高等学校试用教材

高等数学

（本科少学时类型）

上册

同济大学应用数学系编

高等教育出版社

ISBN 7-04-000125-X/O·54

定价 2.65 元

高等学校试用教材

高等数学

（本科少学时类型）

上　　册

同济大学应用数学系编

高等教育出版社

本书是在同济大学数学教研室主编的《高等数学》的基础上，作了较多修改而成. 主要改动包括删去了一些不适合于本科少学时类型的内容和难度较大的习题；为配合其他学科的教学对一些章节的次序重新作了编排；针对学生的特点在内容的论述上力求详细、严谨，清楚易懂；配置了相当数量的习题供学生课内外练习，还在书末附以答案，便于教学.

本书可作为高等工业院校本科少学时类型的教材，还可供大专性质的专修科、进修班，以及工程技术人员使用.

责任编辑　丁鹤龄

高等学校试用教材

高 等 数 学

（本科少学时类型）

上　册

同济大学应用数学系编

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

国防工业出版社印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张 14 字数 335,000

1987年10月第1版　1988年4月第2次印刷

印数 25 121—37 130

ISBN 7-04-000125-X/O·54

定价2.65元

前　言

我国高等学校中有一部分工科本科专业的高等数学课程的教学要求比一般工科专业稍低，教学时数也较少.我校就有少数这样的专业.此外，我校还有一些大专性质的专修科、进修班，它们的高等数学课程也属于这一类型.由于教学的需要，长期以来我们一直想编写一本适用于这一类型的教材，在高等教育出版社的支持下，终于在今年春季正式开始了编写工作.我们希望，这本教材的出版，能对其他学校的同类型的高等数学教学有所裨益.

在编写本教材时，我们以同济大学数学教研室主编的《高等数学》一书作为基础，但作了不少改动.我们删节了一些对于少学时类型来说要求过高的内容和难度较大的习题；对有些概念的叙述以及少数定理的证明作了某些改变；对一些章节的次序也重新作了安排.在精简部分内容的同时，对于那些我们认为学生必须掌握的基本理论、基本知识和基本技能，则不惜篇幅，力求解说详细，使读者容易接受.我们希望所作的这些改动能使这本教材较好地适合本科少学时类型的教学要求.

考虑到有些专业课程需要较早地应用积分的知识，因此在上册一元函数微积分学中，把不定积分与定积分安排在中值定理与导数的应用之前，这样做也许有利于高等数学与其他课程的配合.当然，如果没有这种需要，也可先学中值定理与导数的应用这一章，然后再学一元函数积分学.

我们认为，对一本教材所包含的内容不宜限制过死，以便使它能适应要求大体相仿但不完全相同的读者的需要.基于这样的认识，我们在下册中写进了一些供选学的内容，这些内容均用 * 号标

出.

参加本书编写工作的有王福楹、张绮萱、骆承钦、郭镜明等同志，限于编者的水平，书中必有考虑不周之处，也会存在缺点和错误，希望读者批评、指正.

编　者

1985年12月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象基本上是不变的量，而高等数学则是以变量为研究对象的一门数学. 所谓函数就是变量之间的对应关系，极限方法则是研究变量的一种基本方法. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、集　　合

集合概念是数学中一个原始的概念，就是说，它不能用更简单的概念定义，我们通过例子说明这个概念. 比方说，一个书柜中的书构成的集合，一个教室里的学生构成的集合，全体实数的集合，等等. 一般地说，所谓集合（或简称集）是指具有特定性质的一些事物的总体. 组成这个集合的事物称为该集合的元素. "总体"这个词，实际只是"集合"的同义词，它表示，一个集合所包含的元素可能很多，但作为这个集合，应整个看作一个东西而不是几个东西. 本书以大写拉丁字母表示集合. 事物 a 是集合 M 的元素，记作 $a \in M$（读作 a 属于 M）；事物 a 不是集合 M 的元素记作 $a \notin M$（读作 a 不属于 M）.

一个集合认为已经给定，如果对于任何事物能判定它是否属于这个集合. 因此要给定一个集合 M，实质上就是要给出一个判

别法则，根据这个法则，对于任何事物 a 能判别 $a\in M$ 及 $a\notin M$ 二者究竟哪一个成立（二者中必有一个且只有一个成立）？

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示．例如，由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A，可记作

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用如下的记号表示：设 M 是具有某种特征的元素 x 的全体所组成的集合，就记作

$$M=\{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}.$$

这里所谓 x 所具有的特征，实际就是 x 作为元素应适合的充分必要条件：适合这条件的任何事物都是集合 M 的元素；反之，集合 M 的元素都必须适合这条件．

例如，平面上坐标适合方程 $x^2+y^2=1$ 的点 (x,y) 的全体所组成的集合 M，可记作

$$M=\{(x,y) \mid x,y \text{ 为实数}, x^2+y^2=1\}.$$

这个集合 M 实际就是 xOy 平面上以原点 O 为中心、半径等于 1 的圆周上的点的全体所组成的集合．

全体实数组成的集合通常记作 R，即

$$R=\{x \mid x \text{ 为实数}\}.$$

$\sqrt{2}$ 是实数，所以 $\sqrt{2}\in R$；$1+i$ 不是实数，所以 $1+i\notin R$．

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则必 $x\in B$，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（读作 A 包含于 B）或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）．例如，全体自然数集合是全体整数集合的子集，全体整数集合是全体有理数集合的子集，全体有理数集合是全体实数集合的子集．

如果 $A\subset B$，且 $B\subset A$，就称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$．这时不仅 A 的元素都是 B 的元素，而且 B 的元素也都是 A 的元素，因此集合 A 与 B 实际是一致的．例如，设

$$A=\{1, 2\}, \quad B=\{2, 1\}, \quad C=\{x|x^2-3x+2=0\},$$
则$A=B=C$.

