奥赛经典

专题研究系列

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所 组编

奥林匹克数学中的几何问题

◇沈文选 张垚 冷岗松／编著

湖南师范大学出版社

奥赛经典

专题研究系列

奥林匹克数学中的几何问题

湖南省数学会
湖南师范大学数学奥林匹克研究所
组编

◇沈文选 张垚 冷岗松/编著

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥林匹克数学中的几何问题 / 沈文选,张垚,冷岗松编著 .—长沙:湖南师范大学出版社,2004.6
(奥赛经典丛书 . 专题研究系列)
ISBN 7—81081—434—6

Ⅰ. 奥 ... Ⅱ. ①沈 ...②张 ...③冷 ... Ⅲ. 几何课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 043125 号

奥林匹克数学中的几何问题

沈文选 张 垚 冷岗松 编著

◇丛书策划:周玉波 陈宏平 廖建军 廖小刚
◇组 稿:廖小刚
◇责任编辑:廖小刚 陈 琳
◇责任校对:蒋旭东
◇出版发行:湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山 邮编/410081
电话/0731.8853867 8872751 传真/0731.8872636
◇经销:湖南省新华书店
◇印刷:国防科技大学印刷厂

◇开本:730×960 1/16 开
◇印张:28
◇字数:560 千字
◇版次:2004 年 7 月第 1 版 2004 年 7 月第 1 次印刷
◇印数:1—5000 册
◇书号:ISBN 7-81081-434-6/G·284
◇定价:29.00 元

湖南中学生在国际数学奥林匹克中的获奖情况

届次	获奖情况
第 28 届 (1987)	刘　雄（湖南湘阴一中）金牌
第 32 届 (1991)	郭早阳（湖南师大附中）银牌
第 34 届 (1993)	刘　炀（湖南师大附中）金牌
第 35 届 (1994)	彭建波（湖南师大附中）金牌
第 39 届 (1998)	艾颖华（湖南师大附中）进国家队，该届国家队未参赛
第 40 届 (1999)	孔文彬（湖南师大附中）银牌
第 41 届 (2000)	刘志鹏（长沙市一中）金牌
第 42 届 (2001)	张志强（长沙市一中）金牌 余　君（湖南师大附中）金牌
第 43 届 (2002)	肖　维（湖南师大附中）金牌
第 44 届 (2003)	王　伟（湖南师大附中）金牌 向　振（长沙市一中）金牌
第 45 届 (2004)	李先颖（湖南师大附中）进国家队，2004 年 7 月参赛

前　言

数学奥林匹克是起步最早、规模最大、类型多种、层次较多的一项学科竞赛活动．多年来的实践表明:这项活动可以激发青少年学习数学的兴趣,焕发青少年的学习热情,吸引他们去读一些数学小册子,促使他们寻找机会去听一些名师的讲座;这项活动可以使参与者眼界大开,跳出一个班、一个学校或一个地区的小圈子,去与其他“高手”互相琢磨,激励并培养他们喜爱有挑战性数学问题的素养与精神;这项活动可以使参与者求知欲望大增,使得他们的阅读能力、理解能力、交流能力、表达能力等诸能力与日俱进．这是一种有深刻内涵的文化现象,因此,越来越多的国家或地区除组织本国或本地区的各级各类数学奥林匹克外,还积极地参与到国际数学奥林匹克中．

我国自1986年参加国际数学奥林匹克以来,所取得成绩举世公认,十多年来一直保持世界领先的水平．其中,到2003年止,湖南的学生已取得9块金牌、2块银牌的好成绩,2004年又有一位国家队队员．这优异的成绩,是中华民族精神的体现,是国人潜质的反映,是民族强盛的希望．为使我国数学奥林匹克事业可持续发展,一方面要继续吸引越来越多的青少年参与,吸引一部分数学工作者扎实地投入到这项活动中来,另一方面要深入研究奥林匹克数学的理论体系,要深入研究数学奥林匹克教育理论与教学方略,研究数学奥林匹克教育与中学数学教育的内在联系．为此,在中国数学奥林匹克委员会领导的大力支持与热情指导下,湖南师范大学成立了“数学奥林匹克研究所”．研究所组建近一年来,我们几位教授都积极投身到研究所的工作中,除深入进行奥林匹克数学与数学奥林匹克教育理论研究外,还将我们多年积累的辅导讲座资料进行了全面、系统的整理,以专题讲座的形式编写成了这套专题研究丛书,分几何、代数、组合三卷．这些丰富、系统的专题知识不仅是创新地解竞赛题所不可或缺的材料,而且还可直接激发解竞赛题的直觉或灵感．从教育心理学角度上说,只有具备了充分的专题知识与逻辑推理知识,才能有目的、有方向、有成效地进行探究性活动．

