高等学校规划教材

复变函数

FUBIAN HANSHU

吕彦鸣 朱月萍 张义清 等编著

化学工业出版社

高等学校规划教材

复变函数

吕彦鸣 朱月萍 张义清 等编著

化学工业出版社
·北京·

本书介绍了复变函数的基础知识，内容包括复数域和复平面上的基本问题，解析函数的一些性质以及初等解析函数，复积分和柯西积分定理，级数理论，留数与辐角原理，许瓦兹原理、开映射原理、最大模原理、黎曼边界对应原理，共形映射理论，解析开拓、调和函数、正规族、毕伯巴赫猜想简介等.

本书可作为高等院校数学与应用数学专业的教材，也可作为大学教师、科技工作者的数学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数/吕彦鸣，朱月萍，张义清等编著. —北京：化学工业出版社，2010. 5

高等学校规划教材

ISBN 978-7-122-07837-7

Ⅰ. 复… Ⅱ. ①吕…②朱…③张… Ⅲ. 复变函数-高等学校-教材 Ⅳ. O174. 5

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 032747 号

责任编辑：唐旭华　　文字编辑：林　媛

责任校对：蒋　宇　　装帧设计：史利平

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

720mm×1000mm　1/16　印张 10¼　字数 199 千字　2010 年 5 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：25.00 元

前　言

历史上，数系的几次扩充都是因为要使逆运算能够施行. 比如，为使加法的逆运算减法能够施行，人们引入负数；为了使乘法的逆运算除法能够施行，人们在整数系的基础上引进了分数；为了使乘方的逆运算开方得以施行，一方面，引入了无理数，另一方面，人们引入了纯虚数 $b\sqrt{-1}$，以及复数 $a+b\mathrm{i}$，其中 a,b 均为实数. 数系的每次扩张都是形式的引入，而人们真正把新引入的数当作数来接受，则是在发现了它们的实际意义之后，一般都经历了相当长的时间. 复数也是一样，16 世纪中叶，意大利数学家卡尔丹（Cardan，1545）在解代数方程时，首先产生了负数开平方的思想. 他把 40 看作是 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{15}$ 的乘积. 但一直到 18 世纪之前，人们对复数的有关概念还是了解得不多，用复数进行计算得到很多矛盾的结果. 所以，复数在历史上长期不能被人们接受. 人们认为虚数是没有任何实际意义的数，不真实的数. “虚数”一词本身就反映了这一点. 然而在实际上，一个复数是由一对实数表示的，同时许多几何量与物理量也是由一对实数表示的，比如平面直角坐标系中的点、平面向量、平面上的速度与力等. 人们逐渐发现，用复数可以表示这些量，并且当用复数表示这些量时，会使讨论变得非常方便. 到了 18 世纪，J·达朗贝尔（1717－1783）与 L·欧拉（1707－1783）等人逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念，并应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题，直到这时，人们才接受了复数，复变函数理论才能顺利地建立和发展.

现在，复变函数已形成了一个理论完备、应用非常广泛的学科. 在纯数学领域，如代数学、解析数论、微分方程、差分方程、概率论等很多分支依赖了复变函数的理论；在自然科学的其他部门，如空气动力学、流体力学、弹性理论、天体力学、电学、热学、理论物理等学科都大量地运用复变函数的方法和结果.

科学上，很多重要问题的解决依靠复变函数的工具和方法：代数学基本定理（每个代数方程至少有一个复根）可以在复变函数中轻松解决；素数分布方面的最困难的问题则是建立在 ζ-函数的零点分布的关系上；关于任意一个正整数表示为有限个数的任意次方之和的华林问题则是我国著名数学家，已故的华罗庚先生，在复变函数方法的基础上解决的；天体力学方面最困难的三体问题，其一般形式也是在吸收了复分析的方法解决的；要设计亚音速及超音速飞机，就需要用到复变函数的共形映射、拟共形映射等，不胜枚举.

复变函数论作为一门学问，内容博大精深，理论架构和谐完美，是数学与应用数学的基础。本书介绍了复变函数的基础知识，主要讨论了复数域上的解析函

数的一些性质. 研究解析函数的核心工具应该是复积分，其理论基础是作为中心定理的柯西积分定理. 本书对柯西积分定理给出了全新、直接的初等证明. 对于全书的编写，我们本着一个宗旨：用尽可能少的篇幅，讲清复变函数的基本原理，使读者获得比较深入的分析学的训练，进而养成好的数学思维品质.

