John Stillwell 著

Mathematics and Its History

数学及其历史

袁向东　冯绪宁　译

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

John Stillwell 著

Mathematics and Its History

数学及其历史

SHUXUE JIQI LISHI

袁向东　冯绪宁　译

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

第二版序言

此版完全使用 LATEX 排版, 许多图形的制作使用了图像系统制作技巧 (PSTricks) 软件包, 目的是增加精确度并便于今后的修订. 本版较之第一版还增加了若干重要的内容.

- 新增加了三个章节, 分别是关于中国和印度的数论、超复数以及代数数论方面的内容. 这些内容填补了第一版的某些空缺, 更有利于读者对数学较后时期发展的领悟.

- 书中设置了更多的习题. 我希望由此能克服第一版中习题过少、有些习题过难的弱点. 第一版中有些大而令人生畏的习题, 比如 2.2 节中那个比较二十面体和十二面体的体积和表面积的习题, 现在则被分解成若干部分, 便于读者下手去做. 不过, 书中仍然有少数极具挑战性的问题, 提供给那些想要一试身手的读者.

- 习题部分增加了注释, 用于说明这些习题跟本节内容的关系, 并预示后面将讲述的 (与此有关联的) 主题.

- 书的索引部分采用超常规结构, 以使查询更为方便. 例如, 为了找到欧拉关于费马大定理的工作, 你无需按 "欧拉" 条目下出现的 32 处不同的页码一一地去寻找. 而只需在索引中找出 "欧拉, 费马大定理" 这一条目.

- 参考书目部分已重新编订, 对前一版中列出的许多出版信息不全或缺失的书目给出了更加完全的信息. 我发现麻省理工学院 (MIT) Dibner 学院 Burndy 图书馆的在线书目对我找到这类信息很有帮助, 特别对那些早期的印刷作品更是如此. 对近期的著作, 我大量利用 MathSciNet, 那是《数学评论》(Mathematical Reviews) 的在线版.

这一版还做了许多小的变动, 有的是近期的数学事件所致, 如费马大定理的证明 (很幸运, 我不必为此大动干戈地去重写, 因为该证明的背景 —— 椭圆曲线理论已在第一版中讲到了).

我要感谢许多朋友、同事和书评家, 他们让我注意到第一版中的瑕疵, 并在修订的过程中给予我帮助. 特别要感谢下列各位:

• 我的儿子 Michael 和 Robert, 他们做了大部分打字工作; 我的夫人 Elaine, 她完成了大量校对工作.

• 我在旧金山大学的数学系 (Math 310) 的学生, 他们试做了许多习题; 以及 Tristan Needham, 他是最早邀请我到旧金山大学工作的.

• Mark Aarons, David Cox, Duane DeTemple, Wes Hughes, Christine Muldoon, Martin Muldoon, 和 Abe Shenitzer, 他们提出了各种建议及修改意见.

John Stillwell
Monash 大学
维多利亚, 澳大利亚
2001

第一版序言

令大多数学数学的学生感到失望的一件事，就是他们从来没有上过一门关于数学的课程. 他们会学习微积分、代数、拓扑等等课程，但这种分门别类、过分详尽的教学似乎无法将这些不同主题汇聚为一个整体. 事实上，某些自然而然出现的最重要的问题由于掉进了错误的主题领地而遇到麻烦. 例如，代数学家不讨论代数基本定理，因为"那是分析"，而分析学家不讨论黎曼面，因为"那是拓扑". 于是，学生们在毕业前想要感觉一下他们对数学的真正了解时，确实产生了统一看待这门学科的需要.

本书的目的是赋予大学数学一种统一的观点，办法则是通过数学的历史来探讨它. 鉴于读者已经学习过数学，我们假定他们有了一定的基础，所以本书的数学内容在形式上不按照标准的课本那样展开. 另一方面，书中的数学内容比之大多数普通的数学史书又更加完全和严密，因为讲数学是我们的主要目的，而引述历史只是手段. 我们假定读者熟悉基本的微积分、代数和几何知识，理解集合论的语言，也接触过某些较高深的论题，诸如群论、拓扑和微分方程. 我一直试图挑选出数学整体中带主导性的主题，通过追寻其历史脉络把它们尽可能牢固地编织在一起.