由于这套丛书篇幅较大,有些部分整理欠完善,敬请专家、同行和读者不吝指正．

编　者

2004年3月

目　录

第一篇 平面几何问题

第一章 梅涅劳斯定理及应用

【基础知识】

梅涅劳斯定理 设 A',B',C' 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点,若 A',B',C' 三点共线,则 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$. ①

证明 如图 1-1,过 A 作直线 $AD\parallel C'A'$ 交 BC 的延长线于 D,则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D}$,$\frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$,故

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1.$$

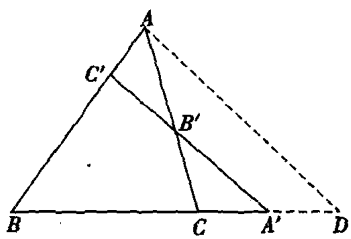

图 1-1

注 此定理的证明还有如下正弦定理证法及面积证法.

正弦定理证法 设 $BC'A'=\alpha$,$\angle CB'A'=\beta$,$\angle B'A'B=\gamma$,在 $\triangle BA'C'$ 中,有 $\frac{BA'}{C'B}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$,同理,$\frac{CB'}{CA'}=\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$,$\frac{AC'}{AB'}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$,此三式相乘即证.

面积证法 由 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle A'C'B}}{S_{\triangle A'C'C}}$,$\frac{CB'}{B'A}=\frac{S_{\triangle CB'C'}}{S_{\triangle B'AC'}}=\frac{S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle CB'C'}+S_{\triangle CA'B'}}{S_{\triangle B'AC'}+S_{\triangle A'AB'}}=\frac{S_{\triangle C'CA'}}{S_{\triangle AC'A'}}$,$\frac{AC'}{C'B}=\frac{S_{\triangle AC'A'}}{S_{\triangle C'BA'}}$,此三式相乘即证.

梅涅劳斯定理的逆定理　设 A',B',C' 分别是△ABC 的三边 BC,CA,AB 或其延长线上的点,若

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1, \qquad ②$$

则 A',B',C' 三点共线.

证明　设直线 $A'B'$ 交 AB 于 C_1,则由梅涅劳斯定理,得到 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1A}=1$.

由题设,有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$,即有 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$.

又由合比定理,知 $\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$,故有 $AC_1=AC'$,从而 C_1 与 C' 重合,即 A',B',C' 三点共线.

有时,也把上述两个定理合写为:设 A',B',C' 分别是△ABC 的三边 BC,CA,AB 所在直线(包括三边的延长线)上的点,则 A',B',C' 三点共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1.$$

角元形式的梅涅劳斯定理　设 A',B',C' 分别是△ABC 的三边 BC,CA,AB 所在直线(包括三边的延长线)上的点,则 A',B',C' 共线的充分必要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \qquad ③$$

证明　如图 1-2,可得

$$\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AA'\cdot\sin\angle BAA'}{\frac{1}{2}AA'\cdot AC\cdot\sin\angle A'AC}$$

$$=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}.$$

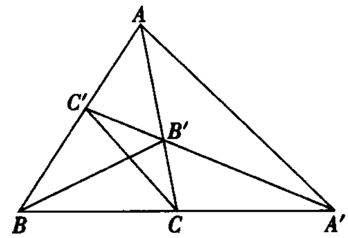

图 1-2

同理,$\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$,$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘,运用梅涅劳斯定理及其逆定理,知结论成立.

注　在上述各定理中,若采用有向线段或有向角,则①,②,③式中的右端均为 -1,③式中的角也可以按①或②式中的对应线段记忆.

【典型例题与基本方法】

1. 恰当地选择三角形及其截线(或作出截线),是应用梅涅劳斯定理的关键

例 1　如图 1-3,在四边形 $ABCD$ 中,△ABD,△BCD,△ABC 的面积比是 3:4:1,点

M,N 分别在 AC,CD 上,满足 $AM:AC=CN:CD$,并且 B,M,N 共线.求证:M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

(1983 年全国高中联赛题)

证明 设 $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CD}=r(0<r<1)$,$AC$ 交 BD 于 E.

