



各版本适用

立足中考大纲 探究知识内涵
解读竞赛真题 揭示思维规律
点击中考难题 登上名校殿堂



第6版

中考·竞赛对接辅导

初中
数学

2



主编 蔡 晔



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

中考·竞赛对接辅导

初中数学 2

第 6 版

主 编 蔡 晔

副主编 李 丽 丽

编 者 李 强 闫树茂 陈晓钟 杨鹏宇



机械工业出版社

本系列书以新课标人教版教材知识体系为主线,兼顾其他版本教材的知识体系。“考点对接”对初中阶段所应掌握的重点知识进行讲解归纳;“思维对接”、“竞赛对接”对与之内容相关的近几年各地具有代表性的中考真题、竞赛题进行归类整理和解析;“小试牛刀”针对以后中考的趋势和方向,设计用于学生自练自评的练习题。本书既可用于学生同步巩固复习与训练,也适用于中考的第一轮复习。

图书在版编目(CIP)数据

中考·竞赛对接辅导·初中数学 2/蔡晔主编. —6版. —北京:机械工业出版社,2011.4

ISBN 978-7-111-33799-7

I. ①中… II. ①蔡… III. ①中学数学课—初中—题解—升学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 045340 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:马文涛 马小涵 胡明 责任编辑:马文涛 李乐
责任印制:李妍

北京振兴源印务有限公司印刷

2011 年 4 月第 6 版·第 1 次印刷

148mm×210mm·9.5 印张·295 千字

标准书号:ISBN 978-7-111-33799-7

定价:17.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心:(010)88361066

门户网: <http://www.cmpbook.com>

销售一部:(010)68326294

教材网: <http://www.cmpedu.com>

销售二部:(010)88379649

读者购书热线:(010)88379203

封面无防伪标均为盗版

前 言

编写定位

编者精心编写的“中考·竞赛对接辅导”系列书立足教材、着眼中考、面向竞赛，融中考和竞赛于一体，期望为同学们提供最全面、最实用、最完备的中考常考知识点和竞赛解题方法。

本系列书内容的难度定位在中等偏上，以新课标、中考大纲中的重难点及竞赛中的常考知识拓展点为基础，结合近年来经典的中考难题和各类典型的竞赛题，介绍解较难题目的方法，培养解决问题的能力，并通过练习题及时巩固、引导创新。

编写特点

1. 导向性 本书全面反映了近几年中考和竞赛的题型，详细介绍了中考的所有知识点以及解题技巧，体现出学科内不同知识板块间的综合联系，侧重考查学生的能力、素质，从而将未来中考和竞赛的趋势全面展现出来。

2. 新颖性 本书所选的例题是精心筛选的近几年的中考题和国际、国内竞赛题，内容新、题型新。大多数例题虽具有一定难度，但难而不偏，具有代表性，且解题方法灵活。

本系列书自面世以来，得到了读者朋友的一致认可。本着与时俱进的原则和精益求精的态度，同时也为了答谢读者的厚爱，我们组织了一批有经验的专家和勇于创新的一线优秀青年教师，分析研究近年来全国各地、各类竞赛和中考的新变化，对原书内容进行了必要的修订和优化，期望能为同学们迎接升学考试和竞赛复习助一臂之力。

由于编写时间较紧，可能存在一些缺漏，敬请广大读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第一章 实数	1
第一节 平方根与立方根	1
第二节 实数的运算	6
第二章 整式的乘除与因式分解	16
第一节 整式的乘法与乘法公式	16
第二节 整式的除法	25
第三节 完全平方数	30
第四节 因式分解	37
第五节 因式分解的方法拓展	43
第六节 因式分解与代数式的恒等证明	53
第三章 分式	59
第一节 分式	59
第二节 分式的运算	65
第三节 有条件的分式的化简与求值	74
第四节 分式证明	81
第五节 分式方程、方程组及应用	87
第四章 一次函数与反比例函数	97
第一节 一次函数	97
第二节 反比例函数	109
第五章 全等三角形	123
第一节 全等三角形	123
第二节 角平分线的性质	135
第六章 轴对称	144
第一节 轴对称	144
第二节 等腰三角形	154

