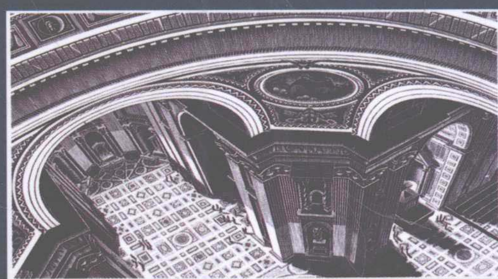
俄罗斯数学精品译丛

俄罗斯
组合分析问题集



● 刘培杰数学工作室 组织编译
● 叶思源 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ELUOSI ZUHE FENXI WENTI JI

ELUOSI ZUHE FENXI WENTI JI

俄罗斯
组合分析问题集

叶思源　编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一本问题集。这些问题与下列数学有关：组合数学、离散数学与信息论的数学部分的一系列表示为“数字形式”的问题，包括纠错码理论、离散几何、组合学中的概率等。我们着重介绍由 Г. П. Егорычев 所提出的计算组合和的方法，并将这个方法作为书中各篇的主要分析工具。

本书可以作为离散数学与信息论课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯组合分析问题集/叶思源编译.—哈尔滨：
哈尔滨工业大学出版社，2010.9
（俄罗斯数学精品译丛）
ISBN 978-7-5603-3083-9

Ⅰ.①俄…　Ⅱ.①叶…　Ⅲ.①组合分析
Ⅳ.①O157.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 174749 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　肇东粮食印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 10.75　字数 130 千字
版　　次　2011 年 1 月第 1 版　2011 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3083-9
定　　价　48.00 元

目　　录

绪　论

众所周知,许多人认为组合分析的构成是相当不确定的,它的各项内容与不同问题的解法仅仅与神秘的"组合型"定义相关.通常,在组合学中有"世代相传的从属关系"的问题,这些问题没有明晰的表达式,但是,即使放弃对离散对象明确的尊重,这些不良性质也不是它们的本性.问题在于:作为众多数学论证与数学结果的基础的"组合性引理",是以充分初等水平语言表述的,它却具有深刻的数学内容.例如以不同形式表示的 Hall 引理或 Ramsey 定理.同样流传下列的看法:组合学的各种问题是"繁难的",因为它们既没有纳入一般理论的范围,也不容许清楚地形式化.这类结论有一部分是正确的,它们共同建立整体地认识事物的某些世界观的基础.这里想补充说明的是:当今许多组合问题明确地具有可以见得到的实用意义,因此,并不需要别的广告式的宣传.最后,特别指出:无论按实际效益的原则或按任何其他外在的标准来说,企图将组合问题分为"重要的"与"不很重要的",其结果的影响一定是消极的.

在本书中将组合分析分为几篇来写,有时,以下列方式划分已经是相当充分的:

- 组合和;
- 生成函数,估值与其他事项;
- 组合内容的数论问题;
- n 维单位立方体的几何;
- 布尔函数;
- 有限集的组合学;
- 字与序列的组合学;
- 概率内容的组合学;
- 综合题

我们在上述每一篇中都提供一套不同难度的问题,这些问题具有独创性和

趣味性.作者在对下列大学的大学生和研究生的教学中使用过其中一部分问题:莫斯科物理技术研究所,以 Н.Э.Бауман 命名的国立莫斯科工业大学,以 М.В. Ломоносов 命名的国立莫斯科大学,以及德国与美国的众多大学.其余的问题是"从属的",它们是研究工作所得.当然,其中若干问题来自不同的课本与教材.

现在着重详细介绍每一篇的内容.

组合和 在组合分析领域中,组合和是众多源自不同范围的研究的必然产物,与组合分析相关的选题确定的部分构成了独立的篇章.本书在这篇里选出两个著名的方面:①组合恒等式;②组合和的渐近估值.

第一篇的问题大多数与组合和的计算及组合恒等式的证明有关.同时,只要有可能,我们处处尽力将 Г.П.Егорычев 在参考文献[1]所提出的系数方法作为技术手段使用,这与我们的下列观点有关:目前,对于组合和的工作,Егорычев 公式是最广博的,而且是强有力的手段.

在第一篇中论述 Егорычев 公式,并给出一系列的例子说明它的作用.我们还利用一系列特殊函数:Bessel 函数、Кравчук 多项式、Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式等.因而这就相当大地扩展了求组合和的可能范围.在这里,我们假设读者已经熟悉复变函数的基础知识(Cauchy 公式、留数).