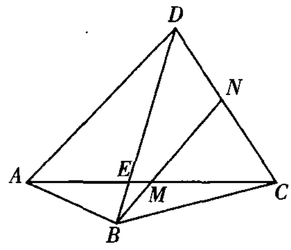

图 1-3

$\because$ $S_{\triangle ABD}:S_{\triangle BCD}:S_{\triangle ABC}=3:4:1$,

$\therefore$ $\frac{BE}{BD}=\frac{1}{7},\frac{AE}{AC}=\frac{3}{7}$.

$$\frac{EM}{MC}=\frac{AM-AE}{AC-AM}=\frac{\frac{AM}{AC}-\frac{AE}{AC}}{1-\frac{AM}{AC}}=\frac{r-\frac{3}{7}}{1-r}=\frac{7r-3}{7-7r}.$$

又因 B,M,N 三点共线,可视 BMN 为 $\triangle CDE$ 的截线,故由梅涅劳斯定理,得

$$\frac{CN}{ND}\cdot\frac{DB}{BE}\cdot\frac{EM}{MC}=1,\text{即}\frac{r}{1-r}\cdot\frac{7}{1}\cdot\frac{7r-3}{7-7r}=1.$$

化简整理,得 $6r^2-r-1=0$,

解得 $r=\frac{1}{2},r=-\frac{1}{3}$(舍去).

故 M 与 N 分别是 AC 和 CD 的中点.

例 2 如图 1-4,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分 $\angle BAD$,在 CD 上取一点 E,BE 与 AC 相交于 F,延长 DF 交 BC 于 G.求证:$\angle GAC=\angle EAC$.

(1999 年全国高中联赛题)

证明 记 $\angle BAC=\angle CAD=\theta,\angle GAC=\alpha,\angle EAC=\beta$,直线 GFD 与 $\triangle BCE$ 相截,由梅涅劳斯定理,有

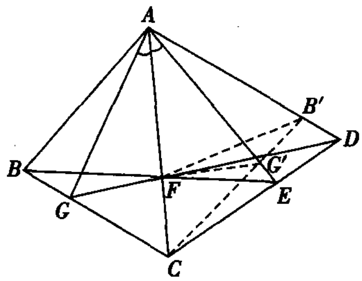

图 1-4

$$1=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle AED}}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABF}}$$

$$=\frac{AB\cdot\sin(\theta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AC\cdot\sin\theta}{AE\cdot\sin(\theta-\beta)}\cdot\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}.$$

$\therefore$ $\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta=\sin(\theta-\beta)\cdot\sin\alpha$.

即 $\sin\theta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta-\cos\theta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=\sin\theta\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha-\cos\theta\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$,

亦即 $\sin\theta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin\theta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\beta\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=k\pi$,且 k 只可能为 0,故 $\angle GAC=\angle EAC$.

2. 梅涅劳斯定理的逆用(逆定理的应用)与迭用,是灵活应用梅氏定理的一种方法

例 2 另证 如图 1-4,设 B,G 关于 AC 的对称点分别为 B',G',易知 A,D,B' 三点共线,连 FB',FG',只须证明 A,E,G' 三点共线.

设$\angle EFB'=\alpha$，$\angle DFE=\angle BFG=\angle B'FG'=\beta$，$\angle AFD=\angle GFC=\angle G'FC=\gamma$，则
$$\frac{DA}{AB'}\cdot\frac{B'G'}{G'C}\cdot\frac{CE}{ED}=\frac{S_{\triangle FDA}}{S_{\triangle FB'A}}\cdot\frac{S_{\triangle FG'B'}}{S_{\triangle FG'C}}\cdot\frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle FED}}=\frac{FD\cdot\sin\gamma}{FB'\cdot\sin(\beta+\gamma-\alpha)^{*}}\cdot\frac{FB'\cdot\sin\beta}{FC\cdot\sin\gamma}\cdot\frac{FC\cdot\sin(\beta+\gamma-\alpha)}{FD\cdot\sin\beta}=1.$$

对$\triangle CB'D$，应用梅涅劳斯定理的逆定理，知A,E,G'三点共线．故$\angle GAC=\angle EAC$．

注 在图1－4中，*式也可为$\sin(180°-\beta-\gamma)$，若B'在AD的延长线上，则*式为$\sin(\beta+\gamma+\alpha)$．