第七章 勾股定理	166
第一节 勾股定理及其逆定理	166
第二节 勾股定理的应用	177
第八章 四边形	187
第一节 平行四边形	187
第二节 特殊的平行四边形	195
第三节 梯形	209
第四节 重心 中位线	218
第九章 数据的分析	228
第一节 数据的代表	228
第二节 数据的波动	237
参考答案	246

第一节 平方根与立方根

[illegible]

1. 平方根

如果一个数的平方等于 a ,那么这个数就是 a 的平方根.正数 a 的平方根用 $\pm\sqrt{a}$ 表示,其中根指数2可以省略. $+\sqrt{a}$ 叫做 a 的算术平方根.

提点:(1)一个正数有两个平方根,它们互为相反数;

(2) 算术平方根 $\sqrt{a}$ 具有双重非负性: $a \geq 0, \sqrt{a} \geq 0$;

(3) 由于平方与开平方互为逆运算, 因此我们可以利用平方运算来求一个数的平方根, 也可以用平方运算来检验所求得的平方根是否正确.

2. 立方根

如果一个数的立方等于 a ,那么这个数叫做 a 的立方根.数 a 的立方根表示为 $\sqrt[3]{a}$,根指数3不能省略.

提点:(1)正数的立方根是正数,负数的立方根是负数,0 的立方根是 0.

(2)立方根的两个重要性质: $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$; $(\sqrt[3]{a})^3=a$.

3. 平方根与立方根的区别与联系

区别:(1)平方根_{的根指数 2 可以省略},而立方根_{的根指数 3 不能省略}.

(2)平方根只有非负数才有,而立方根任何数都有.

(3) 一个正数的平方根有两个, 一个数的立方根只有一个.

联系:(1)它们都与相应的乘方运算互为逆运算.(2)0 的平方根与立方根都是 0.



思维对接

考点 1 | 平方根

例 1 (2010 · 楚雄州) 在函数 $y = \sqrt{3-x}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 _____.

【分析】 x 的取值要满足式子有意义, 故 $3-x \geq 0, x \leq 3$.

【答案】 $x \leq 3$

例 2 若 $\sqrt{a}$ 的平方根是 ± 4 , 则 $a =$ _____.

【分析】 本题考查平方根的意义与表示. 因为 $\sqrt{a}$ 的平方根是 ± 4 , 所以 $\sqrt{a} = (\pm 4)^2 = 16, a = 16^2 = 256$.

【答案】 256

例 3 若 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数, 则 $(a+b) \times 2008 =$ _____.

【分析】 因为 $|a-b+1|$ 与 $\sqrt{a+2b+4}$ 互为相反数,

所以 $|a-b+1| + \sqrt{a+2b+4} = 0$.

又因为 $|a-b+1| \geq 0, \sqrt{a+2b+4} \geq 0$.

所以 $|a-b+1| = 0, \sqrt{a+2b+4} = 0$.

【解】
$$\begin{cases} a-b+1=0, \\ a+2b+4=0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} a=-2, \\ b=-1. \end{cases}$$

所以 $(a+b) \times 2008 = (-3) \times 2008 = -6024$.

【答案】 -6024

方法总结

此类题主要考查算术平方根、绝对值等的非负性, 只需令每项分别等于 0 即可.

例 4 计划用 100 块正方形地砖来铺设面积为 36 m^2 的客厅, 求所需要的正方形地砖的边长.

【分析】 利用正方形的面积公式及开平方即可解决.

【解】 设所需要的正方形地砖的边长为 $x \text{ m}$,

由题意得 $100x^2 = 36$, 所以 $x^2 = 0.36$, 所以 $x = 0.6$, 或 $x = -0.6$ (舍去).

答: 所需要的正方形地砖的边长为 0.6 m .