全书共分七章，如果有54学时，当可讲完前六章. 选用此书的教师，可视课时及学生具体情况，对内容进行取舍. 有些段落完全可放手给学生自学. 其中有的定理和例题的结论是为以后章节预设的，并不需要讲解. 每章最后都配备了数量不多的习题，难度不大，供学生练习.

本书的编写过程中得到南通大学教务处以及教材科领导的关照，在此表示衷心的感谢. 由于学识浅薄，书中不到之处敬请谅解并欢迎提出宝贵意见！

编者

2010 年 3 月

目　录

第一章　复数和复平面

第一节　复　　数

一、复数域

复数是指形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数，其中的 $x, y \in \mathbb{R}$ 分别称为该复数的实部和虚部. i 称为虚数单位，它是代数方程 $x^2+1=0$ 的一个根. 若记 $z=x+\mathrm{i}y$，则记 $x=\mathrm{Re}z$，$y=\mathrm{Im}z$. 当 $y=0$ 时，视 $x+\mathrm{i}0$ 为实数 x. 当 $y\neq 0$ 时，称 z 为虚数. 当 $y\neq 0$ 但 $x=0$ 时，称 $z=\mathrm{i}y$ 为纯虚数. 两个复数，当且仅当它们的实部和虚部分别对应相等时，认为是相等的. 当 $x=y=0$ 时，记 $0+\mathrm{i}0=0$. 全体复数所成之集记为$\mathbb{C}$.

规定复数的四则运算如下:对于任意的复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，有

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$；

(2) $z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1)$；

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$, $z_2\neq 0$.

容易证明，复数的四则运算满足

(1) 交换律 $z_1+z_2=z_2+z_1$，$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$；

(2) 结合律 $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$，$(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$；

(3) 分配律 $(z_1\pm z_2)\cdot z_3=z_3\cdot(z_1\pm z_2)=z_1\cdot z_3\pm z_2\cdot z_3$.

在全体复数之集$\mathbb{C}$中引入上述运算之后，$\mathbb{C}$中就有了一个代数结构，称之为复数域. 它是实数域$\mathbb{R}$的扩张. 这里需指出，复数域已不是有序域了.

二、复平面

在平面上取直角坐标系，对于任意的复数 $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$，令其对应于平面中的点$(x, y)$，这是一个双射. 由此，可以用平面上的点表示复数. 其中横坐标表示实数，纵坐标表示虚数. 因此称横坐标为实轴，称纵坐标为虚轴. 称这样的平面为复平面. 有时也按照表示复数字母的不同，称复平面为 z 平面，w 平面…….

对于任意的复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，令

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

称为 z_1 与 z_2 之间的距离. 这一距离也称作欧几里得距离. 在此距离下，复平面(亦即复数集$\mathbb{C}$)又有了拓扑结构. 今后也称复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 为点 z.

对于任意的 $z \in \mathbb{C}$，可令其对应于平面上从原点出发，终点为 z 的向量(图1.1). 显然，z 同这样的向量是一一对应的，所以今后，也称复数 z 为向量 $\boldsymbol{z}$. 向

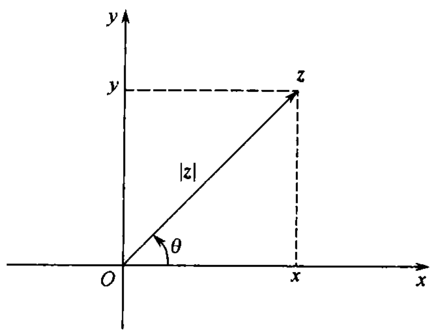

图 1.1

量 $\boldsymbol{z} = x + \mathrm{i}y$ 的长度称为复数的模，记作 $|\boldsymbol{z}|$，显然 $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. 容易理解，复数 z 的模就是点 z 与原点的距离. 而复平面上任意两点 z_1 与 z_2 间的距离 $d(z_1, z_2)$，即为复数 $z_1 - z_2$ 的模.