例3 如图1－5，$\odot O_1$与$\odot O_2$和$\triangle ABC$的三边所在的3条直线都相切，E,F,G,H为切点，直线EG与FH交于点P．求证：$PA\perp BC$． （1996年全国高中联赛题）

证法1 过A作$AD\perp BC$于D，延长DA交直线HF于点P'．对$\triangle ABD$及截线FHP'应用梅涅劳斯定理，有

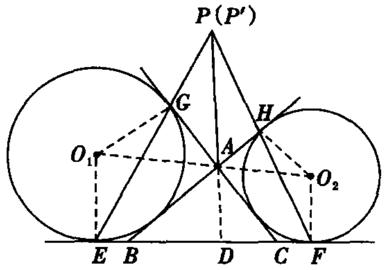

图1－5

$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1.$$

由$BF=BH$，有$\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1$．

显然O_1,A,O_2三点共线，连O_1E,O_1G,O_2F,O_2H，则由$O_1E/\!/AD/\!/O_2F$，有$\triangle AGO_1\backsim\triangle AHO_2$，从而
$$\frac{DE}{DF}=\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{AG}{AH},\text{即}\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}.$$

又$CE=CG$，则$1=\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{ED}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}$．

对$\triangle ADC$，应用梅涅劳斯定理的逆定理，知P',G,E三点共线，即P'为直线EG与FH的交点．故点P'与点P重合，从而$PA\perp BC$．

证法2 延长PA交BC于D，直线PHF与$\triangle ABD$的三边延长线都相交，直线PGE与$\triangle ADC$的三边延长线都相交，分别应用（迭用）梅涅劳斯定理，有
$$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP}{PA}=1,\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}=1.$$

上述两式相除，则有$\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}=\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}$．

而$HB=BF,CE=GC$，于是$\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}$，即$\frac{AG}{AH}=\frac{DE}{DF}$．

连$O_1G,O_1E,O_1A,O_2A,O_2H,O_2F$，而$O_1,A,O_2$共线，则$OG\perp GC,O_2H\perp BH$，且$\triangle O_1AG\backsim\triangle O_2AH$，从而$\frac{O_1A}{O_2A}=\frac{AG}{AH}=\frac{DE}{DF}$，于是$AD/\!/O_1E$．故$AD\perp EF$，即$PA\perp BC$．

【解题思维策略分析】

梅涅劳斯定理是三角形几何学中的一颗明珠，它蕴含着深刻的数学美，因而它在求解某些平面几何问题，特别是某些平面几何竞赛题中有着重要的应用．

1．寻求线段倍分的一座桥梁

例 4 已知$\triangle ABC$的重心为G，M是BC边的中点，过G作BC边的平行线交AB边于X，交AC边于Y，且XC与GB交于点Q，YB与GC交于点P．证明：$\triangle MPQ \backsim \triangle ABC$．

（1991 年第 3 届亚太地区竞赛题）

证明 如图 1－6，延长BG交AC于N，则N为AC的中点．

由$XY /\!/ BC$，知$\frac{AX}{XB}=\frac{AG}{GM}=2$，而$\frac{NC}{CA}=\frac{1}{2}$．

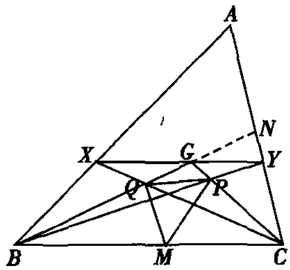

图 1－6

对$\triangle ABN$及截线XQC，应用梅涅劳斯定理，有

$\frac{AX}{XB}\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{NC}{CA}=2\cdot\frac{BQ}{QN}\cdot\frac{1}{2}=1$，故$BQ=QN$．

从而$MQ /\!/ AC$，且$MQ=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{4}AC$．

同理，$MP /\!/ AB$，且$MP=\frac{1}{4}AB$．

由此可知，$\angle PMQ$与$\angle BAC$的两边分别平行且方向相反，从而$\angle PMQ=\angle BAC$，且$\frac{MP}{AB}=\frac{MQ}{AC}$，故$\triangle MPQ \backsim \triangle ABC$．

例 5 $\triangle ABC$是一个等腰三角形，$AB=AC$，M是BC的中点；O是AM的延长线上的一点，使得$OB\perp AB$；Q是线段BC上不同于B和C的任意一点，E在直线AB上，F在直线AC上，使得E，Q，F是不同的和共线的．求证：

