

俄罗斯数学  
教材选译

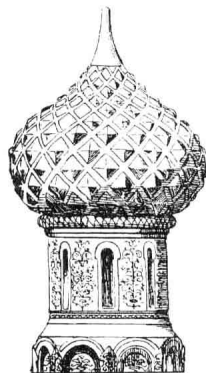
# 微积分学教程

(第三卷) (第8版)

- Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
- 路见可 余家荣 吴亲仁 译
- 郭思旭 校



高等教育出版社  
Higher Education Press



● 数学天元基金资助项目

俄罗斯数学  
教材选译

# 微积分学教程

(第三卷) (第8版)

- Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
- 路见可 余家荣 吴亲仁 译
- 郭思旭 校



高等教育出版社  
Higher Education Press

图字: 01-2005-5742 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и  
интегрального исчисления, том 3

Copyright© FIZMATLIT PUBLISHERS RUSSIA 2003

ISBN 5-9221-0466-7

The Chinese language edition is authorized by FIZMATLIT  
PUBLISHERS RUSSIA for publishing and sales in the People's  
Republic of China

### 图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第3卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥  
尔茨著; 路见可, 余家荣, 吴亲仁译. —2版. —北京:  
高等教育出版社, 2006. 1

ISBN 7-04-018305-6

I. 微... II. ①菲...②路...③余...④吴...

III. 微积分 - 高等学校 - 教材 IV. 0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 152527 号

策划编辑 张小萍      责任编辑 赵天夫      封面设计 王凌波  
责任印制 孔源

---

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	<a href="http://www.hep.edu.cn">http://www.hep.edu.cn</a>
总 机	010-58581000		<a href="http://www.hep.com.cn">http://www.hep.com.cn</a>
		网上订购	<a href="http://www.landaco.com">http://www.landaco.com</a>
			<a href="http://www.landaco.com.cn">http://www.landaco.com.cn</a>
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	<a href="http://www.widedu.com">http://www.widedu.com</a>
印 刷	北京新丰印刷厂		
		版 次	1957年10月第1版
			2006年1月第2版
开 本	787×1092 1/16	印 次	2006年1月第1次印刷
印 张	35	定 价	53.00元
字 数	720 000		

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 18305-00

# 序

---

从上世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到文化大革命前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005年10月

## 编者的话

---

格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作，曾多次再版，并被翻译成多种文字。《教程》包含实际材料之丰富，诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多，在同类教材中尚无出其右者。很多现代著名数学家都提到，正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱，让他们能够第一次清晰地理解这门课程。

从《教程》第一版问世至今已有 50 年，其内容却并未过时，现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用。不仅如此，尽管出现了新的一批优秀教材，但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起，其读者群就一直不断扩大，现在还包括许多数理特长中学（译注：在俄罗斯，除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学，还有以数学与物理学为重点培养方向的中学，其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容，学生则要经过特别的选拔。）的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员。

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因。《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分（不含测度论和一般集合论）。数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授，也（全部或大部分）包括在所有技术和师范院校的教学大纲中。《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用，第二卷研究黎曼积分理论与级数理论，第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换。

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例，正如前文所说，通常这些内容非常有趣，其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的。

另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里·米哈伊洛维奇·菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A. A. 弗洛连斯基

# 目 录

---

<b>第十五章 曲线积分 · 斯蒂尔切斯积分</b> . . . . .	<b>1</b>
§1. 第一型曲线积分 . . . . .	1
543. 第一型曲线积分的定义 (1) 544. 约化为普通定积分 (3) 545. 例 (5)	
§2. 第二型曲线积分 . . . . .	8
546. 第二型曲线积分的定义 (8) 547. 第二型曲线积分的存在与计算 (10) 548. 闭路的情形 · 平面的定向 (12) 549. 例 (14) 550. 用取在折线上的积分的逼近法 (17) 551. 用曲线积分计算面积 (18) 552. 例 (20) 553. 两不同型曲线积分间的联系 (23) 554. 物理问题 (25)	
§3. 曲线积分与道路无关的条件 . . . . .	29
555. 与全微分相关问题的提出 (29) 556. 与道路无关积分的微分法 (30) 557. 用原函数来计算曲线积分 (32) 558. 恰当微分的判别与在矩形区域的情况下原函数的求法 (33) 559. 推广到任意区域的情形 (34) 560. 最终结果 (37) 561. 沿闭路的积分 (37) 562. 非单连通区域或有奇点的情形 (38) 563. 高斯积分 (42) 564. 三维的情形 (44) 565. 例 (46) 566. 物理问题的应用 (50)	
§4. 有界变差函数 . . . . .	52
567. 有界变差函数的定义 (52) 568. 有界变差函数类 (54) 569. 有界变差函数的性质 (56) 570. 有界变差函数的判定法 (59) 571. 连续的有界变差函数 (61) 572. 可求长曲线 (63)	
§5. 斯蒂尔切斯积分 . . . . .	65
573. 斯蒂尔切斯积分的定义 (65) 574. 斯蒂尔切斯积分存在的一般条件 (66) 575. 斯蒂尔切斯积分存在的若干种情况 (67) 576. 斯蒂尔切斯积分的性质 (70) 577.	



