

$$= \frac{x_1 x_2 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 - x_3}$$

青年数学叢書

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

因數和因式

刘薰宇 著

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}$$

$$\tan \theta = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{x}$$

$$\tan \beta = \frac{b}{x}$$

$$\tan \theta = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}$$

青年数学叢書

因 数 和 因 式

刘 薰 宇 著

中国青年出版社

一九五七年·北京

因 数 和 因 式

刘 薰 宇 著

*

中 国 青 年 出 版 社 出 版

(北京东四12条老君堂11号)

北京市书刊出版业营业许可证出字第036号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华书店总经售

*

787×1092 1/32 2 3/8印张 38,000字

1951年7月第1版 1957年6月北京第13次印刷

印数131,001—174,500 定价(7)0.22元

內 容 提 要

本書把算術裏有關因數的部分和代數裏有關因式的部分抽出來，經過整理和綜合，集中而有系統地說明其基本性質和有義的思考與演算的方法，使讀者易於理解和融會貫通。

目 次

一 因數.....	1
自然數列(1) 約數和倍數(1) 倍數的基本性質(1) 2 的倍數(2) 4 的倍數(3) 5 和 10 的倍數(3) 3 和 9 的倍數(4) 11 的倍數(5)	
二 質數.....	7
質數和合數(7) 判定質數的方法(7) 質數的個數是無限的(10)	
三 析因數.....	11
因數和質因數(11) 析因數(11)	
四 最大公約數.....	13
公約數和最大公約數(13) 互質數(13) 求最大公約數法——析質因數法(13) 求最大公約數法——輾轉相除法(15)	
五 最小公倍數.....	19
公倍數和最小公倍數(19) 求最小公倍數法——析質因數法(19) 求最小公倍數法——先求最大公約數法(21) 最大公約數和最小公倍數的應用(23)	
六 因式.....	28
因式和倍式(28) 析因式(29)	
七 獨項因式.....	30
獨項因式(30) 分組析獨項因式法(31)	
八 二次三項式的因式.....	35
完全平方式的因式(35) 較一般的二次三項式 x^2+px+q 的因	

式(37) 一般的二次三項式 ax^2+bx+c 的因式(39)

九 二項式的因式.....43

二次二項式 a^2-b^2 的因式(43) 二次三項式的配方法因式法(45)

三次二項式的因式(48)

一〇 兩個重要的多項式的因式.....50

三次式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的因式(50) 四次三項式 $a^4+a^2b^2+b^4$ 的因式(51)

一一 n 次多項式的因式.....52

n 次多項式的一般形式(52) 餘數定理(52) 綜合除法(52)

一二 對稱式和交代式的因式.....56

對稱式(56) 交代式(56) 輪換對稱式(56) 三種式子的相互關係(57) 齊次對稱式的一般形式(57) 析對稱式和交代式的因式(58) a^n+b^n 的因式(60) a^n-b^n 的因式(61)

一三 最高公因式和最低公倍式.....63

公因式和最高公因式(63) 求最高公因式法(63) 第二種也是輪轉相除法(64) 公倍式和最低公倍式(68) 析因式法(68) 先求最高公因式法(69)

一 因 數

1. 【自然數列】 假若我們把 0 也作為一個數看，那末，從 0 起，依次加 1 上去，就可以得出有頭無尾的一串數：

0, 1, 2, 3, 4, ……10, ……20, ……100, ……1000, …… 這一串數就叫做自然數列。

2. 【約數和倍數】 在自然數列中，如 2, 3, 4, 6 都可以除盡 12，我們就說 2, 3, 4, 6 是 12 的約數。反過來，12 就叫做 2, 3, 4, 6 的倍數。