（Ⅰ）若$OQ\perp EF$，则$QE=QF$；

（Ⅱ）若$QE=QF$，则$OQ\perp EF$．（1994 年第 35 届 IMO 试题）

证明 （Ⅰ）如图 1－7，连OE，OF，DC．由$OQ\perp EF$，易证O，E，B，Q四点共圆，O，C，F，Q四点共圆．则 $\angle OEQ=\angle OBQ=\angle OCQ=\angle OFQ$，因此$OE=OF$．故$QE=QF$．

（Ⅱ）由$AB=AC$，$EQ=QF$，对$\triangle AEF$及截线BQC运用梅涅劳斯定理，有$1=\frac{AB}{BE}\cdot\frac{EQ}{QF}\cdot\frac{FC}{CA}=\frac{FC}{BE}$，即$BE=CF$．于是可证$\mathrm{Rt}\triangle OBE\cong\mathrm{Rt}\triangle OCF$，得$OE=OF$，故$OQ\perp EF$．

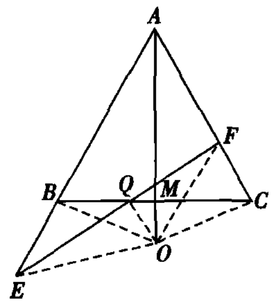

图 1－7

例 6 在凸四边形$ABCD$的边AB和BC上取点E和F，使线

段 DE 和 DF 把对角线 AC 三等分，已知 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$，求证：$ABCD$ 是平行四边形.

（1990 年第 16 届全俄竞赛题）

证明 如图 1－8，设 DE，DF 分别交 AC 于 P，Q，两对角线交于 M. 要证 $ABCD$ 是平行四边形，若证得 $AM=MC$（或 $PM=MQ$），且 $BM=MD$ 即可.

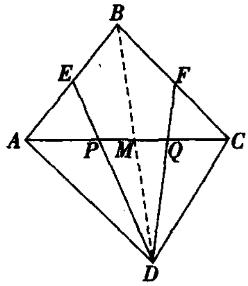

图 1－8

由 $S_{\triangle ADE}=S_{\triangle CDF}$，$S_{\triangle ADP}=S_{\triangle CDQ}$（等底等高），知 $S_{\triangle AEP}=S_{\triangle CFQ}$，而 $AP=CQ$，故有 $EF /\!/ AC$，从而有 $\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$.

对△BAM 及截线 EPD，△BCM 及截线 FQD，分别应用梅涅劳斯定理，有

$$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MD}{DB}=1, \quad ①$$

$$\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CQ}{QM}\cdot\frac{MD}{DB}=1. \quad ②$$

由①，②两式相除得 $\frac{AP}{PM}=\frac{CQ}{QM}$.

而 $AP=CQ$，故 $PM=MQ$，即有 $AM=MC$.

此时，又有 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

又由 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{ABCD}$，知 $BE=EA$，于是①式可写为 $\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AP}{PM}\cdot\frac{MD}{DB}=\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{MD}{DB}=1$，即有 $DB=2MD$，亦即 $BM=MD$.

故 $ABCD$ 为平行四边形.

2. 导出线段比例式的重要途径

例 7 在△ABC 中，AA_1 为 BC 边上的中线，AA_2 为∠BAC 的平分线，且交 BC 于 A_2，K 为 AA_1 上的点，使 $KA_2 /\!/ AC$. 证明 $AA_2\perp KC$.

（1997 年第 58 届莫斯科竞赛题）

证明 如图 1－9，延长 CK 交 AB 于 D，只须证 $AD=AC$.

由 AA_2 平分∠BAC，有 $\frac{AB}{AC}=\frac{BA_2}{A_2C}$. ①

由 $KA_2 /\!/ AC$，有 $\frac{A_1K}{KA}=\frac{A_1A_2}{A_2C}$.