组合内容的数论问题 本篇基本上包括数论中要求"在一定程度上计算"的问题,问题的答案为显式,或为某个生成函数的形式.本篇还有与数列稠密相关的问题,这些是独创的安排.

***n* 维单位立方体的几何** 众所周知,n 维单位立方体,即长度为 n 的二元组,是构造和研究各种组合模型的通用的材料,集合的离散理论、编码理论、布尔函数等都与它有关.本篇中包含与 B^n 中各点、球、区间相互位置的度量属性有关的问题,一部分问题就属于编码理论.我们还运用以下概念:群码、校验矩阵、码距等.

布尔函数 本篇包含相当传统的材料,它们与下列内容有关:布尔函数的不同表达式、布尔函数的已知的分类、布尔多项式等.本篇与标准的篇章的最大不同在于其中与以下内容有关的问题:Post 定理及布尔函数在不同基底的表达式的复杂性.

字与序列的有限集的组合学 本篇的问题全部都是组合学的典型问题,而

问题的表述却不是简单与平常的.因此,其中许多问题的解答并非肤浅的,而是要求一定的机敏性.在这里,可能要从与寻常的方法距离很远的地方才找到所需的解法,这就使得问题别具魅力.

组合学与概率 组合学的许多问题的提法与解答,从概率的角度来考虑都是有益的.清楚地认识这一事实是组合分析近三四十年重要的成果之一.本篇所提出的问题一定能够显示在组合学中应用概率工具的多样性,而且是富有成果的.

综合题 本篇是各类问题的万花筒,这些问题涉及以下数学题材:离散几何、数论、组合学的改编过的问题等.我们对其中大部分问题都提供了足够详细的解答.

本书中用到的组合学的所有概念在充分的程度上是标准的,而且都可以在参考文献[1]~[8]中找到.

1.组合求和

在本篇,我们基本上沿用参考文献[1]中引入的记号.设 $H_K = \{f(z)\}$,这里

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{a'_i}{z^i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \cdot z^i, a'_k \neq 0$$

那么有

$$\underset{z}{coef}\{f(z)\} = a'_1 \tag{1}$$

换句话说,算子 $\underset{z}{coef}\{f(z)\}$ 由在集合 H 上定义的形式幂级数所确定,对这个幂级数可以进行通常的加法、乘法、叠加与求逆,以及级数的求导与求积分运算.

从式(1)可知,如果

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

则

$$a_n = \underset{z}{coef}\{f(z) z^{-n-1}\} \tag{2}$$

1.**关于系数的运算规则**

系数消去法则　如果

$$\underset{u}{coef}\{f_1(u) u^{-n-1}\} = \underset{u}{coef}\{f_2(u) u^{-n-1}\} \quad n = 0,1,\cdots \tag{3}$$

则 $f_1(u) = f_2(u)$,其中相等是指形式幂级数 $f_1(u)$ 与 $f_2(u)$ 的系数对应相等.

线性性质

$$\alpha\, \underset{u}{coef}\{f_1(u) u^{-n-1}\} + \beta\, \underset{u}{coef}\{f_2(u) u^{-n-1}\} = \underset{u}{coef}\{(\alpha f_1 + \beta f_2) u^{-n-1}\} \tag{4}$$

变量替换法则

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \underset{u}{coef}\{f(u) u^{-n-1}\} = f(z) \tag{5}$$

微分法则

$$n\, \underset{u}{coef}\{f(u) u^{-n-1}\} = \underset{u}{coef}\{f'(u) u^{-n}\} \quad n = 0,1,\cdots \tag{6}$$

积分法则

$$\frac{1}{n+1}\underset{u}{coef}\{f(u)u^{-n-1}\} = \underset{u}{coef}\left\{\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]u^{-n-2}\right\} \tag{7}$$

当级数 $f(z)$ 在零点的邻域内收敛的时候,$\underset{z}{coef}\{f(z)\}$ 就是函数 $f(z)$ 在零点的留数,即

$$\underset{z=0}{res}f(z) = \underset{z}{coef}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|<\rho} f(z)\mathrm{d}z \tag{8}$$

其中 ρ 是充分小的正数.