分部积分法 (71) 578. 化斯蒂尔切斯积分为黎曼积分 (72) 579. 斯蒂尔切斯积分的计算 (74) 580. 例 (77) 581. 斯蒂尔切斯积分的几何说明 (82) 582. 中值定理, 估计值 (83) 583. 斯蒂尔切斯积分记号下面的极限过程 (85) 584. 例题及补充 (87) 585. 化第二型曲线积分为斯蒂尔切斯积分 (91)

## 第十六章 二重积分 . . . . . 93

### §1. 二重积分的定义及简单性质 . . . . . 93

586. 柱形长条体积的问题 (93) 587. 化二重积分为逐次积分 (94) 588. 二重积分的定义 (96) 589. 二重积分存在的条件 (97) 590. 可积函数类 (98) 591. 下积分及上积分作为极限 (100) 592. 可积函数与二重积分的性质 (101) 593. 积分当作区域的可加函数, 对区域的微分法 (103)

### §2. 二重积分的计算 . . . . . 106

594. 在矩形区域的情况下化二重积分为逐次积分 (106) 595. 例 (109) 596. 在曲边区域的情况下化二重积分为逐次积分 (116) 597. 例 (118) 598. 力学应用 (129) 599. 例 (131)

### §3. 格林公式 . . . . . 137

600. 格林公式的推演 (137) 601. 应用格林公式到曲线积分的研究 (140) 602. 例题及补充 (141)

### §4. 二重积分中的变量变换 . . . . . 143

603. 平面区域的变换 (143) 604. 例 (146) 605. 曲线坐标中面积的表示法 (150) 606. 补充说明 (152) 607. 几何推演 (154) 608. 例 (155) 609. 二重积分中的变量变换 (163) 610. 与单积分的相似处, 在定向区域上的积分 (164) 611. 例 (165)

### §5. 反常二重积分 . . . . . 171

612. 展布在无界区域上的积分 (171) 613. 反常二重积分的绝对收敛性定理 (173) 614. 化二重积分为逐次积分 (175) 615. 无界函数的积分 (177) 616. 反常积分中的变量变换 (178) 617. 例 (179)

## 第十七章 曲面面积 · 曲面积分 . . . . . 193

### §1. 双侧曲面 . . . . . 193

618. 曲面的侧 (193) 619. 例 (194) 620. 曲面和空间的定向 (196) 621. 法线方向余弦公式中符号的选择 (197) 622. 分片光滑曲面的情形 (198)

### §2. 曲面面积 . . . . . 199

623. 施瓦茨的例子 (199) 624. 曲面面积的定义 (201) 625. 附注 (201) 626. 曲面面积的存在及其计算 (203) 627. 用内接多边形的接近法 (207) 628. 面积定义的特殊情况 (208) 629. 例 (209)