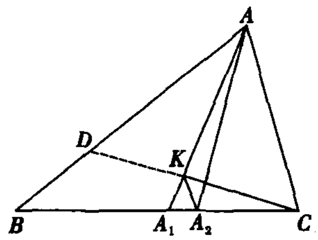

图 1－9

注意到 $BC=2A_1C$，对△ABA_1 及截线 DKC 运用梅涅劳斯定理，得

$$1=\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BC}{CA_1}\cdot\frac{A_1K}{KA}=\frac{AD}{DB}\cdot2\cdot\frac{A_1A_2}{A_2C}.$$故$\frac{BD}{DA}=\frac{2A_1A_2}{A_2C}$,由合比定理,有

$$\frac{BD+DA}{DA}=\frac{2A_1A_2+A_2C}{A_2C}=\frac{A_1A_2+A_1C}{A_2C}=\frac{A_1A_2+BA_1}{A_2C},\text{即为}\quad\frac{AB}{AD}=\frac{BA_2}{A_2C}. \qquad ②$$

由①,②式有$\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AD}$,故 $AC=AD$.

例 8 四边形 $ABCD$ 的内切圆分别切 AB,BC,CD,DA 于点 E,F,G,H.求证:HE,DB,GF 三线共点.

证明 如图 1-10,设 HE 交 DB 的延长线于 P,对$\triangle BAD$ 及截线 HEP,运用梅涅劳斯定理,有

$$\frac{BP}{PD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AE}{EB}=1. \qquad ①$$

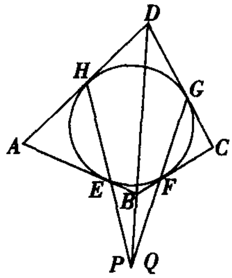

图 1-10

设 GF 交 DB 的延长线于 Q,对$\triangle BCD$ 及截线 QFG 运用梅涅劳斯定理,得

$$\frac{DQ}{QB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}=1. \qquad ②$$

又由切线长定理,知 $HA=AE,EB=BF,FC=CG,GD=DH$,

再由①,②两式相乘,化简得$\frac{DP}{PB}=\frac{DQ}{DB}$.

运用合比定理有$\frac{DP+PB}{PB}=\frac{DQ+QB}{QB}$,即$\frac{DB}{PB}=\frac{DB}{QB}$.

故 $PB=QB$,即 P,Q 重合,亦即 HB,DB,GF 三线共点.

例 9 给定锐角$\triangle ABC$,在 BC 边上取点A_1,A_2(A_2 位于 A_1 与 C 之间),在 CA 边上取点 B_1,B_2(B_2 位于 B_1 与 A 之间),在 AB 边上取点C_1,C_2(C_2 位于 C_1 与 B 之间),使得$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1$,直线 AA_1,BB_1 与 CC_1 可构成一个三角形,直线 AA_2,BB_2 与 CC_2 可构成另一个三角形.证明:这两个三角形的六个顶点共圆. (1995 年第 36 届 IMO 预选题)

证明 如图 1-11,设题中所述两个三角形分别为$\triangle UVW$ 与$\triangle XYZ$.

由已知条件,有$\triangle AC_1C\backsim\triangle AB_2B$,$\triangle BA_2A\backsim\triangle BC_1C$,$\triangle CB_2B\backsim\triangle CA_1A$,得

$$\frac{AC_1}{AB_2}=\frac{AC}{AB},\frac{BA_2}{BC_1}=\frac{AB}{BC},\frac{CB_2}{CA_1}=\frac{BC}{AC},\text{此三式相乘得}\frac{AC_1}{AB_2}\cdot\frac{BA_2}{BC_1}\cdot\frac{CB_2}{CA_1}=1. \qquad ①$$

对$\triangle AA_1B$ 及截线 CUC_1,$\triangle AA_2C$ 及截线 BXB_2,分别应用梅涅劳斯定理,得

$$\frac{AU}{UA_1}\cdot\frac{A_1C}{CB}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1,\quad ②\qquad \frac{A_2X}{XA}\cdot\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CB}{BA_2}=1,\quad ③$$

①,②,③三式相乘化简,得$\frac{AU}{UA_1}=\frac{AX}{XA_2}$.故 $UX/\!/BC$.

同理, $WX/\!/CA$. 故$\angle AUX=\angle AA_1A_2=\angle BB_1B_2=\angle BWX$.

从而点 X 在$\triangle UVW$ 的外接圆上.

同理,可证得 Y,Z 也在$\triangle UVW$ 的外接圆上.证毕.

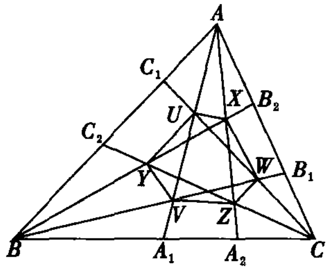

图 1-11

例 10 如图 1-12,以$\triangle ABC$ 的底边BC 为直径作半圆,分别与边 AB,AC 交于点D 和E,分别过点 D,E 作 BC 的垂线,垂足依次为 F,G,线段 DG 和EF 交于点M.求证:$AM\perp BC$.

