普通高等教育“十一五”国家级规划教材

大学数学——微积分习题课教程

(第二版) 上册

吉林大学数学学院
张朝凤　王　颖　王瑞廷　主编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

大学数学——微积分习题课教程

Daxue Shuxue——Weijifen Xitike Jiaocheng

（第二版） 上册

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是与《大学数学——微积分》(第二版) (上册) 配套的习题课教材。本书密切配合主教材，各讲首先概括主教材的相关内容，然后按教学要求精选精讲例题，并配有练习题、综合练习题与参考答案。

本书共分六讲，内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，空间解析几何。

本书可供高等学校非数学类理工科各专业学生使用，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学. 微积分习题课教程. 上册 / 张朝凤，王颖，王瑞廷主编.
—2 版. —北京：高等教育出版社，2010. 7
ISBN 978-7-04-030077-2

I. ①大… II. ①张… ②王… ③王… III. ①微积分-高等学校-解题 IV. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2010) 第 097068 号

策划编辑	兰莹莹	**责任编辑**	张彦云	**封面设计**	于 涛
责任绘图	郝 林	**版式设计**	王艳红	**责任校对**	杨凤玲
责任印制	张泽业				

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**咨询电话**	400-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	北京市卫顺印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
		版　　次	2006 年 5 月第 1 版 2010 年 7 月第 2 版
开　　本	787×960　1/16		
印　　张	13.5	**印　　次**	2010 年11月第 2 次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	18.20 元

物料号　30077-00

《大学数学》系列教材编委会

第二版前言

《大学数学》系列教材面世已经 5 年了。在此期间, 有不少高校同行在使用本系列教材的过程中提出了许多宝贵意见, 结合过去 5 年我们使用本系列教材的教学实践经验和近几年大学数学课程改革的一些新动态, 编委会决定对本系列教材进行修订、完善。

这次习题课教程修订的指导思想是: 1. 与主教材紧密配合, 通过习题课的讲解, 使读者进一步加深对课程内容的理解。2. 基本按习题课的学时安排编写每一讲, 教师也可根据教学情况进行调整。3. 习题的难易搭配适中。

本书密切配合《大学数学 —— 微积分》(第二版) (上册), 内容充实, 题型全面, 各讲首先概括总结主要内容, 继而进行例题选讲, 并配有练习题、综合练习题及参考答案。本书总结学习规律, 解决疑难问题, 提示注意事项, 特别注重提高学生分析问题、解决问题的能力。

本书第一讲、第六讲由张朝凤编写, 第二讲、第三讲由王瑞廷编写, 第四讲、第五讲由王颖编写, 最后由张朝凤统审、定稿。

在本书的修订过程中, 得到了吉林大学数学学院和高等教育出版社数学分社的大力支持和帮助, 吴晓俐女士承担了本系列教材的编务工作, 在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平所限, 书中的错误和不当之处, 敬请读者批评指正。

《大学数学》系列教材编委会

2010 年 3 月

第一版前言

大学数学习题课教程系列教材是普通高等教育“十五”国家级规划教材《大学数学》的配套教材。本套教材分两册:《微积分习题课教程》和《线性代数与随机数学习题课教程》。每册分上、下两篇。《微积分习题课教程》的上篇为一元微积分,下篇为多元微积分。《线性代数与随机数学习题课教程》的上篇为线性代数,下篇为随机数学。

大学数学习题课教程系列教材借鉴了国内外同类教材的精华,汲取了当前教学改革和教学研究的最新成果;是针对非数学类专业理工科大学生对基础数学的要求而编写的。本教材密切配合大学数学系列教材,注意到了时代的特征和学生的特点,本着“加强基础、强化应用、整体优化、注重后效”的原则,力争做到科学性、系统性与可行性的统一。其特点是:体现了现代数学思想与方法,解决疑难问题,总结学习规律,提示注意事项,特别注重培养学生分析问题、解决问题的能力。本教材可作为高等学校非数学类理工科各专业学生学习数学的辅助教材或参考书。本教材内容充实,每章配有综合练习及参考答案与提示。参考答案与提示只是作为一种参考提供给读者。