一般地說，甲數能除得盡乙數，甲數就是乙數的約數，而乙數就是甲數的倍數，如 11 能除得盡 143，11 就是 143 的約數，而 143 就是 11 的倍數。

在這點，我們應當注意自然數列中：

(1) 1 是任何數的約數，因為用它除什麼數都可以除盡。

(2) 0 是任何數的倍數，因為除 0 自己以外，什麼數去除 0 就得 0，並沒有餘數，就是除得盡。

3. 【倍數的基本性質】 關於倍數，我們很容易推得下面的兩個性質：

45 是 5 的倍數，25 也是 5 的倍數。

$$45 + 25 = 70 \text{ 和 } 45 - 25 = 20,$$

我們知道 70 和 20 也是 5 的倍數。這就是說：

一個數的幾個倍數的和或兩個倍數的差，還是它的倍數。

這是可以從乘法的分配定律說明的。

因為 $45 = 9 \times 5$ 和 $25 = 5 \times 5$,

所以 $45 + 25 = 9 \times 5 + 5 \times 5 = (9 + 5) \times 5 = 14 \times 5$,

和 $45 - 25 = 9 \times 5 - 5 \times 5 = (9 - 5) \times 5 = 4 \times 5$ 。

45 是 5 的倍數，18 不是 5 的倍數。

$45 + 18 = 63$ 和 $45 - 18 = 27$,

我們知道 63 和 27 都不是 5 的倍數。這就是說：

一個數的倍數加上或減去一個不是它的倍數的數，結果就不是它的倍數。

因為由前一個性質，若 $45 + 18 = 63$ 和 $45 - 18 = 27$ ，63 和 27 都是 5 的倍數，則 $63 - 45 = 18$ 和 $45 - 27 = 18$ ，都應當是 5 的倍數，但這和我們提出的條件 18 不是 5 的倍數是矛盾的。

4. 【2 的倍數】 用 2 除得盡的數叫做偶數，用 2 除不盡的數叫做奇數。在自然數列中，奇數同着偶數是相互交替的。1 是奇數，2 是偶數，3 是奇數，4 是偶數……由此我們把 0 看成偶數。

20 是 2 個 10 的和，150 是 15 個 10 的和。但 10 是 2 的倍數，所以 20 和 150 都是 2 的倍數。這就是說：

末位是 0 的數都是 2 的倍數。

$34 = 30 + 4$ 和 $256 = 250 + 6$ 。

兩個式子右邊的第一個數都是 2 的倍數，而第二個數也是 2 的倍數，所以它們的和也是 2 的倍數。這就是說：

末位是偶數的數都是 2 的倍數。

反過來， $187 = 180 + 7$ ，第一個數是 2 的倍數，而第二個數卻不是 2 的倍數，所以 187 便不是 2 的倍數。這就是說：

末位是奇數的數都不是 2 的倍數。

5. 【4 的倍數】 $100 = 25 \times 4$ ，100 是 4 的倍數。 $1300 = 13 \times 100$ ，就是 13 個 100，也就是 13 個 4 的倍數的和，所以也是 4 的倍數。這就是說：

末兩位是 0 的數都是 4 的倍數。

$$3124 = 3100 + 24 \text{ 和 } 2576 = 2500 + 76.$$

兩個式子右邊的第一個數都是 4 的倍數，第二個數 24 和 76 也是 4 的倍數。所以它們的和 3124 和 2576 也是 4 的倍數。這就是說：

末兩位是 4 的倍數的數都是 4 的倍數。

相反地，末兩位不是 4 的倍數的數也不是 4 的倍數。

同樣地，我們還可以推得：

末三位是 0 或 8 的倍數的數都是 8 的倍數。

相反地，末三位不是 8 的倍數的數都不是 8 的倍數。

6. 【5 和 10 的倍數】 末位是 0 的數都可以看成是若干個 10 的和。30 是 3 個 10 的和，170 是 17 個 10 的和。但 10 是 5 和 10 的倍數。這就是說：