(IMO-37 中国国家队选拔赛题)

证法 1 设直线 AM 与 BC 交于 H,连 BE, CD,则知$\angle BEC=\angle BDC=90°$,直线 FME 与$\triangle AHC$ 相截,直线 GMD 与$\triangle ABH$ 相截,选用梅涅劳斯定理,有

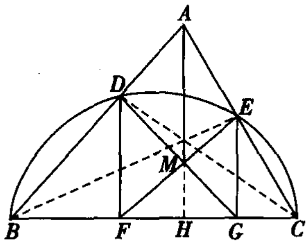

图 1-12

$$\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\frac{AM}{MH}\cdot\frac{HG}{GB}\cdot\frac{BD}{DA}=1.$$

两式相除,得 $\frac{FH}{HG}=\frac{CF\cdot AE\cdot BD}{CE\cdot BG\cdot AD}$. ①

在 $Rt\triangle DBC$ 与 $Rt\triangle EBC$ 中,有

$CD^2=BC\cdot FC,BE^2=BC\cdot BG$,即$\frac{CF}{BG}=\frac{CD^2}{BE^2}$.将其代入①式,得

$$\frac{FH}{HG}=\frac{CD^2\cdot AE\cdot BD}{BE^2\cdot CE\cdot AD}. \quad ②$$

又由$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,有 $\frac{CD}{BE}=\frac{AD}{AE}$.

将其代入②式,得 $\frac{FH}{HG}=\frac{CD\cdot BD}{BE\cdot CE}=\frac{S_{\triangle DBC}}{S_{\triangle EBC}}=\frac{DF}{EG}=\frac{DM}{MG}$,从而,$MH/\!/DF$.

而 $DF\perp BE$,则 $MH\perp BC$,故 $AM\perp BC$.

证法 2 作高 AH,连 BE, CD,则$\angle BDC=90°=\angle BEC$,于是,$DF=BD\cdot\sin\angle B=BC\cdot\cos\angle B\cdot\sin\angle B$, $EG=BC\cdot\cos\angle C\cdot\sin\angle C$.

$$\therefore\ \frac{GM}{MD}=\frac{EG}{FD}=\frac{\cos\angle C\cdot\sin\angle C}{\cos\angle B\cdot\sin\angle B}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\cos\angle C}{\cos\angle B}.$$

又 $BH=AB\cdot\cos\angle B,HG=AE\cdot\cos\angle C$,

$$\therefore\ \frac{BH}{HG}=\frac{AB\cdot\cos\angle B}{AE\cdot\cos\angle C}=\frac{AC\cdot\cos\angle B}{AD\cdot\cos\angle C},\text{即}\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}=\frac{AB}{AD},\text{故}\frac{BH}{HG}\cdot\frac{GM}{MD}\cdot\frac{DA}{AB}=1.$$

对$\triangle BGD$ 应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 H,M,A 三点共线.由 $AH\perp BC$,知

$AM \perp BC$.

例 11 如图 1－13,设点 I,H 分别为锐角$\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 B_1,C_1 分别为边 AC,AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2, B_2C_2 与 BC 相交于 K, A_1 为$\triangle BHC$ 的外心.试证:A,I,A_1 三点共线的充分必要条件是$\triangle BKB_2$ 和$\triangle CKC_2$ 的面积相等. (CMO－2003 试题)

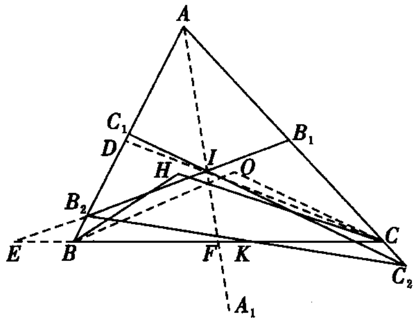

图 1－13

分析 首先证 A,I,A_1 三点共线$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

设 O 为$\triangle ABC$ 的外心,连 BO,CO,则$\angle BOC=2\angle BAC$.又$\angle BHC=180°-\angle BAC$,因此,$\angle BAC=60°$

$\Leftrightarrow B,H,O,C$ 四点共圆

$\Leftrightarrow A_1$ 在$\triangle ABC$ 的外接圆$\odot O$ 上

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合$\Leftrightarrow A,I,A_1$ 三点共线.

