $\mathbb{R}$ 是全集.通常也把给定的集合作为全集.

知识点2:补集

对于一个集合 A ,由全集 U 中不属于集合 A 的所有元素组成的集合称为集合 A 相对于全集 U 的补集,简称为集合 A 的补集,记作 $\complement_U A$,即 $\complement_U A = \{x | x \in U, \text{且 } x \notin A\}$.

补集的 Venn 图如右图所示.



性质:

$$(1) A \cap (\complement_U A) = \emptyset, A \cup (\complement_U A) = U, \complement_U (\complement_U A) = A;$$

$$(2) \complement_U (A \cup B) = (\complement_U A) \cap (\complement_U B),$$

$$\complement_U (A \cap B) = (\complement_U A) \cup (\complement_U B).$$

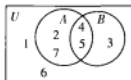
学法指导

1. 利用 Venn 图进行有限集的运算

【例1】已知集合 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{2, 4, 5, 7\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 则 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) =$ ()

- A. $\{1, 6\}$
B. $\{4, 5\}$
C. $\{2, 3, 4, 5, 7\}$
D. $\{1, 2, 3, 6, 7\}$

【解析】画出符合条件的 Venn 图, 则 $A \cap B = \{4, 5\}$,



故 $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$. 故选 D.

【点评】用 Venn 图表示集合可使有限集的运算简洁明了, 当然本题也可以不用 Venn 图, 先求出 $\complement_U A$, $\complement_U B$, 再求出它们的并集.

变式训练: 已知集合 $U = \{x | x \leq 10, \text{且 } x \in \mathbb{N}^*\}$, $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, 且 $A \cap B = \{4, 5\}$, $(\complement_U B) \cap A = \{1, 2, 3\}$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{6, 7, 8\}$, 求集合 A 和 B .

2. 定义“新概念”“新运算”解题

【例2】设全集 $U = \{1, 2, 3, 4\}$, 集合 A, B 都是 U 的不同子集, 若 $A \cap B = \{1, 3\}$, 则称 A, B 为“理想配集”, 记作 (A, B) , 这样的“理想配集” (A, B) 共有 ()

- A. 4 个 B. 8 个 C. 9 个 D. 16 个

【解析】由题意, 当 $A = \{1, 3\}$ 时, B 有 $\{1, 3, 2\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}$ 三种情况;

当 $A = \{1, 3, 2\}$ 时, B 有 $\{1, 3\}, \{1, 3, 4\}$ 两种情况;

当 $A = \{1, 3, 4\}$ 时, B 有 $\{1, 3\}, \{1, 3, 2\}$ 两种情况;

当 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ 时, B 有 $\{1, 3\}$ 一种情况.

所以共有 $3+2+2+1=8$, 故选 B.

【点评】解题时, 紧抓住“理想配集”的定义, 将“理想配集”用语言“翻译”过来, 根据集合的运算分类讨论.

变式训练: 设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为 $M - P = \{x | x \in M, \text{且 } x \notin P\}$, 则 $M - (M - P) =$ ()

- A. P B. $M \cap P$
C. $M \cup P$ D. M

3. 注意弄清全集的含义

【例3】 设全集 $S = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$, $A = \{|2a - 1|, 2\}$, $\complement_S A = \{5\}$, 求 a 的值.

【解析】 $\because \complement_S A = \{5\}, \therefore 5 \in S$ 且 $5 \notin A$,

$$\therefore a^2 + 2a - 3 = 5, \text{ 即 } a^2 + 2a - 8 = 0,$$

$$\therefore a = 2 \text{ 或 } a = -4.$$

当 $a = 2$ 时, $|2a - 1| = 3$, 此时满足 $3 \in S$.

当 $a = -4$ 时, $|2a - 1| = 9 \notin S, \therefore a = -4$ 应舍去.

综上知 $a = 2$.

【点评】 本题容易错解为“或”, 因为没有正确理解全集的含义, 产生增解的错误. 全集 S 中应含有讨论集合中的一切元素, 所以还须检验.

变式训练: 全集 U 是函数 $y = \sqrt{x-7}$ 的自变量 x 的取值范围, $A = \{x | x \geq 10\}$, 求 $\complement_U A$.

能力提升

8. 已知集合 $A = \{x | x < a\}$, $B = \{x | 1 < x < 2\}$, 且 $A \cup (\complement_{\mathbb{R}} B) = \mathbb{R}$, 求实数 a 的取值范围.

9. 设全集 $U = \{x \in \mathbb{N}^* | x < 8\}$, $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 5\}$. 求:

(1) $\complement_U (A \cup B)$, $\complement_U (A \cap B)$;

(2) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B)$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B)$;

(3) 由上面的练习, 你能得出什么结论? 请结合 Venn 图进行分析.