不含任何元素的集合称为空集. 例如

$$\{x|x\in R, x^2+1=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的. 空集记作$\varnothing$,并规定空集为任何集合的子集.

以后用到的集合主要是数集,即元素都是数的集合. 如果没有特别声明,以后提到的数都是实数.

读者在中学里已经学过,在一条直线上指定了一点作为原点O,再指定了正向,此外又规定了单位长度,那么这条直线上的点与实数之间可以建立一一对应的关系. 于是,这条直线就称为数轴. 有时为了形象化起见,把数 x 称为点x,就是指数轴上与数 x 对应的那个点.

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数,且 $a<b$. 数集

$$\{x|a<x<b\}$$

称为开区间,记作(a, b),即

$$(a, b)=\{x|a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a, b)的端点,这里$a\notin(a, b)$, $b\notin(a, b)$. 数集$\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记作$[a, b]$,即

$$[a, b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a, b]$的端点,这里$a\in[a, b]$,$b\in[a, b]$. 类似地可说明

$$[a, b)=\{x|a\leqslant x<b\},$$
$$(a, b]=\{x|a<x\leqslant b\}.$$

$[a, b)$和$(a, b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数$b-a$称为这些区间的长

度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的(不包括端点或包括一个、两个端点的)线段(图 1-1).

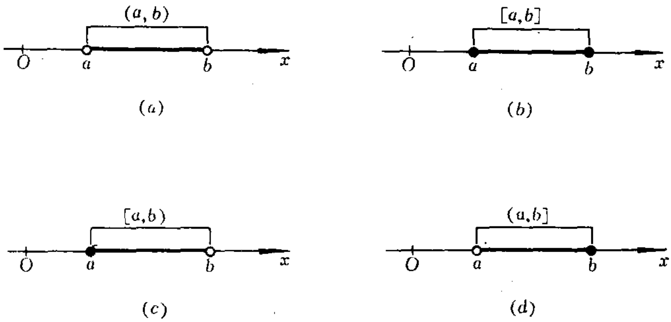

图 1-1

此外还有所谓无限区间. 引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\},$$
$$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x|a<x\},$$
$$(-\infty,b)=\{x|x<b\}.$$

数集$[a,+\infty)$及$(-\infty,b]$称为无限的半开区间. 数集$(a,+\infty)$及$(-\infty,b)$称为无限的开区间. 它们在数轴上表现为长度为无限的半直线,例如(图 1-2):

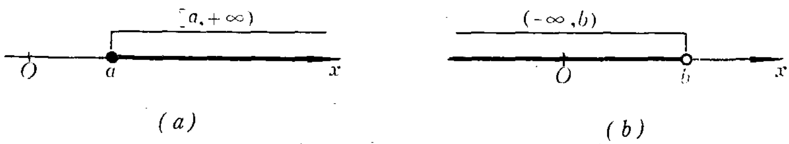

图 1-2

全体实数的集合R也记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限的开区间.

以后如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的,无限的,开的,闭的,半开的)都可能适用,为了避免重复论述,就用"区

间 I"代表各种类型的区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$. 数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半径.

因为 $|x-a|<\delta$ 相当于

$$-\delta<x-a<\delta \quad \text{即} \quad a-\delta<x<a+\delta,$$

所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此看出，$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（图 1-3）.

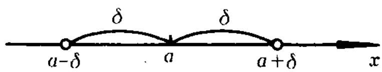

图 1-3

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此点 a 的 δ 邻域

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

在数轴上表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体，这正是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

二、函 数 概 念

先举两个例子.

例 1 自由落体运动 设物体下落的时间为 t，落下的路程为

s. 假定开始下落的时刻为$t=0$,那么 s 与 t 之间的对应关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为$t=T$,那么当时间 t 在闭区间$[0,T]$上任意取定一个数值时,按上式 s 就有确定的数值与之对应.

例 2 设有半径为 r 的圆,考虑内接于该圆的正 n 边形的周长S_n. 由图 1-4 容易看出,

$$S_n=2nr\sin\alpha_n,$$

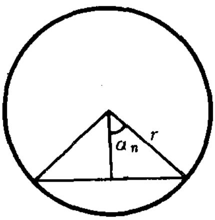

图 1-4

其中$\alpha_n=\frac{\pi}{n}$. 所以内接正 n 边形的周长S_n与边数 n 之间的对应关系由公式

$$S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$$

给定. 当边数 n 在3,4,5,…等自然数中任意取定一个数值时,按上式S_n就有确定的数值与之对应.

在例 1 中,时间 t 可以取闭区间$[0,T]$上的每个数值,路程 s 可以取闭区间$\left[0,\frac{1}{2}gT^2\right]$上的每个数值. 在例 2 中,边数 n 可以取不小于 3 的一切自然数(自然数组成的数集记作N),周长S_n可以取下面这个数集中的每个数值:

$$S=\left\{S_n \middle| S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n},\ n\in N, n\geqslant 3\right\}.$$

在自然科学和工程技术中,常常会遇到各种不同的量,其中有的量保持一定的数值,这种量叫做常量,如例 1 中的重力加速度 g 便是常量;还有一些量可以取不同的数值,这种量叫做变量,如例 1 中的时间 t 和路程 s,例 2 中的边数 n 和周长S_n便都是变量.