### §3. 第一型曲面积分 . . . . . 222

630. 第一型曲面积分的定义 (222) 631. 化为寻常的二重积分 (222) 632. 第一型

曲面积分在力学上的应用 (224) 633. 例 (226)	
§4. 第二型曲面积分 . . . . .	231
634. 第二型曲面积分的定义 (231) 635. 最简单的特殊情形 (233) 636. 一般情形 (235) 637. 证明的细节 (237) 638. 用曲面积分表立体体积 (238) 639. 斯托克斯公式 (241) 640. 例 (243) 641. 斯托克斯公式在研究空间曲线积分上的应用 (248)	
<b>第十八章 三重积分及多重积分 . . . . .</b>	<b>250</b>
§1. 三重积分及其计算 . . . . .	250
642. 立体质量计算的问题 (250) 643. 三重积分及其存在的条件 (251) 644. 可积函数与三重积分的性质 (252) 645. 展布在平行六面体上的三重积分的计算 (254) 646. 在任何区域上的三重积分的计算 (255) 647. 反常三重积分 (257) 648. 例 (257) 649. 力学应用 (263) 650. 例 (264)	
§2. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 . . . . .	271
651. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式 (271) 652. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式应用于曲面积分的研究 (273) 653. 高斯积分 (274) 654. 例 (276)	
§3. 三重积分中的变量变换 . . . . .	279
655. 空间的变换及曲线坐标 (279) 656. 例 (280) 657. 曲线坐标下的体积表示法 (282) 658. 补充说明 (284) 659. 几何推演 (285) 660. 例 (287) 661. 三重积分中的变量变换 (293) 662. 例 (294) 663. 立体的吸引力及在内点上的位势 (298)	
§4. 场论初步 . . . . .	300
664. 纯量及向量 (300) 665. 纯量场及向量场 (301) 666. 梯度 (302) 667. 向量通过曲面的流量 (303) 668. 高斯-奥斯特洛格拉得斯基公式·散度 (305) 669. 向量的环流量·斯托克斯公式·旋度 (305) 670. 特殊的场 (307) 671. 向量分析的逆问题 (310) 672. 应用 (311)	
§5. 多重积分 . . . . .	315
673. 两立体间的引力及位势问题 (315) 674. $n$ 维立体的体积· $n$ 重积分 (317) 675. $n$ 重积分中的变量变换 (318) 676. 例 (321)	
<b>第十九章 傅里叶级数 . . . . .</b>	<b>341</b>
§1. 引言 . . . . .	341
677. 周期量与调和分析 (341) 678. 欧拉-傅里叶确定系数法 (343) 679. 正交函数系 (345) 680. 三角插值法 (349)	
§2. 函数的傅里叶级数展开式 . . . . .	351
681. 问题的提出·狄利克雷积分 (351) 682. 第一基本引理 (353) 683. 局部化定理 (355) 684. 迪尼与利普希茨的傅里叶级数收敛性的判别法 (355) 685. 第二基本引理 (358) 686. 狄利克雷-若尔当判别法 (360) 687. 非周期函数的情形 (361) 688. 任意区间的情形 (362) 689. 只含余弦或正弦的展开式 (363) 690. 例 (366)	

691.  $\ln \Gamma(x)$  的展开式 (378)

§3. 补充 . . . . . 381

692. 系数递减的级数 (381) 693. 三角级数借助于复变函数解析函数的求和法 (386)

694. 例 (388) 695. 傅里叶级数的复数形式 (392) 696. 共轭级数 (395) 697. 多重傅里叶级数 (397)

§4. 傅里叶级数的收敛特性 . . . . . 399

698. 对于基本引理的几点补充 (399) 699. 傅里叶级数一致收敛性的判别法 (401)

700. 傅里叶级数在不连续点附近的性质; 特殊情形 (404) 701. 任意函数的情形 (408)

702. 傅里叶级数的奇异性质·预先的说明 (410) 703. 奇异性质的作法 (412)

§5. 与函数可微分性相关的余项估值 . . . . . 414

704. 函数与其导数的傅里叶系数间之关系 (414) 705. 在有界函数情形时部分和的估值 (415)

706. 函数有  $k$  阶有界导数时余项的估值 (416) 707. 函数有有界变差的  $k$  阶导数的情形 (418)

708. 函数及其导数的不连续性对于傅里叶系数的无穷小阶的影响 (420) 709. 在区间  $[0, \pi]$  上给出函数时的情形 (423)

710. 分离奇异性质法 (425)

§6. 傅里叶积分 . . . . . 432

711. 傅里叶积分作为傅里叶级数的极限情形 (432) 712. 预先的说明 (434) 713. 充分判别法 (435)

714. 基本假设的变形 (437) 715. 傅里叶公式的各种形式 (439) 716. 傅里叶变换 (440)

717. 傅里叶变换的若干性质 (442) 718. 例题与补充 (443) 719. 二元函数的情形 (449)

§7. 应用 . . . . . 450

720. 用行星的平均近点角所作出的它的偏近点角的表示式 (450) 721. 弦振动的问题 (452)