自主成长

夯实基础

1. 设全集 $U = \{a, b, c, d, e\}$, 集合 $A = \{a, c, d\}$, $B = \{b, d, e\}$, 那么 $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) =$ ()

A. $\emptyset$

B. $\{d\}$

C. $\{a, c\}$

D. $\{b, c\}$

2. 已知全集 $U = \mathbb{N}$, 集合 $A = \{x | x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$, 集合 $B = \{x | x = 4n, n \in \mathbb{N}\}$, 则 ()

A. $U = A \cup B$

B. $U = (\complement_U A) \cup B$

C. $U = A \cup (\complement_U B)$

D. $U = (\complement_U A) \cup (\complement_U B)$

3. 下列结论中, 不正确的是 ()

A. $\complement_U U = \emptyset$

B. $\complement_U \emptyset = U$

C. $\complement_U (\complement_U A) = A$

D. $\complement_U A = \{0\}$

4. 设 U 为全集, P, Q 为非空集合, 且 $P \subseteq Q \subseteq U$, 下面结论中不正确的是 ()

A. $(\complement_U P) \cup Q = U$

B. $(\complement_U P) \cap Q = \emptyset$

C. $P \cup Q = Q$

D. $(\complement_U Q) \cap P = \emptyset$

5. 设 $S = \{x | x \text{ 是至少有一组对边平行的四边形}\}$, $A = \{x | x \text{ 是平行四边形}\}$, 则 $\complement_S A =$ _____.

6. 已知 $U = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 10\}$, $A = \{\text{小于 } 10 \text{ 的正奇数}\}$, $B = \{\text{小于 } 10 \text{ 的质数}\}$, 则 $\complement_U A =$ _____, $\complement_U B =$ _____.

7. 集合 $A = \{0, 2, 4, 6\}$, $\complement_U A = \{-1, -3, 1, 3\}$, $\complement_U B = \{-1, 0, 2, 3\}$, 则 $B =$ _____.

挑战自我

10. 设 $A = \{x | x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 = 0\}$, $C = \{x | x^2 + 2x - 8 = 0\}$.

(1) $A \cap B = A \cup B$, 求 a 的值;

(2) $\emptyset \subsetneq A \cap B$, 且 $A \cap C = \emptyset$, 求 a 的值;

(3) $A \cap B = A \cap C \neq \emptyset$, 求 a 的值.

第5课时 §1.2.1 函数的概念(1)

发现问题

情景导思

“设在一个变化过程中有两个变量 x 和 y , 如果对于 x 的每一个值, y 都有唯一的值与它对应, 那么就说 y 是 x 的函数, x 叫做自变量。”在初中我们把函数看成变量之间的依赖关系, 那么现在我们能否用集合与对应的语言刻画函数的概念呢? $y=1(x \in \mathbf{R})$ 是函数吗? $y^2=x$ 呢?

互动课堂

知识清单

知识点1: 函数的概念(集合与对应的观点)

设 A, B 是非空的数集, 如果按照某种确定的对应关系 f , 使对于集合 A 中的任意一个数 x , 在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y=f(x), x \in A$. 其中 x 叫做自变量, 与 x 的值相应的 y (或 $f(x)$) 叫做函数值.

注意: $f(x)$ 是函数的记号, 是一个整体, 表示自变量与函数的一种对应关系; 而 $f(a)$ 表示当 $x=a$ 时函数的值.

知识点2: 定义域和值域的概念

自变量 x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域, 显然, $\{f(x) | x \in A\} \subseteq B$.

知识点3: 函数的三要素

一个函数的构成要素为: 定义域, 对应关系 $y=f(x)$, 值域. 如: 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 值域是 B . 当 $a > 0$ 时, $B = \{y | y \geq \frac{4ac-b^2}{4a}\}$; 当 $a < 0$ 时, $B = \{y | y \leq \frac{4ac-b^2}{4a}\}$.

知识点4: 区间及其表示法

设 a, b 是两个实数, 且 $a < b$, 则
 $\{x | a \leq x \leq b\} = [a, b]$ 叫闭区间;
 $\{x | a < x < b\} = (a, b)$ 叫开区间;
 $\{x | a \leq x < b\} = [a, b), \{x | a < x \leq b\} = (a, b]$ 都叫半开半闭区间.

实数集 $\mathbf{R}, \{x | x \geq a\}, \{x | x > a\}, \{x | x \leq b\}, \{x | x < b\}$ 用区间分别表示为 $(-\infty, +\infty), [a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$.

学法指导

1. 函数概念的应用

【例1】对于从 A 到 B 的函数 $f(x)$, 下列四种说法中, 正

确的是_____.