我们可以列出下列的公式表,本篇将会经常用到这些公式

$$\begin{aligned}
&\underset{u}{coef}\{(1+u)^n u^{-k-1}\} = \binom{n}{k} \\
&\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-n} u^{-n-1}\} = (-1)^k\binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k} \\
&\underset{u}{coef}\{\mathrm{e}^{\alpha u} u^{-n-1}\} = \frac{\alpha^n}{n!} \\
&\underset{u}{coef}\{\ln(1-u) u^{-n-1}\} = -\frac{1}{n} \\
&\underset{u}{coef}\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}} u^{-n-1}\} = \binom{2n}{n}
\end{aligned} \tag{9}$$

很多时候,我们会使用如下记号

$$a_n = \underset{z^n}{coef}\{f(z)\}$$

2. 应用系数方法计算组合和的例子

例 1　计算下列组合和

$$S_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+r}{r} \tag{10}$$

利用式(9) 和线性性质,由式(10) 得

$$\begin{aligned}
S_n = &\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n+r}u^{-r-1}\} = \\
&\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\left(\frac{1+u}{u}\right)^r\right\} =
\end{aligned}$$

$$\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\right\}\cdot\left(1-\frac{1+u}{u}\right)^n=(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\right\}=$$
$$(-1)^n$$

例2 令
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k}{2k}$$

应用式(9),将 S_n 表示为如下形式

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\operatorname*{coef}_{u}\{(1+u)^{n+k}u^{-2k-1}\}$$

然后,运用线性性质并对几何级数求和得

$$S_n=(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{4(1+u)}{u^2}\right)^k\right\}=$$
$$(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\cdot\frac{1-(-1)^{n+1}\left(\frac{4(1+u)}{u^2}\right)^{n+1}}{1+\frac{4(1+u)}{u^2}}\right\}=$$
$$(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{u(1+u)^n}{(u+2)^2}\right\}+4^{n+1}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}(u+2)^2}\right\}\tag{11}$$

式(11)中的第一项等于零,这是因为 $u=0$ 不是花括号中函数的奇点.接下来要求函数

$$\varphi(u)=\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}(u+2)^2}$$

在点 $u=0$ 的留数.因为“直接”从高阶极点计算比较困难,所以利用通常的标准的方法,包括运用下列定理:函数 $\varphi(u)$ 关于包括 $u=\infty$ 在内的它的所有奇点的留数之和为零.在所给的条件下,这些点是 $u_1=0,u_2=-2,u_3=+\infty$.因为 $\varphi(u)$ 是有理函数,而且分子的阶数比分母的阶数大2,因此,$\operatorname*{res}_{u=u_3}\varphi(u)=0$.由此可知,函数 $\varphi(u)$ 在零点的留数等于函数 $\varphi(u)$ 在点 $u_2=-2$ 的留数的相反数.现在要做的计算是不难的,即

$$\operatorname*{res}_{u=-2}\varphi(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}}\right)_{u=-2}=-\frac{2n+1}{4^{n+1}}\tag{12}$$

最后得到

$$S_n=2n+1$$

例 3 求和

$$S=\sum_{k=i}^{N-n+i}\binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} \tag{13}$$

作代换 $k-i=r$,得

$$S=\sum_{r=0}^{N-n}\binom{i+r}{i}\binom{N-i-r}{n-i} \tag{14}$$

因为
$$\binom{i+r}{i}=\binom{i+r}{r}=(-1)^r\binom{-(i+1)}{r}$$

所以从式(14)得

$$S=\sum_{r=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(i+1)}u^{-r-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-i-r}v^{-N+n+r-1}\} \tag{15}$$

在式(15)中求和的上标可以是无限的,这是因为当 $r\geqslant N-n+1$ 时有

$$\underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-1-r}v^{-(N-n)+r-1}\}=0$$

其次,由于线性性质

$$S=\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N-i}}{v^{N-n+1}}\sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{v}{1+v}\right)^r\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(i+1)}u^{-r-1}\}\right\} \tag{16}$$

根据积分法则,我们从式(16)得

$$S=\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N-i}}{v^{N-n+1}}\cdot\left(1-\frac{v}{1+v}\right)^{-(i+1)}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{N-n+1}}\right\}=\binom{N+1}{N-n}=\binom{N+1}{n+1}$$

第二种解法

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1+u)^k u^{-k+i-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-k}v^{-n+i-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{u^{i-1}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^N}{v^{n-i+1}}\right\}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1+u}{u(1+v)}\right]^k\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{n-i+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{u\cdot u^{i-1}}{uv\left(1-\frac{1}{uv}\right)}\right\}\right\}$$

因为
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{i-1}}{1-\frac{1}{uv}}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{u^{i-1}\left(1+\frac{1}{uv}+\cdots+\left(\frac{1}{uv}\right)^i+\cdots\right)\right\}=\frac{1}{v^i}$$

所以
$$S = \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{n+2}}\right\} = \binom{N+1}{n+1}$$

问　　题

证明下列组合恒等式：

1. $\sum_{k=0}^{m} 4^k \binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k} = \binom{2n}{2m}$，当 $n \geqslant m$ 时.