在这样做的同时，我还把精力放在某些传统的未解决的问题上. 例如，大学生能解二次方程，为什么不会解三次方程呢？他们能对 $1/\sqrt{1-x^2}$ 求积分时，就会被告知不必担心不会对 $1/\sqrt{1-x^4}$ 求积分. 这是为什么？对这些问题的历史追寻非常有益，它导致了我们对复分析、代数几何以及其它事物的更深的理解. 所以，我希望本书不仅能概观大学数学，也能瞥望更广阔的数学领域.

有些数学史家可能反对我使用现代符号以及对古典数学的（适当的）现代解释，认为这是时代错位. 我的作法确实有点冒险，比如它们看起来比历史上的真实情况简单了；但依我看，使用棘手和不熟悉的记号而模糊了概念本身，其危害性更大. 大家都知道，数学概念在出现能够清楚地表达它们的符号和语言之前就形成了，它们是由含蓄变成明晰的. 所

以, 尽管历史学家可能试图既忠实于原貌又要表达清晰, 可是在追溯概念的起源时常常只能时代错位.

由于本书的篇幅所致, 不可能面面俱到, 所以在论题的选择上, 数学家可能不同意我的作法. 我优先选择的是论题的根基性和相互之间的紧密联系. 主选的题目是数和空间的概念: 它们最初在希腊数学中的分离, 它们在费马和笛卡儿几何中的结合, 这种结合在解析几何和微积分中产生的累累硕果. 本书未谈及当今的某些重要论题, 诸如李群和泛函分析, 其理由是它们离数学的根基比较远. 另外一些论题, 像概率论, 也只是粗略地谈到, 因为它们的大部分发展看来不在数学发展的主流之内. 至于其它的忽略或轻描淡写, 只能归咎于我的个人爱好, 以及能在一至两个学期内讲完本书的愿望.

本书是在我过去几年在 Monash 大学为高年级学生讲授的课程笔记的基础上写成的. 那门课讲半个学期, 内容稍稍超出本书一半的内容 (头一年讲 1—11 章, 另一年讲 5—15 章). 自然, 我很高兴若其它大学能以此书为基础开设课程. 通过改变授课周期和所讨论的主题, 可以量身定做各种课程. 无论如何, 本书应该普遍适合学生或专业数学家来阅读.

本书每一章都以数学家小传结尾, 这样既可以增加人情味儿, 还能帮助读者循迹数学概念从一位数学家到另一位数学家的传播. 这些小传除明确标明出处的, 都提炼自二手资料《科学传记辞典》(*Dictionary of Scientific Biography*, 简称 DSB). 我采用 DSB 的习惯, 用娘家的姓名称呼传主的母亲. 参考书在小传中以 "作者的姓 (年代)" 的形式标示, 例如 "牛顿 (1687)" 是指《原理》(Principia). 书后列有所有参考书的信息.

John Crossley, Jeremy Gray, George Odifreddi 和 Abe Shenitzer 仔细并严谨地阅读了我的手稿. 根据他们的评述和意见, 我做了数不胜数的改进, 当然, 书中尚余的瑕疵归因于我对他们的建议理解不当. 对他们, 对 Anne-Marie Vandenberg—— 她尽职地完成了出色的打字工作, 我表示衷心的感谢.

John Stillwell
Monash 大学
维多利亚, 澳大利亚
1989

目录

第 1 章

毕达哥拉斯定理

1.1 算术与几何

如果说有一个定理是所有受过数学教育的人都知道的, 那无疑就是毕达哥拉斯 (Pythagoras) 定理. 人们会想起直角三角形的一个性质: 斜边的平方是另外两条边的平方的和 (图 1.1). 这个 "和" 自然指的是面积之和, 而边长为 l 的正方形的面积是 l^2—— 这就是我们为什么称该面积为 "l 见方" 的理由. 毕达哥拉斯定理也可以用一个方程来表示:

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{1}$$

其中 a,b,c 代表三角形各边的长度, 如图 1.1 所示.