向量 $\boldsymbol{z} \neq 0$ 与实轴正向之间的夹角，称为 z 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z$，$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多值，它们相差 2π 的整数倍. 若取定其中的一个值 θ，则有

$$\mathrm{Arg}z = \theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$\mathrm{Arg}z$ 中有一个值落于$(-\pi, \pi]$之中，称这个值为 z 的辐角的主值或主辐角，记作 $\arg z$. 以后也把 $\mathrm{Arg}z$ 中某一确定的值记为 $\arg z$，这可在行文中看出. $z = 0$ 没有固定的辐角.

设 $z \neq 0$，$|z| = r$, $\mathrm{Arg}z = \theta$，参考图 1.1 可以得到：$\mathrm{Re}z = r\cos\theta$, $\mathrm{Im}z = r\sin\theta$，于是

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

这个式子称为 z 的三角表达式.

复数 $x + \mathrm{i}y$ 和 $x - \mathrm{i}y$ 称为是相互共轭的. 若其中一个表示为 z，则另一个表示为 $\bar{z}$. z 与 $\bar{z}$ 是关于实轴对称的. 显然

$$|z| = |\bar{z}|, \mathrm{Arg}\bar{z} = -\mathrm{Arg}z$$

后一等式应理解为：对于 $\mathrm{Arg}\bar{z}$ 的每一个值，有 $-\mathrm{Arg}z$ 中一个值与之相等，反过来也是这样.

三、复数域中一些公式和事实

1. 复数加减法的几何解释

如图 1.2，两非零复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 和 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 相加，即为平面上两个向量 z_1 和 z_2 相加. 当它们不共线时，作起点在原点的向量 z_1 及 z_2，以 z_1 和 z_2 为两边作平行四边形，从原点出发的对角线向量就是复数 $z_1 + z_2$. 当 z_1 与 z_2 共线时，$z_1 + z_2$ 也不难得到.

对于 $z_1 - z_2$，容易知道，它是以 z_2 点为起点，z_1 点为终点的向量.

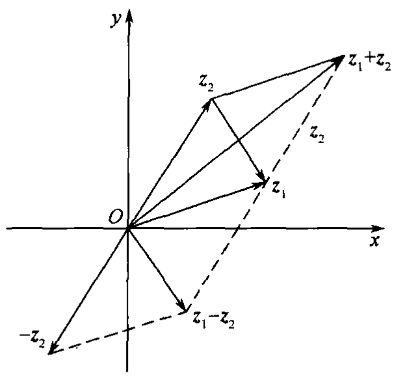

图 1.2

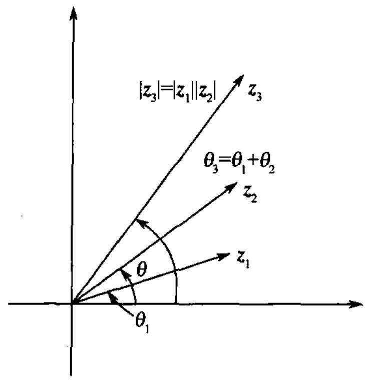

图 1.3

2. 复数乘除法的几何解释

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$ 是两个非零复数，则

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \tag{1.1}$$

于是有

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,\ \mathrm{Arg}\, z_1 z_2 = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2 \tag{1.1$'$}$$

即两个非零复数乘积的模，等于这两个复数模的乘积. 积的辐角，等于它们辐角的和. 但是对于式 (1.1)$'$ 的后一式应理解为：对于 $\mathrm{Arg}\, z_1 z_2$ 的每一个值，必有 $\mathrm{Arg}\, z_1$ 和 $\mathrm{Arg}\, z_2$ 的各一值，使它们的和与之相等. 反之亦然(图 1.3).

对于除法，依照定义，

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} + \mathrm{i}\,\frac{\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right) \\ &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_2 - \theta_1) + \mathrm{i}\sin(\theta_2 - \theta_1)] \end{aligned} \tag{1.2}$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2 \tag{1.2$'$}$$

即两个非零复数商的模，等于这两个复数模的商．商的辐角，等于两个复数辐角的差．但是对于式（1．2）$'$ 的后一式应理解为：对于 $\operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}$ 的每一个值，必有 $\operatorname{Arg} z_1$ 与 $\operatorname{Arg} z_2$ 之中各一个值，使得它们的差与之相等．

3．复数的乘方和开方

设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 0$，当 $n \in \mathbb{N}^+$ 时，反复运用公式(1.1)就有复数乘方公式