例⑤ 在物理学中, 电流做功的功率 $P=I^2R$, 试用含 P, R 的式子表示 I , 并求当 $P=25, R=4$ 时 I 的值.

【分析】 根据实际情况, 所求的 I 值是一个算术平方根, 不能取负值.

【解】 因为 $P=I^2R$, 所以 $I^2=\frac{P}{R}$, 所以 $I=\sqrt{\frac{P}{R}}$.

当 $P=25, R=4$ 时, $I=\sqrt{\frac{P}{R}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$.

考点 2 立方根

例⑥ 求下列各式的值:

$$(1) \sqrt[3]{1728}; \quad (2) \sqrt[3]{\frac{98}{125}-1}.$$

【解】 (1) 因数 $12^3=1728$, 所以 $\sqrt[3]{1728}=12$.

$$(2) \sqrt[3]{\frac{98}{125}-1}=\sqrt[3]{-\frac{27}{125}}=\sqrt[3]{-\left(\frac{3}{5}\right)^3}=-\frac{3}{5}.$$

方法总结

任何一个数都只有一个立方根, 每个正数或负数的立方根的符号与原数相同. 求立方根同样可以通过乘方运算来得到, 求带分数的立方根必须将其转化为假分数.

例⑦ 用铁皮焊制一个密封的正方体水箱, 使其容积为 1.728 m^3 , 则至少需要多大面积的铁皮?

【分析】 本题考查的是正方体的体积公式及开立方运算, 在运算过程中, 要注意水箱是由 6 块正方形铁皮围成的.

【解】 设水箱的边长为 $x \text{ m}$, 由题意得 $x^3=1.728$, 所以 $x=\sqrt[3]{1.728}=1.2$,

所以所需铁皮的面积为 $1.2^2 \times 6 = 8.64 (\text{m}^2)$.

答: 至少所需铁皮的面积为 8.64 m^2 .

例⑧ (1) 观察下列式子, 并填空:

$$\sqrt[3]{0.002} \approx 0.1260; \quad \sqrt[3]{0.02} \approx 0.2714; \quad \sqrt[3]{0.2} \approx 0.5848; \quad \sqrt[3]{2} \approx 1.260;$$

$$\sqrt[3]{20} \approx 2.714; \quad \sqrt[3]{200} \approx \underline{\hspace{2cm}}; \quad \sqrt[3]{2000} \approx \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) 通过类比, 你能得出什么规律? 用一句话描述出来.



【分析】 本题考查用从特殊到一般的思想探求立方根的规律. 开平方运算中, 被开方数的小数点向左或向右移动 $2n$ 位时, 平方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位. 与之相类比, 在开立方运算中, 被开方数的小数点向左或向右移动 $3n$ 位时, 立方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位, 再通过上面各式验证, 结论是正确的.

【解】 (1) 5.848 12.60

(2) 在开立方运算中, 被开方数的小数点向左或向右移动 $3n$ 位时, 立方根的小数点就相应地向左或向右移动 n 位 (n 为正整数).

考点 3 平方根与立方根的综合

例 9 已知 $x-2$ 的平方根是 ± 2 , $2x+y+7$ 的立方根是 3, 求 x^2+y^2 的平方根.

【分析】 先由平方根、立方根的定义求出 x 和 y 的值, 再求 x^2+y^2 的值.

【解】 因为 $x-2$ 的平方根是 ± 2 , $2x+y+7$ 的立方根是 3,
所以 $x-2=(\pm 2)^2=4$, $2x+y+7=3^3$,
所以 $x=6$, $y=8$, 所以 $x^2+y^2=6^2+8^2=100$,
所以 x^2+y^2 的平方根为 ± 10 , 即 $\pm \sqrt{x^2+y^2}=\pm \sqrt{100}=\pm 10$.

例 10 已知 $\frac{\sqrt{2x+y+|x^2-9|}}{\sqrt{3-x}}=0$, 求 $3x+6y$ 的立方根.