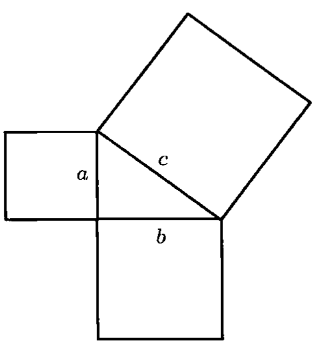

图 1.1　毕达哥拉斯定理

反之, (1) 的正数解 a,b,c 可以用来构作一个直角三角形, 其直角边为 a,b, 斜边为 c. 很清楚, 对任意给定的两个正数 a,b, 我们可以画出长度分别为 a,b 的两条垂直的边, 此时那条斜边 c 必然是方程 (1) 的解, 以满足毕达哥拉斯定理. 当我们注意到 (1) 有些非常简单的解时, 反观毕达哥拉斯定理会变得很有趣. 例如:

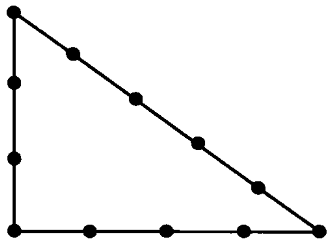

图 1.2 利用绳作直角

$$(a,b,c)=(3,4,5) \qquad (3^2+4^2=9+16=25=5^2),$$
$$(a,b,c)=(5,12,13) \quad (5^2+12^2=25+144=169=13^2).$$

据认为, 在古代就可能一直用这样的解来构作直角. 如使用有 12 个等距结点的拉紧的绳圈, 人们就可以得到一个 (3,4,5) 三角形, 边 3 与边 4 之间是个直角, 如图 1.2 所示.

无论这是否是实际构作直角的一个方法, 但对于如

$$3^2+4^2=5^2$$

这样一个纯粹的算术事实, 居然真的存在一种几何解释, 这是相当奇妙的. 乍看起来, 算术和几何好像是完全不同的领域. 算术的基础是计算, 是典型的*离散* (或*数字*) 过程. 算术中的各种事实和结论可以清楚地理解为某些计算过程的结果; 人们不期待它们有什么额外的意义. 另一方面, 几何涉及的是连续的而不是离散的对象, 诸如直线、曲线和曲面. 连续对象不能由单个的元素通过离散过程去构建, 人们希望看到的是几何事实本身而不是通过计算来达到它.

毕达哥拉斯定理第一次暗示了在算术和几何之间隐藏得很深的联系, 这种联系在数学发展的历史长河中始终处于两个领域之间的关键位置上. 有时处于合作的位置, 有时处于冲突的位置, 后者在发现 $\sqrt{2}$ 是无理数之后就出现过 (见 1.5 节). 情况常常是这样的: 从这些处于紧张状态的领域中浮现出新的思想, 将冲突化解, 并使原来难以调和的思想转变为相互促进的沃土佳壤. 无疑, 算术与几何之间的这种紧张状态是数学中最深奥的事情, 它已促成了那些最深刻的定理的问世. 因为毕达哥拉斯定理是这些定理中的第一个, 而且最具影响力, 值得我们将它安排在第一章.

1.2 毕达哥拉斯三元数组

毕达哥拉斯生活在公元前 500 年左右 (见 1.7), 但是毕达哥拉斯定理的故事却远早于此, 至少在公元前 1800 年就在巴比伦出现了. 证据是一块泥板, 即著名的编号为普林顿 (Plinpton) 322 的泥板, 它系统地列出大量的整数对 (a,c), 对每个整数对都存在一个整数 b, 满足

$$a^2+b^2=c^2. \tag{1}$$

泥板内容的译文, 以及它的解释和历史背景, 由诺伊格鲍尔 (Neugebauer, O.) 和萨克斯 (Sachs, A.) (1945) 首次出版 [更现代的研究, 见范德瓦尔登 (van der Waerden, B.L.) (1983), 2 页]. 满足 (1) 的整数三元数组 (a,b,c)—— 例如 (3,4,5),(5,12,13),(8,15,17)—— 现在称之为*毕达哥拉斯三元数组*. 我们虽然不能完全确知, 但推测巴比伦人之所以对三元数组感兴趣, 是因为他们把其解释为是直角三角形的边. 无论如何, 寻找毕达哥拉斯三元数组也是

其它古代文明感兴趣的问题, 事实上这些早期文明已掌握了毕达哥拉斯定理. 范德瓦尔登 (1983) 给出了中国 (公元前 220 年到公元 220 年) 和印度 (在公元前 500 年到公元前 200 年之间) 的例子. 古代对这个问题的最全面的理解当属于希腊数学, 时间在欧几里得 (Euclid) (公元前 300 年左右) 到丢番图 (Diophantus) (公元 250 年) 之间.