①在 B 中的每一个数, 在定义域 A 中都有至少一个数与之对应;

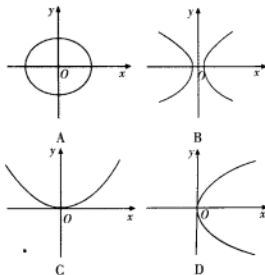
②集合 A, B 一定是无限集;

③定义域和对应关系确定后, 函数的值域也就确定了;

④若函数的定义域中只含有一个元素, 则值域也只含有一个元素.

【解析】函数的对应法则的要求是: A 中的任意一个元素在 B 中都有唯一确定的元素与之对应, 但 B 中可以有剩余元素不参与与 A 中的元素对应, 即 B 不是函数的值域, 所以①不正确. 故正确的是③④.

变式训练: 下列图象表示函数图象的是 ()



2. 求函数的定义域和函数值

【例2】(1)求下列函数的定义域:

$$\text{① } f(x) = \frac{1}{x+1};$$

$$\text{② } y = \frac{3}{1-\sqrt{1-x}}.$$

(2)已知 $f(x) = x^2 - 1, g(x) = x + 1$, 求 $f(-1), f[g(-1)], f[g(x)]$.

【解析】(1)①要使函数有意义, 须满足 $x+1 \neq 0$,

$$\therefore x \neq -1.$$

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq -1\}$.

②要使函数有意义, 须满足

$$\begin{cases} 1-x \geq 0, \\ 1-\sqrt{1-x} \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0.$$

$\therefore y$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$.

$$(2) f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0;$$

$$f[g(-1)] = 0^2 - 1 = -1;$$

$$f[g(x)] = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x.$$

【点评】(1)若 $f(x)$ 是整式, 则函数的定义域为 $\mathbf{R}$; 若 $f(x)$ 是分式, 则函数的定义域是使分母不等于零的实数的集合; 若 $f(x)$ 是偶次根式, 那么函数的定义域是使根号内的式子不小于零的实数的集合; 若 $f(x)$ 是由几个部分的数学式

子构成的,则函数的定义域是使各部分式子都有意义的实数集合(即使每个部分有意义的实数集合的交集);若 $f(x)$ 是由实际问题列出的,那么函数的定义域是使解析式本身有意义且符合实际意义的实数集合.

(2)求函数值用代入法,并注意代入式应在其定义域内才可代入.

变式训练:已知函数 $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x+2}$,

- (1)求 $f(-3)$ 的值;
(2)当 $a > 0$ 时,求 $f(a-1)$ 的值.

自主成长

夯实基础

1. 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的公共点个数是 ()
A. 1 B. 0 C. 0 或 1 D. 1 或 2

2. 设集合 $A=\mathbf{R}$, 集合 $B=\mathbf{R}_+$, 则从集合 A 到集合 B 的函数 f 只可能是 ()

- A. $f: x \rightarrow y = |x|$ B. $f: x \rightarrow y = \sqrt{x}$
C. $f: x \rightarrow y = x$ D. $f: x \rightarrow y = 1 + |x|$

3. 设 A 到 B 的函数为 $f_1: x \rightarrow y = 2x+1$, B 到 C 的函数为 $f_2: y \rightarrow z = y^2 - 1$, 则 A 到 C 的函数为 ()

- A. $f: x \rightarrow z = 4x(x+1)$
B. $f: x \rightarrow z = 4x^2 - 4x$
C. $f: x \rightarrow z = 4 - x^2$
D. $f: x \rightarrow z = 4x^2 + 4x + 1$

4. 函数 $y = \frac{\sqrt{1-x}}{2x^2-3x-2}$ 的定义域为 ()

- A. $(-\infty, 1]$
B. $(-\infty, 2]$
C. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cap (-\frac{1}{2}, 1]$
D. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 1]$

5. 已知函数 $f(x) = ax^3 + cx + 5$ 满足 $f(-3) = -3$, 则 $f(3)$ = _____.

6. 函数 $y = \frac{(x-1)^0}{\sqrt{|x|}-x}$ 的定义域是 _____.

7. $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 0, \\ -2x, & x > 0, \end{cases}$ 若 $f(x) = 10$, 则 $x =$ _____.

能力提升

8. 已知 $f(x) = \frac{1}{1+x} (x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq -1)$, $g(x) = x^2 + 2(x \in \mathbf{R})$.

- (1)求 $f(2), g(2)$ 的值;
(2)求 $f[g(2)]$;
(3)求 $f[g(x)]$.

9. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, k\}$, $B = \{4, 7, a^2 + 3a\}$, 且 $a \in \mathbf{N}^+$, $x \in A, y \in B$, 使 B 中元素 $y = 3x + 1$ 和 A 中元素 x 对应, 求 a, k 的值.

挑战自我

10. 用长为 L 的铁丝弯成下部为矩形, 上部为半圆形的框架(如图), 若矩形底边长为 $2x$, 求此框架的面积 y 与 x 的函数关系式及其定义域.