【分析】 本题求关于 x, y 的代数式的立方根, 这里应先确定 x, y 的值, 然后再计算.

【解】 由 $\frac{\sqrt{2x+y+|x^2-9|}}{\sqrt{3-x}}=0$, 得

$$\begin{cases} 2x+y=0, & \text{①} \\ x^2-9=0, & \text{②} \\ 3-x>0, & \text{③} \end{cases}$$

由②③可知 $x=-3$, 将 $x=-3$ 代入①, 得 $y=6$,

所以 $3x+6y=3 \times (-3)+6 \times 6=-9+36=27$,

所以 $3x+6y$ 的立方根是 3.

竞赛对接

例① 已知 m 的平方根是 $a+3$ 及 $2a-15$, 求 m 的值.

【分析】 本题应考虑所给的两个平方根 $a+3$ 与 $2a-15$ 相等或代数和为零的两种情况.

【解】 ①当 $a+3=2a-15$ 时, 可得 $a=18$,
分别代入 $a+3$ 与 $2a-15$ 都得 21, 所以 $m=21^2=441$.

②当 $a+3$ 与 $2a-15$ 互为相反数时,
可得 $a+3+2a-15=0$, 可得 $a=4$, 分别代入 $a+3$ 与 $2a-15$ 可得 ± 7 ,
所以 $m=(\pm 7)^2=49$, 所以 $m=49$ 或 441.

例② 若 $5+\sqrt[3]{11}$ 的小数部分为 a , $5-\sqrt[3]{11}$ 的小数部分为 b . 求 $a+b$ 的值.

【解】 因为 $\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{11} < \sqrt[3]{27}$,

即 $2 < \sqrt[3]{11} < 3$.

所以 $5+\sqrt[3]{11}$ 的整数部分为 $5+2=7$,

小数部分为 $a=5+\sqrt[3]{11}-7=\sqrt[3]{11}-2$;

$5-\sqrt[3]{11}$ 的整数部分为 2,

小数部分 $b=5-\sqrt[3]{11}-2=3-\sqrt[3]{11}$,

所以 $a+b=\sqrt[3]{11}-2+3-\sqrt[3]{11}=1$.

方法总结

一个数可以改写成整数部分与小数部分之和, 我们只要求其整数部分就可知小数部分了.

例③ 求 $(y-x+5) \cdot [(x-y)^2+5(x-y)+25]-125$ 的立方根.

【分析】 将 $y-x$ 看做一个整体, 用立方差公式可以将其化简.

【解】 $(y-x+5) \cdot [(x-y)^2+5(x-y)+25]-125$

$=[(y-x)+5] \cdot [(y-x)^2-5(y-x)+25]-125$

$=(y-x)^3+125-125$

$=(y-x)^3$.



由于 $(y-x)^3$ 的立方根为 $y-x$.

所以 $(y-x+5)[(x-y)^2+5(x-y)+25]-125$ 的立方根为 $y-x$.

小试牛刀

1. $-\sqrt[3]{-216}$ 的立方根是 ()
A. -6 B. ± 3 C. $\sqrt[3]{6}$ D. -3
2. 已知 $3x+16$ 的立方根为 4, 则 $2x+4$ 的平方根为 _____.
3. 计算: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} + \sqrt{64^{-1}} + \sqrt[3]{1-\frac{189}{64}} - \sqrt{1-\frac{31}{256}} - \left| \sqrt[3]{\frac{7}{8}} - 1 + 1 \right|$.
4. 求方程 $\sqrt[3]{a-2} = (1-\sqrt{3-a})^2$ 的整数解.
5. 已知 $a = \frac{\sqrt{b-2} + \sqrt{2-b}}{b+2} + \frac{1}{2}b^3$, 且 $\sqrt{x-y+2} = -2|x+y-6|$, 求 $\sqrt[3]{abxy}$ 的值.
6. 已知 $A = \sqrt[4x-y-3]{x+2}$ 是 $x+2$ 的算术平方根, $B = \sqrt[3x+2y-9]{2-y}$ 是 $2-y$ 的立方根, 试求 $A+B$ 的立方根.
7. 用排水法测得一篮球的体积为 9850 cm^3 , 试求该篮球的直径. (球的体积公式为 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 已知 $\pi \approx 3.14$, 结果保留三个有效数字)
8. 已知一个正方体纸盒的棱长是 6 cm, 另一个正方体纸盒的体积比它大 127 cm^3 , 求这个正方体纸盒的棱长.