我们现在知道生成毕达哥拉斯三元数组的一般公式是

$$a=(p^2-q^2)r, \quad b=2pqr, \quad c=(p^2+q^2)r.$$

容易看出, 当 a,b,c 按这个公式给出时有 $a^2+b^2=c^2$; 当然, 若 p,q,r 是整数, 则 a,b,c 亦然. 虽然巴比伦人没有我们优越的代数符号, 他们所列出的三元数组似乎是以上述公式, 或者说是它的一个特殊情形:

$$a=p^2-q^2, \quad b=2pq, \quad c=p^2+q^2$$

(其中所有的解 a,b,c 没有公因子) 为基础的. 人们并不把一般性的公式归功于毕达哥拉斯本人 (公元前 500 年左右) 和柏拉图 (Plato) [参见希思 (Heath, T.L.) (1921), 卷 1, 80—81 页]; 等价于一般性公式的解是在欧几里得的《几何原本》第 X 卷 (命题 28 之后的引理) 中给出的. 据我们所知, 这是首次叙述一般的解, 也是首次给出一般性的证明. 正如人们所预期的, 欧几里得的证明本质上是算术的, 因为这个问题似乎是属于算术范畴的.

然而, 确实存在一个让人大开眼界的解, 它对毕达哥拉斯三元数组给出了几何解释. 它出现在丢番图的书中, 我们将在下一节来讲述.

习题

普林顿 322 泥板中的整数对是

a	c
119	169
3367	4825
4601	6649
12709	18541
65	97
319	481
2291	3541
799	1249
481	769
4961	8161
45	75
1679	2929
161	289
1771	3229
56	106

图 1.3 普林顿 322 泥板上的数对

1.2.1 对表中每一个数对 (a,c), 计算 c^2-a^2, 并确认它是一个完全平方数 b^2 (建议借助于计算机).

你将注意到在大多数情形下, b 是比 a 或 c“更圆” 的整数* .

1.2.2 试演示大多数的数 b 能被 60 整除, 其余的能被 30 或 12 整除.

事实上, 这种数在巴比伦人的眼里是特别 “圆” 的整数, 因为他们的数系是 60 进位制. 他们在计算毕达哥拉斯三元数组时, 很像是从 “圆” 整数 b 着手的, 然后在列表时去掉了 b 这一列数.

计算毕达哥拉斯三元数组的欧几里得公式源于他的整除性理论, 我们在 3.3 中将讲解它. 整除性也涉及毕达哥拉斯三元数组的某些基本性质, 诸如它们的奇性或偶性.

1.2.3 试证明任一整数的平方被 4 除之后, 余数为 0 或 1.

1.2.4 试从 1.2.3 推导出以下论断: 若 (a,b,c) 是毕达哥拉斯三元数组, 则 a 和 b 不能同时为奇数.

1.3 圆上的有理点

我们从 1.1 节知道, 毕达哥拉斯三元数组 (a,b,c) 可以体现在一个直角三角形上, a,b 为两直角边, c 为斜边. 它还可以导出一个边长为分数 (有理数) 其中 $x= a/c$, $y =b/c$, 斜边为 1 的三角形. 所有这样的三角形可安置在一个半径为 1 的圆内, 如图 1.4 所示.

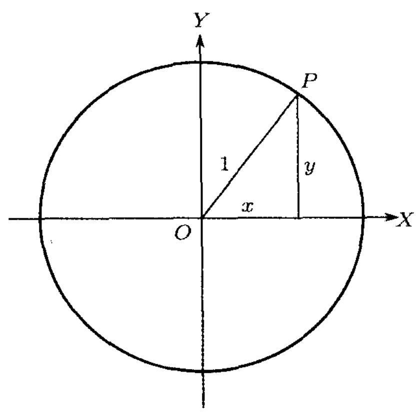

图 1.4 单位圆

我们现在把边长 x,y 称为圆上一点 P 的坐标. 然而, 希腊人不使用这种语言; 但他们能导出 x 和 y 之间的关系, 我们称为圆的方程. 因为

$$a^2+b^2=c^2, \tag{1}$$

故有

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1,$$

* round number 可译为 “圆整数”, 对于 10 进制数系, 它指是 10 的倍数的整数, 对于 60 进制数系, 它指是 60 的倍数的整数. 此处作者用了 “rounder number” 这个词组, 故译为 “更圆” 的整数. —— 译注