其次,再证 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.并在三角函数式中,用 A、B、C 分别表示三内角.

证法 1 设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R, CI 的延长线交 AB 于 D,对$\triangle ACD$ 及截线 C_1IC_2,应用梅涅劳斯定理,有
$$\frac{AC_1}{C_1D}\cdot\frac{DI}{IC}\cdot\frac{CC_2}{C_2A}=1. \quad ①$$

注意到
$$C_1D=AD-AC_1=\frac{AC\cdot AB}{AC+BC}-\frac{AB}{2}$$
$$=\frac{AB(AC-BC)}{2(AC+BC)}=\frac{\sin C(\sin B-\sin A)\cdot R}{\sin B+\sin A}=\frac{2\sin^2\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}\cdot R}{\cos\frac{A-B}{2}},$$

$$\therefore\quad \frac{C_1D}{AC_1}=\frac{\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}}.$$

而 $\dfrac{IC}{DI}=\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{\sin\angle ADC}{\sin\angle ACD}=\dfrac{\sin\left(\frac{C}{2}+B\right)}{\sin\frac{C}{2}}=\dfrac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$,由①式,有$\dfrac{CC_2}{C_2A}=\dfrac{IC}{DI}\cdot\dfrac{C_1D}{AC_1}=\dfrac{\sin\frac{B-A}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$.从而
$$\frac{AC}{AC_2}=\frac{AC_2-CC_2}{C_2A}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}. \quad ②$$

又对$\triangle ACD$ 及截线 B_1IB_2,应用梅涅劳斯定理,有$\dfrac{AB_2}{B_2D}\cdot\dfrac{DI}{IC}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

注意到 $CB_1=B_1A$，有 $\frac{B_2D}{AB_2}=\frac{DI}{IC}=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，$\frac{AD}{AB_2}=\frac{AB_2-B_2D}{AB_2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$，即 $AB_2=AD\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{AC}{AC+BC}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{\sin B}{\sin B+\sin A}\cdot\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}}=AB\cdot\frac{\cos\frac{B}{2}}{2\cos\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}}$. 从而 $\frac{AB}{AB_2}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}}$.　③

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$，注意②，③$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{A}{2}=1$，且 A 为锐角 $\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 2　如图 1－13，设直线 AI 交 BC 于 F，直线 B_1B_2 交 CB 的延长线于 E. 对 $\triangle ACF$ 及截线 B_1IE，应用梅涅劳斯定理，有 $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CE}{EF}\cdot\frac{FI}{IA}=1$.　④

又由 $AB_1=B_1C$ 及角平分线性质，即有 $\frac{FI}{IA}=\frac{CF}{CA}=\frac{BF}{BA}=\frac{BC}{AB+AC}$.

令 $BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，则 $\frac{FI}{IA}=\frac{a}{b+c}$.

由④式，有 $\frac{CE}{EF}=\frac{b+c}{a}$，即 $\frac{EF}{CF}=\frac{EF}{CE-EF}=\frac{a}{b+c-a}$.

而 $CF=\frac{ab}{b+c}$，则 $EF=\frac{a^2b}{(b+c-a)(b+c)}$.

又 $BF=\frac{ac}{b+c}$，$BE=EF-BF=\frac{a(a-c)}{b+c-a}$（由题设知 $a>c$）.

从而　$\frac{EF}{BE}=\frac{ab}{(b+c)(a-c)}$.　⑤

对 $\triangle ABF$ 及截线 IB_2E，应用梅涅劳斯定理，有 $\frac{AI}{IF}\cdot\frac{FE}{EB}\cdot\frac{BB_2}{B_2A}=1$.

将⑤式代入上式，得 $\frac{BB_2}{B_2A}=\frac{IF}{AI}\cdot\frac{BE}{EF}=\frac{a-c}{b}$，∴　$\frac{AB}{AB_2}=\frac{AB_2+B_2B}{AB_2}=\frac{a+b-c}{b}$.　⑥

同理　$\frac{AC}{AC_2}=\frac{a+c-b}{c}$.　⑦

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB\cdot AC}{AB_2\cdot AC_2}=1$，注意⑥，⑦$\Leftrightarrow\frac{a+b-c}{b}\cdot$