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1.3}$$

规定：$z^0 = 1$，则公式(1.3)对 $n = 0$ 也成立．再规定：$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$，则有

$$z^{-n} = r^{-n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)]$$

于是 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 有

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \tag{1.4}$$

当 $|z| = 1$ 时，就得到著名的棣美弗公式

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{1.5}$$

当 n 为不小于 2 的正整数时，定义 $z^{\frac{1}{n}}$ 为满足方程 $w^n = z$ 的复数 w，称为复数 z 的 n 次方根．记 $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$．设 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，$w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$，代入方程 $w^n = z$ 中，有

$$\rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

从而

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

其中，θ 为 $\operatorname{Arg} z$ 的某一特定值，常取为主辐角．于是有 $\rho = \sqrt[n]{r}$（算术根，因为模 ρ 为正数）和 $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}(k \in \mathbb{Z})$．注意到三角函数的周期性，容易推得 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个不同的值，即

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k = 0,1,2,\cdots,n-1 \tag{1.6}$$

由以上讨论知，当 $z \neq 0$ 时，式(1.4)对于 n 为有理数也是成立的．当 $z = 0$ 而 n 为正有理数时，$z^n = 0$．

【例 1】 用 $\cos\theta$，$\sin\theta$ 表示 $\cos3\theta$，$\sin3\theta$．

解 由棣美弗公式有

$$\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3$$
$$= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta$$

比较实部、虚部得

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

【例 2】 求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$ 的值.

解 由于 $1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)$，有

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$
$$= \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right) \quad (k = 0,1,2,3)$$

记 $w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)$，则

$$w_k = (\sqrt[4]{1+\mathrm{i}})_k = w_0\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^k = w_0 \cdot \mathrm{i}^k$$

它们分别是：w_0，$\mathrm{i}w_0$，$-w_0$，$-\mathrm{i}w_0$.

注 称 $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$ 为 4 次单位根，它是 1 的 4 次方根表达式中 $k = 1$ 时的值.

4. 共轭运算中的常用公式

设 z，z_1，z_2 都是复数，则

(1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ (1.7)

(2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ (1.8)

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ (1.9)

(4) 设 $R(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 是关于复数 z_1，z_2，…，z_n 的有理运算，则有

$$\overline{R(z_1, z_2, \cdots, z_n)} = R(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \cdots, \bar{z}_n) \quad (1.10)$$

(5) $\bar{\bar{z}} = z$ (1.11)

(6) $z\bar{z} = |z|^2$ (1.12)

(7) $\mathrm{Re}z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ (1.13)

(8) $\mathrm{Im}z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ (1.14)

它们的证明留给读者作为练习.

5. 复数中几个常用的等式和不等式

(1)平行四边形法则　设 z_1，z_2 为两个复数，由式(1.7)、式(1.12)和式(1.13)，有

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)} = (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)+z_2\bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

同理

$$|z_1-z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2 \tag{1.16}$$

把式(1.15)、式(1.16)两式相加，就得到平行四边形法则

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2) \tag{1.17}$$

平行四边形法则在欧几里德几何中起着至关重要的作用.

(2)三角不等式　复数域不是有序域，所有不等式必须是实数之间的关系. 从复数的模的定义可得如下不等式

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant |z|,\quad -|z|\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant |z| \tag{1.18}$$

等式 $\mathrm{Re}z=|z|$ 当且仅当 $z\geqslant 0$(非负实数)时成立. 将式(1.18)应用于式(1.15)立得

$$|z_1+z_2|\leqslant |z_1|+|z_2| \tag{1.19}$$

其中等式成立当且仅当 $z_1\bar{z}_2\geqslant 0$. 当 $z_2\neq 0$ 时，这一条件等价于 $|z_2|^2\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)\geqslant 0$ 或 $\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0$，称式(1.19)为三角不等式.

三角不等式可推广到任意有限个复数之和的情形

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \tag{1.20}$$

下面讨论这个不等式等号成立的条件，假设等式成立，则有

$$\begin{aligned}|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| &= |(z_1+z_2)+z_3+\cdots z_n| \\ &\leqslant |z_1+z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|\end{aligned}$$

可推出：$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$，如 $z_2\neq 0$，则有 $\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0$. 由下标的任意性就得到式(1.20)中等式成立的必要条件:任意两个非零项之比为正数.