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. $\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-4)^{-i} \binom{n-i}{i} = \frac{n+1}{2^n}$.

4. $\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k}\binom{n+k}{2m} = \binom{2n+1}{2m}$，当 $n \geqslant m$ 时.

5. $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

6. $\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}\binom{n-i-1}{j-1} = 0$.

7. $\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r} = \begin{cases}\binom{n-m}{r-m} & \text{当 } r \geqslant m \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } r < m \text{ 时}\end{cases}$.

8. $\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{s+k}{n} = \begin{cases}(-1)^r\binom{s}{n-r} & \text{当 } n \geqslant r \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n < r \text{ 时}\end{cases}$.

9. $\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s}\binom{n-s}{k} = \begin{cases}0 & \text{若 } n-k+1 \leqslant 0 \\ 1 & \text{若 } n-k+1 > 0\end{cases}$.

10. $\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]} (-1)^k \binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k} = 2^p$.

11. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \binom{p+qk}{n}\binom{n}{k} = q^n$.

12. $\sum_{k=0}^{M} (-1)^{k+m} \binom{n}{k}\binom{n}{2m-k} = \binom{n}{m}$，其中 $M = \min\{2m, n\}$.

13. $\sum_{k=r}^{s}(-)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{s}{k}=\begin{cases}1 & 当 s=r 时\\ 0 & 当 s\neq r 时\end{cases}.$

14. $\sum_{s=0}^{2k}(-1)^{s}\binom{p+2k-s}{p}\binom{p+s}{p}=\binom{p+k}{k}.$

15. $\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{s-kt}{r}=t^{r}.$

16. $\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}=\binom{n-1}{m-1},n\geqslant m.$

17. $\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+k-1}{k}.$

18. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{n+si}{si}=(-s)^{n}.$

19. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{m+i}{i}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{m}{m-n} & 若 m\geqslant n\\ 0 & 若 m<n\end{cases}.$

20. $\sum_{i=0}^{n}i^{2}\binom{n}{i}^{2}=n^{2}\binom{2(n-1)}{n-1}.$

21. $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{p}{k}=\begin{cases}\binom{n-p}{m} & 若 n-p\geqslant m\\ 0 & 若 n-p<m\end{cases}.$

22. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m}\binom{m}{k}\binom{n+p+k}{p+k}=\begin{cases}\binom{n+p}{m+p} & 若 n\geqslant m\\ 0 & 若 n<m\end{cases}.$

23. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{m}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{n}{m-n} & 若 m\geqslant n\\ 0 & 若 m<n\end{cases}.$

24. $\sum_{k=0}^{n-m}(-2)^{-k}\binom{n}{m+k}\binom{n+m+k}{k}=\begin{cases}(-1)^{p}2^{-2p}\binom{n}{p} & 当 n\equiv m(\bmod 2) 时\ 其中 n-m=2p\\ 0 & 当 n\neq m(\bmod 2) 时\end{cases}$

25. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\binom{2n+k}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-k}=(-1)^{n}\binom{2n}{n}.$

26. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^{n}$.

27. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{m}\binom{k}{m+p}=\begin{cases}\binom{n+1}{2m+p+1} & 若\ n>2m+p-1\\ 0 \quad 若\ n\leqslant 2m+p-1\end{cases}$

28. $\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}(-1)^{k}\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k}=2^{p}$.

29. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}2^{-k}\binom{2n}{k}\binom{2k}{k}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

30. $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k}2^{-k}\binom{2n+1}{k}\binom{2k}{k}=0$.

31. $\sum_{k=0}^{n}2^{k}\binom{2n-k}{n}=2^{2n}$.

32. $\sum_{k=0}^{m}4^{k}\binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k}=\binom{2n}{2m}$,当 $n\geqslant m$ 时.

33. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}=(-1)^{n}$.

34. $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2i}{i}\binom{2k-2i}{k-i-1}=2^{2k}-\binom{2k+1}{k}$.

35. $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{n}{i+1}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}} & 若\ n\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)\\ 0 \quad 若\ n\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\end{cases}$.

36. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{m+i-1}{p}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{m-1}{p-n} & 若\ p\geqslant n\\ 0 \quad 若\ p<n\end{cases}$.

37. $\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+k-1}{k}$.

38. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k}}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x(n+1)}$.