第二节 实数的运算

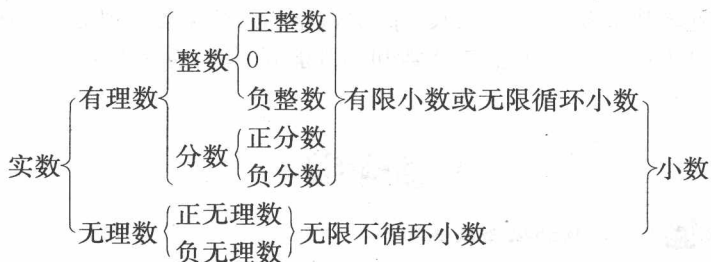
考点对接

1. 实数的概念及分类

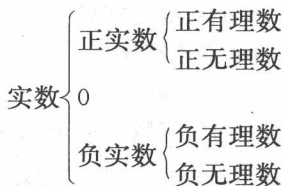
有理数和无理数统称为实数.

实数有两种分类标准:

(1) 按概念分类



(2) 按性质分类



2. 有关概念

相反数: a 与 $-a$ 表示一对相反数.

$$\text{绝对值: } |a| = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

提点: (1) a 与 b 互为相反数 $\Leftrightarrow a + b = 0$.

(2) $|a| \geq 0$.

(3) 互为相反数的两个数的绝对值相等.

3. 实数与数轴的关系

实数与数轴上的点一一对应, 即每一个实数都可以在数轴上找到表示它的点; 反过来, 数轴上每一个点都表示一个实数.

提点: 对于数轴上的任意两个点, 右边的点表示的实数比左边的点表示的实数大.

两个实数的大小关系: 正实数都大于 0, 负实数都小于 0, 正实数大于一切负实数; 两个负实数, 绝对值大的实数反而小.

4. 实数的运算

有理数的运算法则和运算律同样适用于实数, 包括运算顺序. 实数有加、减、乘、除、乘方、开方等运算, 混合运算的顺序是先乘方、开方, 再乘、除, 最后加、减, 同级运算按照从左到右的顺序进行, 有括号的要先算括号里的.



提点:在实数范围内,加、减、乘、除(除数不为零)、乘方五种运算都可以进行,在做开方运算时,要注意正实数和零既能开平方,也能开立方,负实数不能开平方.

思维对接

考点1 实数的概念及性质

例1 下列说法中正确的有 ()

①无理数都是实数;②实数都是无理数;③无限小数都是有理数;④带根号的数一定都是无理数;⑤除了 π 之外不带根号的数都是有理数.

A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【分析】由实数定义可知①是正确的;②错误,因为实数不都是无理数,还有有理数;③也错误,无限不循环小数就是无理数;④错误,如 $\sqrt{4}$ 就是有理数;⑤还是错误的,如 $0.010\ 010\ 001\cdots$ 就是无理数,所以正确的有1个,故选A.

【答案】A

方法总结

此类题一般从定义入手,如本题考查无理数与实数的定义及包含关系;注意带根号的数不一定是无理数.

例2 设 a 是一个无理数,且 a, b 满足 $ab - a - b + 1 = 0$,则 b 是一个 ()

A. 小于0的有理数 B. 大于0的有理数
C. 小于0的无理数 D. 大于0的无理数

【分析】 $ab - a - b + 1 = ab - b - (a - 1) = b(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(b - 1) = 0$, 由于 a 是一个无理数,所以 $a - 1 \neq 0$,故 $b - 1 = 0$,即 $b = 1$. 所以 b 是大于0的有理数.