末位是 0 的數都是 5 和 10 的倍數。

$$45 = 40 + 5 \text{ 和 } 1035 = 1030 + 5.$$

兩個式子右邊的第一個數都是 5 的倍數，第二個數 5 也是 5 的倍數。所以它們的和 45 和 1035 都是 5 的倍數。這就是說：

末位是 0 或 5 的數都是 5 的倍數。

相反地，末位不是 0 或 5 的數都不是 5 的倍數。

同樣地，我們還可以推得：

末二位是 0 或 25, 50, 75 的數都是 25 的倍數。

末三位是 0 或 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875 (125 的倍數) 的數都是 125 的倍數。

7. 【3 和 9 的倍數】 我們先注意一下：

$$9 \div 3 = 3, \quad 9 \div 9 = 1;$$

$$99 \div 3 = 33, \quad 99 \div 9 = 11;$$

$$999 \div 3 = 333, \quad 999 \div 9 = 111.$$

就是只用 9 這一個數字組織成的數都是 3 和 9 的倍數。

現在我們再來看：

$$36 = 30 + 6 = 10 \times 3 + 6 = (9 + 1) \times 3 + 6 = 9 \times 3 + (3 + 6),$$

$$135 = 100 + 30 + 5 = (99 + 1) \times 1 + (9 + 1) \times 3 + 5$$

$$= (99 \times 1 + 9 \times 3) + (1 + 3 + 5),$$

$$2601 = 2000 + 600 + 1 = (999 + 1) \times 2 + (99 + 1) \times 6 + 1$$

$$= (999 \times 2 + 99 \times 6) + (2 + 6 + 1).$$

各個式子右邊的第一個數都是 9 的倍數，第二個數也都是 9 的倍數。所以它們的和 36, 135, 2601 都是 9 的倍數。

把各個式子右邊的第二個數來和原數對照一下，我們可以看出來，它們就是原數的‘各位數字的和’。這就是說：

一個數的各位數字的和是 9 的倍數，它就是 9 的倍數。

自然，這也可以用到 3。

一個數的各位數字的和是 3 的倍數，它就是 3 的倍數。

9 是 3 的倍數，所以 9 的倍數都是 3 的倍數，上面的 36, 135, 2601 都是 3 的倍數。但 3 的倍數不一定就是 9 的倍數，如 3, 6, 12, 15……，所以一個數的各位數字的和若只是 3 的倍數而不是 9 的倍數，它也就只是 3 的倍數而不是 9 的倍數。

8. 【11 的倍數】 我們先注意一下：

$$1=1, \quad 10=11-1, \quad 100=9 \times 11+1,$$

$$1000=91 \times 11-1, \quad 10000=909 \times 11+1,$$

.....

$$869=800+60+9=100 \times 8+10 \times 6+9$$

$$=(9 \times 11+1) \times 8+(11-1) \times 6+9$$

$$=(9 \times 11 \times 8+11 \times 6)+(8-6+9),$$

$$3553=1000 \times 3+100 \times 5+10 \times 5+3$$

$$=(91 \times 11-1) \times 3+(9 \times 11+1) \times 5+(11-1) \times 5+3$$

$$=(91 \times 11 \times 3+9 \times 11 \times 5+11 \times 5)+(-3+5-5+3),$$

$$23419=10000 \times 2+1000 \times 3+100 \times 4+10 \times 1+9$$

$$\begin{aligned}
 &= (909 \times 11 + 1) \times 2 + (91 \times 11 - 1) \times 3 + (9 \times 11 + 1) \\
 &\quad \times 4 + (11 - 1) \times 1 + 9 \\
 &= (909 \times 11 \times 2 + 91 \times 11 \times 3 + 9 \times 11 \times 4 + 11 \times 1) \\
 &\quad + (2 - 3 + 4 - 1 + 9).
 \end{aligned}$$