《微积分习题课教程》上篇共五章,第一章由张朝凤编写,第二章由王瑞廷编写,第三章由王颖编写,第四章由王颖和李岩波编写,第五章由李岩波编写;上篇由张朝凤统审、定稿。下篇共七章,第六、七章由马瑞杰编写,第八、九章由刘静编写,第十章由白岩编写,第十一章由赵建华编写,第十二章由韩燕编写;下篇由赵建华统审、定稿。

在《大学数学习题课教程》的编写过程中,得到了吉林大学教务处和数学学院的大力支持。青年教师孙鹏、任长宇及研究生王军林、姜政毅、徐忠海、高懿、陈明杰、杨旭辉、朱复康完成了本套教材的排版制图工作。在此一并致谢。编者要特别感谢高等教育出版社数学分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持。

由于我们水平有限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一讲　函数、极限与连续

内 容 提 要

1.1　函数的概念

设 x 与 y 是两个变量, 变量 x 的变域是非空数集 D, 如果对 D 中任意一个 x, 变量 y 按照一定的法则总有唯一的数值与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数, 记为

$$y=f(x) \quad 或 \quad y=y(x),$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

也把两个数集之间的映射称为函数.

1.2　函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 如果存在正数 M, 使得对一切 $x\in X$, 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界, 否则就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 有

$$f(x_1)<f(x_2) \quad (或\ f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加 (或单调减少), 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 在对称于原点的数集 X 上有定义, 如果对于任意 $x\in X$, 都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是数集 X 上的奇函数. 如果对任意 $x \in X$ 都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是数集 X 上的偶函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称, 奇函数的图形关于原点对称.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 若存在常数 $l \neq 0$ 使得对任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$f(x+l) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为周期函数, 使 $f(x+l) = f(x)$ 成立的最小正数 l 称为 $f(x)$ 的周期.

1.3 反函数、复合函数及初等函数

1. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D, 值域为 W. 如果对于 W 中的任意一个 y 值, 在 D 中都有唯一的 x, 使得 $f(x) = y$, 则 x 便是 y 的函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 称它为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

习惯上, 把 $x = f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 位置互换, 得到 $y = f^{-1}(x)$.

2. 复合函数

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_1, 函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_2, 值域为 W, 当 $D_1 \cap W \neq \varnothing$ 时, 对任意 $x \in D(D = \{x | x \in D_2, u = \varphi(x) \in D_1\})$, 有 $u = \varphi(x)$ 与之对应, 进而有 $y = f(u)$ 与之对应, 这样通过 u 得到了以 x 为自变量, y 为因变量的函数, 称为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 经复合运算而得到的复合函数, 记为

$$y = f[\varphi(x)],$$

该复合函数定义域为 D, u 称为中间变量.

3. 初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数. 由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算而得到的并且可以用一个数学式子来表示的函数, 称为初等函数.

1.4 极限的定义

1. 数列极限

给定数列 $\{x_n\}$, a 为常数, 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限, 或称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n\to\infty).$$

2. 函数极限

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $x > b > 0$ 上有定义, A 为一个常数, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists$ 正数 $X(X > b)$, 使得当 $x > X$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to+\infty).$$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x < -b(b > 0)$ 上有定义, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists$ 正数 $X(X > b)$, 使得当 $x < -X$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $x \to -\infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to-\infty).$$

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $|x| > b(b > 0)$ 上有定义, 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists$ 正数 $X(X > b)$ 使得当 $|x| > X$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to\infty).$$

(4) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义 (在 x_0 点可以没有定义), 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x\to x_0).$$

(5) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的左侧邻域内有定义 (在 x_0 点可以没有定义), 如果 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^-$ 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^-) = A.$$

(6) 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的右侧邻域内有定义 (在 x_0 点可以没有定义), 如果 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0^+$ 时以 A 为极限, 记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x_0^+) = A.$$

1.5 极限的性质和运算法则

函数极限与数列极限具有相同的性质, 下面以 $x \to x_0$ 为例给出极限的性质.