【答案】B

例3 (2009·台州)如图1-1所示,数轴上表示2, $\sqrt{5}$ 的对应点分别为C和B, C为AB的中点,则点A表示的数是 ()

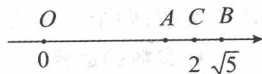


图1-1

A. $-\sqrt{5}$

B. $2-\sqrt{5}$

C. $4-\sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}-2$

【分析】 由于 C 是 AB 的中点, 所以 $AC=CB$. 即 $OB-OC=OC-OA$, $\sqrt{5}-2=2-OA$, $OA=4-\sqrt{5}$, 即 A 点表示的数为 $4-\sqrt{5}$.

【答案】 C

例 4 已知 a, b 是两个任意有理数, 且 $a < b$, 问是否存在无理数 α , 使得 $a < \alpha < b$ 成立?

【解】 因为 $a < b, \sqrt{2}-1 > 0$, 所以 $(\sqrt{2}-1)a < (\sqrt{2}-1)b$.

$$\text{即 } \sqrt{2}a < (\sqrt{2}-1)b + a. \quad ①$$

又因为 $a < b = b + \sqrt{2}b - \sqrt{2}b$, 所以 $a + \sqrt{2}b - b < \sqrt{2}b$,

$$\text{即 } (\sqrt{2}-1)b + a < \sqrt{2}b. \quad ②$$

由 ①② 有 $\sqrt{2}a < (\sqrt{2}-1)b + a < \sqrt{2}b$,

$$\text{所以 } a < \frac{(\sqrt{2}-1)b + a}{\sqrt{2}} < b.$$

$$\text{取 } \alpha = \frac{(\sqrt{2}-1)b + a}{\sqrt{2}} = \frac{2b + \sqrt{2}(a-b)}{2} = b + \frac{(a-b)}{2}\sqrt{2}.$$

因为 $b, \frac{a-b}{2}$ 是有理数, 且 $\frac{a-b}{2} \neq 0$, 所以 $b + \frac{a-b}{2}\sqrt{2}$ 是无理数, 即存在无理数 α , 使得 $a < \alpha < b$ 成立.

例 5 设 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, a, b, c, d 都是有理数, x 是无理数. 求证:

(1) 当 $bc=ad$ 时, y 是有理数;

(2) 当 $bc \neq ad$ 时, y 是无理数.

【证明】 (1) c, d 不能同时为 0, 否则 y 无意义.

若 $c=0, d \neq 0$, 由 $bc=ad$, 得 $a=0$, 此时 $y = \frac{b}{d}$, 为有理数.

若 $c \neq 0, d=0$, 由 $bc=ad$, 得 $b=0$, 此时 $y = \frac{ax}{cx} = \frac{a}{c}$, 为有理数.

若 $c \neq 0, d \neq 0$, 由 $bc=ad$, 得 $a = \frac{bc}{d}$, 代入 y 中, 得

$$y = \frac{\frac{bc}{d}x + b}{cx + d} = \frac{bcx + bd}{cdx + d^2} = \frac{b(cx + d)}{d(cx + d)} = \frac{b}{d}, \text{ 为有理数.}$$

(2) 假设 $bc \neq ad$ 时, y 为有理数, 则 $(cx+d)y = ax+b$,



即 $(cy-a)x + (dy-b) = 0$, 因 $cy-a, dy-b$ 为有理数, x 为无理数, 故有 $cy-a=0, dy-b=0$, 从而 $bc=cdy=(cy)d=ad$. 这与已知条件 $bc \neq ad$ 矛盾, 从而 y 不是有理数, y 一定是无理数.

考点 2**实数的运算**

例 6 (2010 · 眉山) 计算: $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - (\sqrt{5}-2)^0 + \sqrt{18} - (-2)^2 \times \sqrt{2}$.