722. 在有限长杆上的热传导问题 (456) 723. 无穷长杆的情形 (459) 724. 边界条件的变形 (461)

725. 在圆盘上的热传导 (462) 726. 实用调和分析·十二个纵坐标的方法 (463)

727. 例 (466) 728. 二十四个纵坐标的方法 (469) 729. 例 (470)

730. 傅里叶系数的近似值与精确值的比较 (471)

**第二十章 傅里叶级数 (续) . . . . . 474**

§1. 傅里叶级数的运算·完全性与封闭性 . . . . . 474

731. 傅里叶级数的逐项积分法 (474) 732. 傅里叶级数的逐项微分法 (476) 733. 三角函数系的完全性 (477)

734. 函数的一致近似法·魏尔斯特拉斯定理 (479) 735. 函数的平均近似法·傅里叶级数的部分和的极值性质 (481)

736. 三角函数系的封闭性·李雅普诺夫定理 (484) 737. 广义封闭性方程 (487) 738. 傅里叶级数的乘法 (489)

739. 封闭性方程的若干应用 (490)

§2. 广义求和法在傅里叶级数上应用 . . . . . 495

740. 基本引理 (495) 741. 傅里叶级数的泊松-阿贝尔求和法 (497) 742. 关于圆的狄利克雷问题的解 (500)

743. 傅里叶级数的切萨罗-费耶求和法 (502) 744. 傅里叶级数广义求和法的若干应用 (504)

745. 傅里叶级数的逐项微分法 (506)

---

§3. 函数的三角展开式的唯一性 . . . . .	507
746. 关于广义导数的辅助命题 (507)	
747. 三角级数的黎曼求和法 (510)	
748. 关于收敛级数的系数的引理 (514)	
749. 三角展开式的唯一性 (515)	
750. 关于傅里叶级数的最后的定理 (516)	
751. 推广 (519)	
<b>附录 极限的一般观点 . . . . .</b>	<b>522</b>
752. 在分析中所遇到的极限的各种类型 (522)	
753. 有序集合 (狭义的) (523)	
754. 有序集合 (广义的) (524)	
755. 有序变量及其极限 (526)	
756. 例题 (527)	
757. 关于函数极限的附注 (529)	
758. 极限理论的推广 (530)	
759. 同序变量 (532)	
760. 借助于参数的排列法 (533)	
761. 化简成整序变量 (534)	
762. 有序变量的上极限与下极限 (536)	
<b>索 引 . . . . .</b>	<b>539</b>
<b>校订后记 . . . . .</b>	<b>545</b>

# 第十五章 曲线积分 · 斯蒂尔切斯积分

## §1. 第一型曲线积分

543. 第一型曲线积分的定义 为了很自然地得出这一新的概念, 我们来考察一个能导出它的力学问题.

设在平面上给定一连续的简单可求长曲线<sup>①</sup>  $(K)^{75}$ (图 1), 在它上面分布有质量, 且在曲线上所有的点  $M$  处其线性密度  $\rho(M)$  为已知, 要求确定整个曲线  $(K)$  的质量  $m$ .

为达此目的, 在曲线端点  $A$  与  $B$  间任意地插入一系列点  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  (为使记号对称, 命  $A_0$  与  $A$  相合,  $A_n$  与  $B$  相合). 为了明确起见, 我们认为这些点是自  $A$  到  $B$  记数的 [参看 246], 但是, 将它们以相反的方向记数也可以.

在曲线的弧  $A_i A_{i+1}$  上任取一点  $M_i$ , 算出这一点处的密度  $\rho(M_i)$ . 近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的, 并以  $\sigma_i$  表弧  $A_i A_{i+1}$  的长, 对这一弧的质量  $m_i$  我们将有近似表示式

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

<sup>①</sup>为确定, 仅限于非闭的曲线.(以下用带圆圈数字标出的是作者注解.)

<sup>75</sup>简单曲线与可求长曲线的概念是在 245~247 目中引入和讨论的.(以下用带括号的数字标出的是 2003 年俄文版的编者注解.)