1. 唯一性 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 则其极限值唯一.

2. 有界性 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在, 则存在正数 M 及 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant M$, 即 $f(x)$ 在 x_0 点的某去心邻域内有界.

3. 保号性 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$,且 $A > B$ (或 $A < B$), 则 $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > g(x)$ (或 $f(x) < g(x)$).

4. 复合函数的极限

设 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$, 且在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x) \neq u_0$, 又设 $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, 则有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A.$$

1.6 极限存在的两个准则 重要极限

1. 单调有界原理 单调有界的数列必收敛.

2. 夹挤定理 给定三个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$, 如果满足条件:

(1) 存在正整数 k, 当 $n > k$ 时, $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$,

则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

【注】 夹挤定理对函数极限也成立.

3. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.\right)$

1.7 无穷小和无穷大

1. 无穷小的定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的去心邻域内有定义, 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量, 简称无穷小.

数列的无穷小和其他极限情形下函数的无穷小可类似地定义.

2. 无穷大的定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某个去心邻域内有定义, 如果对于任意正数 M(无论它有多么大), 都存在正数 δ, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty.$$

数列的无穷大和其他极限情形下函数的无穷大可类似地定义.

3. 无穷小与极限的关系 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是存在 $x\to x_0$ 时的无穷小 $\alpha(x)$, 使得

$$f(x)=A+\alpha(x).$$

4. 无穷小的比较

同一极限过程中 $\lim\alpha=\lim\beta=0$ 且 $\alpha\neq0$.

(1) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$, 则称 β 是比 α 高阶的无穷小 (或 α 是比 β 低阶的无穷小), 记为 $\beta=o(\alpha)$;

(2) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C$ ($C\neq0$ 是常数), 则称 β 与 α 是同阶无穷小, 记作 $\beta=O(\alpha)$;

(3) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 与 α 是等价无穷小, 记作 $\beta\sim\alpha$;

(4) 如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=l$ ($l\neq0$ 是常数, $k>0$ 是常数), 则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

5. 常用的等价无穷小 当 $x\to0$ 时, 有

$\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2,$

$\ln(1+x)\sim x,\quad \log_a(1+x)\sim\dfrac{x}{\ln a}(a>0,a\neq1),$

$e^x-1\sim x,\quad a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1),$

$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ (α 为常数).

6. 求积、商的极限时的等价无穷小代换

在同一极限过程中, $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$ 均是无穷小, $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则有

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

1.8 函数的连续性

1. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果当自变量 x 的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时, 相应的函数 y 的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$, 即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \text{ 或 } \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续, x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

2. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个左 (右) 邻域 $(x_0-\delta,x_0]([x_0,x_0+\delta))$ 内有定义, 且

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左 (右) 连续.

3. 如果函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都连续, 则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续.

4. 如果函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 内连续, 并且在左端点 a 右连续, 在右端点 b 左连续, 则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续. 其他类型区间 I 上的连续函数可类似定义.

1.9 函数的间断点及其分类

1. 间断点 使函数 $f(x)$ 不连续的点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点. 使函数 $f(x)$ 发生间断的点有如下三种情形:

(1) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 无定义;

(2) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

(3) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义, 且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

2. 间断点的分类 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个间断点.

第一类间断点 如果函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的左极限和右极限都存在, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点.

第二类间断点 如果函数 $f(x)$ 在间断点 x_0 的左极限和右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

1.10 连续函数的运算及初等函数的连续性

1. 设函数 $f(x), g(x)$ 在点 x_0 连续, 则函数 $f(x) \pm g(x), f(x)g(x)$ 及 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0) \neq 0)$ 都在点 x_0 连续.

2. 连续函数的反函数是连续函数.

3. 连续函数的复合函数是连续函数.

4. 一切初等函数在其定义区间内都是连续函数.

1.11 闭区间上连续函数的性质

1. 最值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有最大值和最小值.

2. 有界性定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有界.

3. 介值定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意实数 c, 在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = c.$$

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的函数值为零, 即 $f(x_0) = 0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的零点.