反之，若此条件成立，设 $z_1\neq 0$，有

$$|z_1+z_2+\cdots z_n| = |z_1|\left|1+\frac{z_2}{z_1}+\cdots+\frac{z_n}{z_1}\right| = |z_1|\left(1+\frac{z_2}{z_1}+\cdots+\frac{z_n}{z_1}\right)$$

$$= |z_1| \left(1 + \left|\frac{z_2}{z_1}\right| + \cdots + \left|\frac{z_n}{z_1}\right|\right) = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

综上所述，式(1.20)中等式成立的充分必要条件为任意两个非零项之比为一正数.（这有什么几何解释？）

作为式(1.19)的推论，由

$$|z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2|$$

有

$$|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$$

同样有

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|$$

于是又得到

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big| \tag{1.21}$$

对于 $|z_1 + z_2|$ 也有 $|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

(3)柯西不等式　设 a_i，b_i $(i = 1,2,\cdots,n)$ 是两组复数，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \tag{1.22}$$

证　设 λ 为任一复数，由式(1.16)得

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2\mathrm{Re}\bar{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{1.23}$$

对于所有的 λ，这一式都非负，选 $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2$（这里假设 $\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \neq 0$，因为否则问题是平凡的），将 λ 值代入式(1.23)化简后得

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 - \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2}{\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2} \geqslant 0$$

这一式同式(1.22)等价.

6. 曲线方程的复形式

(1)过复平面$\mathbb{C}$上不同两点 z_1 和 z_2 的直线方程　设 z 是该直线上的任意一点，则 $z - z_1$ 同 $z_2 - z_1$ 同向或反向. 因此 $\dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} = t$ 为实数，改写为

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.24}$$

容易验证满足式(1.24)的点 z 也必定在通过 z_1 和 z_2 的直线上. 因此式(1.24)是过 z_1，z_2 两点的直线的方程.

当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时，$z = z_1 + (z_2 - z_1)t$ 是连接 z_1 和 z_2 的直线段.

如果 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则

$$\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2 = \mathrm{Re}\bar{z}_1 z_2 = x_1x_2 + y_1y_2 = r_1r_2\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

这表明 $\mathrm{Re}z_1\bar{z}_2$ 在几何上表示为两个复数 z_1，z_2 所对应向量的内积或数量积. 利用这一解释，当给定一直线 L 及其一法向量(不要求为单位向量)，并设法向量对应的复数为 B，在直线 L 上任取一点 z，则 z 与 B 所对应向量的内积应是与 z 选取无关的实常数. 从而，L 的方程可表示为

$$\mathrm{Re}B\bar{z} = -C/2 \tag{1.25}$$

这里，C 为某一实常数(若记 d 为原点到 L 的距离，则 $d = -C/2|B|$). 当 z 与 B 所对应向量成锐角时，C 取负值；钝角时 C 取正值. 再利用公式

$$\mathrm{Re}z = (z + \bar{z})/2$$

则式(1.25)可改写为

$$\bar{B}z + B\bar{z} + C = 0 \tag{1.26}$$

反过来，任给方程(1.26)，其中 B 为复数，C 为实数，则式(1.26)等价于式(1.25)，故它表示直线方程，如图 1.4.

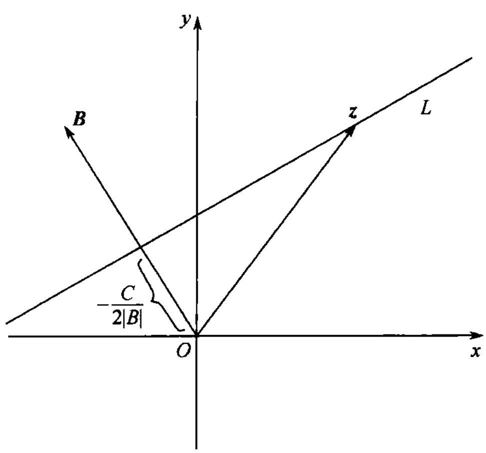

图 1.4

(2)圆的方程　复平面上以 z_0 为心，$R > 0$ 为半径的圆的方程可表示为

$$|z - z_0| = R \tag{1.27}$$

或

$$z = z_0 + R(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta),\ -\pi < \theta \leqslant \pi \tag{1.28}$$

对于式(1.27)，又可写成

$$|z - z_0|^2 = R^2 \quad 或 \quad (z - z_0)\overline{(z - z_0)} = R^2$$

注意到共轭运算的性质，展开后得到