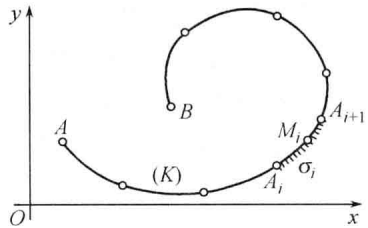


图 1

而对整个所求的质量, 将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \sigma_i.$$

这一式子的误差与上面所作的近似假定是有关的; 如所有小段的长  $\sigma_i$  趋近于零时, 这误差也将趋近于零. 因此, 如以  $\lambda$  表长  $\sigma_i$  中最大的一个, 只要取极限就得到准确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i) \sigma_i.$$

现在开始一般地来研究这一类型的极限. 丢开上面的问题不谈, 取一任意“点函数”  $f(M) = f(x, y)$ , 它是在一连续的可求长平面曲线 ( $K$ ) 上给出的,<sup>①</sup> 并重复上述手续: 分曲线 ( $K$ ) 为许多弧元  $A_i A_{i+1}$ <sup>76)</sup>, 在它们上面任取点  $M_i(\xi_i, \eta_i)$ , 计算出在这些点处的值  $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ , 并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \sigma_i;$$

它也代表一定类型的“积分和”.

类似的过程可以应用于闭曲线的情形, 只要取其上任意一点为点  $A_0(A_n)$ , 而其余的点则根据曲线的某一方向排列 [246].

当  $\lambda = \max \sigma_i$  趋近于零时, 如这一积分和有一确定的有限极限  $I$ , 既与曲线 ( $K$ ) 细分的方法无关, 又与小段  $A_i A_{i+1}$  上点  $M_i$  的选择无关, 则这一极限称作函数  $f(M) = f(x, y)$  沿曲线或道路 ( $K$ ) 上所取的 (第一型)<sup>②</sup> 曲线积分, 并以记号

$$I = \int_{(K)} f(M) ds = \int_{(K)} f(x, y) ds \quad (1)$$

来表示 (其中  $s$  是曲线的弧长,  $ds$  就象征长度元  $\sigma_i$ ). 极限过程的精确说明留给读者.

因此, 上面所得曲线质量的式子可重写为:

$$m = \int_{(K)} \rho(M) ds. \quad (2)$$

<sup>①</sup>这里假定某一直角坐标系取作基础.

<sup>②</sup>以示与下面 [546] 所讨论的第二型曲线积分不同.

<sup>76)</sup>“分为许多弧元”的手续, 对于由参数形式  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  给出的无论是简单闭曲线, 还是自身相交的闭曲线, 今后都将经常施行. 如果分点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  对应于参数  $t$  的严格递增或严格递减序列  $t_0, t_1, \dots, t_n$  (换句话说, 按照曲线 ( $K$ ) 所选取的方向编号), 且分点  $A_0$  与  $A_n$  与曲线 ( $K$ ) 的端点重合, 我们就都说, 点  $A_0, A_1, \dots, A_n$  分割 (参数表示的) 曲线 ( $K$ ) 为弧元 (或者说“曲线分解成简单部分”).

特别注意, 给道路 ( $K$ ) 所加的方向在所介绍的定义中不起任何作用. 例如, 若这一曲线不是闭的, 且以  $(AB)$  及  $(BA)$  作为不同方向的曲线, 则

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

类似地, 我们可以引导散布在空间曲线( $K$ )上的积分概念:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y, z)ds. \textcircled{1}$$

由于没有什么新的原则性东西, 没有必要在这里详谈.

**544. 约化为普通定积分** 假定在曲线 ( $K$ ) 上任意取定一方向 (两个可能方向之一), 曲线上点  $M$  的位置可由从一点  $A$  量起的弧长  $s = \widehat{AM}$  来确定. 那么曲线 ( $K$ ) 可表为参数方程的形状:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq S),$$

而在曲线上给出的函数  $f(x, y)$  便化成变量  $s$  的复合函数  $f(x(s), y(s))$ .

对应于在  $AB$  弧上所选取的分点  $A_i$ , 其弧的值如表为  $s_i (i = 0, 1, \dots, n)$ , 则显然  $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$ . 以  $\bar{s}_i$  表定点  $M_i$  的  $s$  值 (而且显然,  $s_i \leq \bar{s}_i \leq s_{i+1}$ ), 可以看到曲线积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和, 所以立刻有:

$$\int_{(K)} f(M)ds = (R) \int_0^S f(x(s), y(s))ds, \textcircled{2} \quad (3)$$

且这两积分中只要有一个存在, 另一个就也存在.

当然, 这种直接由第一型曲线积分约化为普通的积分会降低它的理论价值, 但在方法上的价值它仍全部保存着.