【解】 原式 $= 3 - 1 + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}$.

例 7 (2009 · 宁夏) 计算: $\sqrt{12} - (-2009)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + |\sqrt{3}-1|$.

【解】 原式 $= 2\sqrt{3} - 1 + 2 + \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3}$.

例 8 已知实数 x, y, z 满足 $|4x-4y+1| + \frac{1}{3}\sqrt{2y+z} + z^2 - 2z + 1 = 0$, 求 $(y+z) \cdot x^2$ 的值.

【分析】 本题条件中只有一个因式, 要确定三个因数的值, 就要联想到非负数, 由非负数的性质知, 三个非负数之和为零, 则每个非负数同时为零. 得到 x, y, z 的方程组, 从而确定 x, y, z 的值.

【解】 由已知可得 $|4x-4y+1| + \frac{1}{3}\sqrt{2y+z} + (z-1)^2 = 0$,

因为 $|4x-4y+1| \geq 0, \sqrt{2y+z} \geq 0, (z-1)^2 \geq 0$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 4x-4y+1=0, \\ 2y+z=0, \\ z-1=0. \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} x=-\frac{3}{4}, \\ y=-\frac{1}{2}, \\ z=1. \end{cases}$$

所以 $(y+z) \cdot x^2 = \left(-\frac{1}{2}+1\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{32}$.

例 9 (1) 已知 $x=2+\sqrt{3}$, 求代数式 $4x^2-16x+5$ 的值.

(2) 已知 x 的实数, 化简 $|2x+1| + |2x-3|$.

【分析】 (1) 直接代入字母的值计算较难, 我们将条件和代数式进行变形, 再利用整体的思想代入求值, 要容易得多.

(2) 绝对值的化简, 关键是对绝对值内的数的正、负性的判断. 此题需要分类讨论.

【解】 (1) $\because x=2+\sqrt{3}, \therefore x-2=\sqrt{3}$.

$$\therefore (x-2)^2 = (\sqrt{3})^2, \text{即 } x^2 - 4x + 4 = 3.$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0.$$

$$\therefore 4x^2 - 16x + 5 = 4(x^2 - 4x) + 5 = -4 + 5 = 1.$$

$$(2) \text{ 令 } 2x+1=0, \text{ 则 } x=-\frac{1}{2};$$

$$\text{令 } 2x-3=0, \text{ 则 } x=\frac{3}{2}.$$

$\therefore$ 整个实数域被分成 $x \leq -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$, $x \geq \frac{3}{2}$ 这样三个部分, 进行分类讨论知:

$$\text{当 } x \leq -\frac{1}{2} \text{ 时, } |2x+1| + |2x-3| = -(2x+1) - (2x-3) = -2x-1-2x+3 = -4x+2;$$

$$\text{当 } -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \text{ 时, } |2x+1| + |2x-3| = (2x+1) - (2x-3) = 2x+1-2x+3 = 4;$$

$$\text{当 } x \geq \frac{3}{2} \text{ 时, } |2x+1| + |2x-3| = 2x+1+2x-3 = 4x-2.$$

方法总结

代数式的化简求值: (1) 是利用恒等变形、“整体代入”思想; (2) 是利用分类讨论的数学思想, 这两种数学思想是中学数学最常用的数学思想方法, 我们要多进行思考与练习, 需熟练掌握. (2) 中分类讨论的方法常称为零点分域讨论法, 则先设绝对值内的数值为零, 确定分界点, 再利用这些点将实数域分成几个部分进行分类讨论, 化简求值.

例 10 化简 $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

【分析】 本题可以将 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 与 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 分别组成一个平方数进行化简; 另外由于 $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ 与 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$ 互为有理化因式, 并且 $(\sqrt{4+2\sqrt{3}})(\sqrt{4-2\sqrt{3}}) = 2$. 因此原式平方后是一个正整数, 我们也可以利用这一特点求解.

【解】 (方法一) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$
 $= \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1}$