上面三個式子告訴我們，最後等式右邊的第一個數都是 11 的倍數，所以原數是不是 11 的倍數就要看它最後等式右邊的第二個數是不是 11 的倍數。

我們來仔仔細細地看看這些第二個數，同着原數對起來，它們都是奇數位數的數字在‘+’，偶數位數的數字在‘-’。

$$\begin{aligned}
 8 - 6 + 9 &= (8 + 9) - 6 = 11, \\
 -3 + 5 - 5 + 3 &= (5 + 3) - (3 + 5) = 0, \\
 2 - 3 + 4 - 1 + 9 &= (2 + 4 + 9) - (3 + 1) = 11.
 \end{aligned}$$

它們是 0 或 11 的倍數，所以原數也就是 11 的倍數。這就是說：

一個數的奇位數字的和同着它的偶位數字的和相減所得的差若是 0 或 11 的倍數，它就是 11 的倍數。

$$869 = 79 \times 11, \quad 3553 = 323 \times 11, \quad 23419 = 2129 \times 11.$$

二 質 數

9. 【質數和合數】 在自然數列中，如2, 3, 5, 7, 11……這些數，只有 1 同着它自己可以除盡它，這種數我們叫做質數。另外如 4, 6, 8, 9, 10……這些數，除了 1 和它自己，還有別的數可以除盡它，2 可以除盡 4, 6, 8, 10……，3 可以除盡 6, 9……，這種數我們叫做合數。

照這個說法，0 可以看成合數，但 1 既不是合數，我們也不把它看成質數。因此，自然數列中的數可分成三類：

(1) 單位數，就是 1，只有一個。

(2) 質數，個數是無限的。下面我們再來證明。

(3) 合數，個數是無限的。因為一個合數即如 4，我們無論用什麼數去乘它得出來的都是合數。就是質數，只要用 1 以外的數去乘它也就得出合數，如 $3 \times 2 = 6$, $3 \times 7 = 21$, ……。

10. 【判定質數的方法】 判定什麼數是質數，這有兩種說法：(1) 從 1 起到某一個數比如 100，哪些數是質數？(2) 任意提出一個數來，怎樣判定它是不是質數？下面我們來分別加以說明。

(1) 從 1 起到某一個數比如 100，哪些數是質數？

解決這個問題，我們有一個很呆的方法，像下面所做的

[1]	2	3	<u>4</u>	5	<u>6</u>	7	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	11	<u>12</u>
13	<u>14</u>	<u>15</u>	<u>16</u>	17	<u>18</u>	19	<u>20</u>	<u>21</u>	<u>22</u>	23	<u>24</u>
25	<u>26</u>	<u>27</u>	<u>28</u>	29	<u>30</u>	31	<u>32</u>	<u>33</u>	<u>34</u>	<u>35</u>	<u>36</u>
37	<u>38</u>	<u>39</u>	<u>40</u>	41	<u>42</u>	43	<u>44</u>	<u>45</u>	<u>46</u>	47	<u>48</u>
<u>49</u>	<u>50</u>	<u>51</u>	<u>52</u>	53	<u>54</u>	55	<u>56</u>	<u>57</u>	<u>58</u>	59	<u>60</u>
61	<u>62</u>	<u>63</u>	<u>64</u>	65	<u>66</u>	67	<u>68</u>	<u>69</u>	<u>70</u>	71	<u>72</u>
73	<u>74</u>	<u>75</u>	<u>76</u>	<u>77</u>	<u>78</u>	79	<u>80</u>	<u>81</u>	<u>82</u>	83	<u>84</u>
85	<u>86</u>	<u>87</u>	<u>88</u>	89	<u>90</u>	<u>91</u>	<u>92</u>	<u>93</u>	<u>94</u>	<u>95</u>	<u>96</u>
97	<u>98</u>	<u>99</u>	<u>100</u>								

把一百個數順次列出來。從 2 的下一個數 3 起，兩個兩個地數，數到的數都畫掉（表上畫在下面）。再從 3 的下一個數 4 起，三個三個地數，數到的數都畫掉（表上畫在上面）。順着下來，5 沒有畫掉，就從 5 的下一個數 6 起，五個五個地數，數到的數都畫掉（表上畫在右邊）。再下去沒有畫掉的是 7，就從 7 的下一個數 8 起，七個七個地數，數到的數都畫掉（表上畫在左邊）。

假如我們不是從 1 起到 100 為止，那末還要照推下去。現在只到 100 為止，這樣就行了。因為 7 以下沒有畫掉的已是

11. 11除100不過得9. 9比11小,可以畫掉的數,如22,33,44……等在數2,數3的時候就畫掉了.