我们以后将假定函数  $f(M)$  是连续的,<sup>③</sup> 显然在这种情形下积分是存在的.

令设一曲线 ( $K$ ) 由任意的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq T)$$

<sup>①</sup>某一直角坐标系将取作基础. 函数  $f$  仅在曲线 ( $K$ ) 的点处有定义.

<sup>②</sup>符号 (R) 表示, 积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分.

<sup>③</sup>我们是指在曲线 ( $K$ ) 上的点处连续, 也就是指沿着曲线连续. 用“ $\epsilon - \delta$ ”的说法, 这就是说: 对  $\epsilon > 0$  能找到这样的  $\delta > 0$ , 使当  $\overline{MM'} < \delta$  时就有  $|f(M') - f(M)| < \epsilon$  ( $M$  及  $M'$  是曲线上的点). 在这一假定下, 复合函数  $f(x(s), y(s))$  由于  $x(s)$  及  $y(s)$  是连续的缘故, 也同样是  $s$  的连续函数.

所给出, 其中函数  $\varphi$  及  $\psi$  与它们的导数  $\varphi'$  及  $\psi'$  都连续; 此外, 假定曲线上无重点. 那么曲线就是可求长的, 且若弧  $s = \widehat{AM} = s(t)$  的增加对应于参数  $t$  的增加, 则

$$s'_t = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[248,(10)]. 在 (3) 的右端的积分中换变量, 立刻得到:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (4)$$

因此, 在计算第一型曲线积分时, 在积分号下的函数中, 变量  $x$  及  $y$  应该用坐标的参数表示式来代替, 至于因子  $ds$ , 应该把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替. 特别指出, 定积分 (4) 的下限必须小于上限.

在曲线以显方程

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

给出时, 公式 (4) 的形状是:

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad (5)$$

这一关系式也可有另一形式. 在函数  $y(x)$  与它的导数  $y'(x)$  连续的假定下, 曲线  $(K)$  在每一点处都有一不平行于  $y$  轴的确切切线. 以  $\alpha$  表切线与  $x$  轴的夹角, 我们得到:

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad |\cos \alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

故

$$\int_{(K)} f(M) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx. \quad (6)$$

如用  $S$  表示整个曲线  $(AB)$  的长, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特别地有

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (7)$$

附注 公式 (7) 是经形式的变换得来的. 如果我们定义曲线弧长为外切(不是内接)折线周长的极限, 则这一定义——在曲线以显式给出时——立即可得出公式 (7). 读者不妨自己来证实这一点.



545. 例 1) 若  $(K)$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  在第一象限内的部分, 计算积分  $I = \int_{(K)} xy ds$ .  
解 (a) 我们有

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}},$$

所以由公式 (5),

$$I = \int_0^a x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

$$= \frac{b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2} \cdot x dx.$$

进行积分, 得:

$$I = \frac{-b}{2a^2(a^2 - b^2)} \cdot \frac{2}{3} [a^4 - (a^2 - b^2)x^2]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

应该注意, 上面做的计算事实上还要有所说明才行, 因为当  $x = a$  时切线斜率变为无穷大, 下一解法就没有这一缺点.

(6) 如变到椭圆的参数表示  $x = a \cos t, y = b \sin t$ , 故

$$x'_t = -a \sin t, \quad y'_t = b \cos t, \quad \sqrt{x'^2_t + y'^2_t} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

则可按公式 (4) 来进行计算:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{1 - \cos 2t}{2} + b^2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2}} dt.$$

这里令  $\cos 2t = z$ , 则  $\sin 2t dt = -\frac{1}{2} dz$ , 且

$$I' = \frac{ab}{4} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z} dz$$

$$= \frac{ab}{4} \cdot \frac{2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{2}{3} \left[ \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 - a^2}{2} z \right]^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 = \frac{ab}{3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}.$$

2) 计算积分  $I = \int_{(K)} y ds$ , 其中  $(K)$  是抛物线  $y^2 = 2px$  上自坐标原点到点  $(x_0, y_0)$  的一段.

解 由曲线的方程, 我们有  $yy' = p$ , 所以

$$y ds = y \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + y^2 y'^2} dx = \sqrt{p^2 + 2px} dx,$$

且

$$I = \int_0^{x_0} \sqrt{p^2 + 2px} dx = \frac{1}{3p} [(p^2 + y_0^2)^{\frac{3}{2}} - p^3].$$