39. $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^{2}\binom{n+k}{2p}=\binom{n}{p}^{2}$.

40. $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r}{r}\binom{2n-i-r}{n-r}=\binom{2n+1}{n}$.

41. $\sum_{k=0}^{n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}=\binom{r}{m}\binom{s}{n}$.

42. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\binom{k}{q}=\begin{cases}\binom{n}{q}\binom{q}{n-p} & \text{若 } p+q-n\geqslant 0\\ 0 & \text{若 } p+q<n\end{cases}$.

43. $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i}\binom{2m}{i}\binom{3m-2i}{2m}=2^{2m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$.

44. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{j}=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\leqslant j<n\\ n! & \text{若 } j=n\end{cases}$.

45. $\sum_{\lambda=0}^{r}\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{r-\lambda}\binom{n-r}{r-\lambda}=\binom{n}{r}^{2}$,当 $2r\leqslant n$ 时.

46. $\sum_{s=0}^{n}2^{s}\binom{2n-s}{n}=2^{2n}$.

47. $\sum_{n=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\frac{r^{n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n}\frac{n!}{n+1}$.

48. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{k+i}{m}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{k}{m-n} & \text{若 } m\geqslant n\\ 0 & \text{若 } m<n\end{cases}$.

49. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{m+n+i}3^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n+2i}{m-n+i}=\begin{cases}(-1)^{k}\binom{n}{k} & \text{当 } m=3k \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m\neq 0 \pmod 3 \text{ 时}\end{cases}$.

50. $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\binom{n}{j}}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

51. $\sum_{2k\geqslant j}^{2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\binom{2k}{j}=\binom{n}{j}2^{n-j-1}$.

52. $\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}=np$,其中 $p+q=1$.

53. $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}=\frac{1}{p(n+1)}$,其中 $p+q=1$.

54. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i}p^iq^{n-i} = npq + (np)^2$,其中 $p + q = 1$.

55. $\sum\limits_{n\geqslant 2i}\binom{n-i}{i}(-pq)^i = \dfrac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}$,其中 $p,q \geqslant 0, p + q = 1, p \neq \dfrac{1}{2}$.

56. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-np)^2p^kq^{n-k} = npq$.

57. $\sum\limits_{s=0}^{n-k}\sum\limits_{r=0}^{n-k-s}\binom{n-k}{s}\binom{n-k-s}{r} = 3^{n-k}$.

58. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}$.

59. $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1}$,当 $n \geqslant s$ 时.

60. $\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r-k}{m}\binom{s}{k-t} = (-1)^t\binom{r-t-s}{r-t-m}$.

61. $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\binom{p+i}{m+n} = \binom{p}{m+n-k}\binom{p+k-n}{k}$.

1.1 若干基本组合恒等式的推广

为了计算后面引入的组合和公式,从组合恒等式(问题 62) 开始,我们利用基本的多项式恒等式(9) 的某些推广,伽玛函数与贝塔函数,以及这些函数之间熟知的关系式

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = n}\frac{n!}{t_1!\,t_2!\cdots t_m!}x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_m^{t_m}$$

当 $\mathrm{Re}\,x > 1$ 时

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-z}z^{x-1}\mathrm{d}z$$

当 $\mathrm{Re}\,x > 0, \mathrm{Re}\,y > 0$ 时

$$\mathrm{B}(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

例 4 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{x+k}=\frac{1}{x\binom{n+x}{x}}$$

当 $x>0$ 时.

证 因为当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x+k}=\int_0^1 t^{x+k-1}\mathrm{d}t$，所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 t^{x+k-1}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}t^k\right\}\mathrm{d}t=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\mathrm{d}t$$

由式(17)得

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^n\mathrm{d}t=B(x,n+1)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}=\frac{1}{x\frac{(x+n)!}{(x)!n!}}=\frac{1}{x\binom{n+x}{x}}$$

例 5 计算和式

$$S=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)\cdots(m+p)} \tag{18}$$

解 经过简单的变换可得

$$S=\frac{1}{p!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(m-1)!p!}{(m+p)!}=\frac{1}{p!}\sum_{m=n}^{\infty}\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p!}\int_0^1(1-x)^p\left\{\sum_{m=n}^{\infty}x^{m-1}\right\}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{p!}\int_0^1(1-x)^p\frac{x^{n-1}}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{p!}\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{n-1}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{p!}B(n,p)=\frac{1}{p!}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}=$$

$$\frac{1}{p!}\cdot\frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!}=$$

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+p-1)}=$$