4. 零点定理 如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则在开区间 (a,b) 内至少有函数 $f(x)$ 的一个零点, 即至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(\xi) = 0.$$

例 题 解 析

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$; (2) $y = \arccos(x-3)$;

(3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}} + \ln\sin x$.

【解】 (1) 要使 $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 有意义, 必须

$$\begin{cases} 1 - x^2 \neq 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

解得 $x \geqslant -2$ 且 $x \neq \pm 1$, 即当 $x \geqslant -2$ 且 $x \neq \pm 1$ 时, 函数有意义, 从而函数的定义域为 $[-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

(2) 要使 $y = \arccos(x-3)$ 有意义, 必须

$$|x-3| \leqslant 1,$$

因此, $2 \leqslant x \leqslant 4$, 函数的定义域为 $[2,4]$.

(3) 要使 $y = \dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}} + \ln\sin x$ 有意义, 必须

$$\begin{cases} 16 - x^2 > 0, \\ \sin x > 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -4 < x < 4, \\ 2k\pi < x < (2k+1)\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots), \end{cases}$$

解得 $-4 < x < -\pi$ 或 $0 < x < \pi$, 所以函数的定义域为 $(-4,-\pi) \cup (0,\pi)$.

【例 2】 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$, 试求下列函数的定义域:

(1) $f(x^2)$;　　(2) $f(x-a) + f(x+a)(a > 0)$.

【解】 (1) 使 $f(x^2)$ 有意义的 x 应满足

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1,$$

解得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 使 $f(x-a) + f(x+a)$ 有意义的不等式组为

$$\begin{cases} 0 \leqslant x - a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x + a \leqslant 1, \end{cases} \text{即} \begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1 + a, \\ -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \end{cases}$$

由已知 $a > 0$, 为使不等式组有公共部分, 必须 $1 - a \geqslant a$, 即 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$, 所以当 $0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, $f(x-a) + f(x+a)$ 的定义域是 $[a, 1-a]$.

【例 3】 设 $f(x) = \mathrm{e}^x, g(x) = \begin{cases} -1, & |x| > 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| < 1. \end{cases}$ 求 $g[f(x)]$ 与 $f[g(x)]$, 并画出这两个函数的图形.

【解】 由于

$$g[f(x)]=g(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}-1, & |\mathrm{e}^x|>1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ 1, & |\mathrm{e}^x|<1,\end{cases}$$

即

$$g[f(x)]=\begin{cases}-1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x<0.\end{cases}$$

$g[f(x)]$ 如图 1.1.

由于

$$f[g(x)]=\mathrm{e}^{g(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\\ \mathrm{e}^0, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^1, & |x|<1,\end{cases}$$

即

$$f[g(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}, & |x|<1.\end{cases}$$

$f[g(x)]$ 如图 1.2.

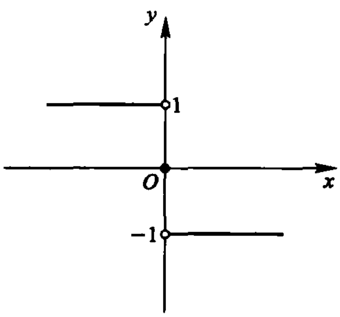

图 1.1

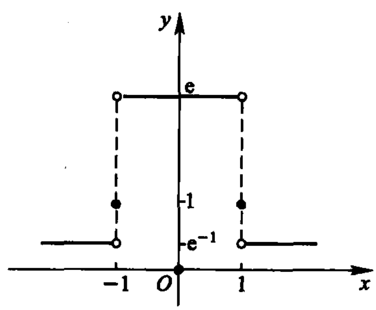

图 1.2

【例 4】 设 $a^2\neq 1, f(x)$ 满足

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=af(x)+\varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 当 $x\neq 1$ 时是有意义的已知函数, 求 $f(x)$.

【解】 若令 $t=\dfrac{x}{x-1}$, 即 $x=\dfrac{t}{t-1}$, 则原式可改写为

$$f(t)=af\left(\frac{t}{t-1}\right)+\varphi\left(\frac{t}{t-1}\right),$$