這樣做法,沒有畫掉的數都是質數. 現在把200以內的質數寫在下面供大家參考:

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199		

(2)任意提出一個數來,如397和323,怎樣判定它是不是質數?

解決這個問題,我們還是只有一個很呆的方法. 就是把所有比它小的質數,從小到大地依次去除它. 除到商數已經比除數小了還除不盡,它就是質數. 因為我們是先用小的數去除,再用大的數除的;假如商數比除數小以後還除得盡,那末,商數做除數的時候早已經除盡了.

先看397. 由前面說過的法則,我們知道2,3,5,11都除不盡它.

$$397 \div 7 = 56 \cdots 5, \quad 397 \div 13 = 30 \cdots 7,$$

$$397 \div 17 = 23 \cdots 6, \quad 397 \div 19 = 20 \cdots 17,$$

$$397 \div 23 = 17 \cdots 6.$$

商數 17 比除數 23 小還除不盡，所以 397 是質數。

再看 323，2, 3, 5, 11 也都除不盡它。

$$323 \div 7 = 46 \cdots 1, \quad 323 \div 13 = 24 \cdots 11,$$

$$323 \div 17 = 19.$$

就是 $323 = 17 \times 19$ 不是質數。

11. 【質數的個數是無限的】 我們說‘有限’就是說有一個最大的數做界限。假如質數的個數是有限的，那末就是一個最大的質數，凡是比它大的數都不是質數。我們就設這個最大的質數是 p 。

現在我們來研究這樣一個數 N ，它等於從 2 起到 p 止的一切質數的積加上 1，即 $N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p + 1$ 。

首先，我們知道 N 總大於 p ，所以若 N 就是質數， p 當然不是最大的質數。

其次，我們說 N 就是質數。因為比它小的質數，2, 3, 5, 7, $\cdots$, p ，無論拿哪一個去除它都要剩 1，就是總除不盡。所以 N 是質數，並且是大於 p 的。

這就是說，質數沒有最大的一個。所以質數的個數是無限的。

三 析 因 數

12. 【因數和質因數】 $3 \times 5 = 15$, $6 \times 7 = 42$ 或 $2 \times 3 \times 7 = 42$, 兩個以上的數相乘得出另一個數來, 這些相乘的數就叫做那個得出來的數的因數. 3 和 5 是 15 的因數, 6 和 7 或 2, 3 和 7 是 42 的因數.

因數是質數的叫做質因數, 3 和 5 是 15 的質因數, 2, 3 和 7 是 42 的質因數.

質數便只有兩個因數, 1 和它自己, 如 $7 = 1 \times 7$.

13. 【析因數】 把一個合數分成幾個因數, 用這些因數的連乘積來表示它, 這叫做析因數.

析因數, 我們總是把合數的質因數分析出來.

析一個合數的質因數的方法, 除了 2, 3, 5, 11 我們可以用前面所講過的法則視察以外, 只有把比它小的質數去試除它. 自然, 除到可以判定它是質數的時候就用不着再做下去了.

前面我們還講過 4, 8, 9, 10, 25, 125 這些數的倍數的視察法, 當然也是可以用的, 不過要把它們分成質因數 2×2 , $2 \times 2 \times 2$, 3×3 , 2×5 , 5×5 , $5 \times 5 \times 5$ 的連乘積. 同一個因數的連乘, 我們是把它連乘的個數記在它的右肩上, 如 $2 \times 2 = 2^2$, $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, $3 \times 3 = 3^2$, $5 \times 5 = 5^2$, $5 \times 5 \times 5 = 5^3$.