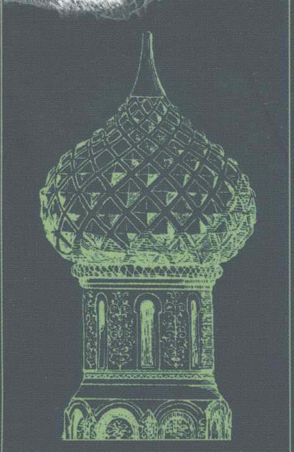


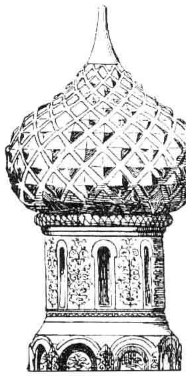
俄罗斯数学
教材选译

微积分学教程

(第三卷) (第8版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
□ 路见可 余家荣 吴亲仁 译
□ 郭思旭 校

高等教育出版社
Higher Education Press



俄罗斯数学
教材选译

● 数学天元基金资助项目

微积分学教程

(第三卷)(第8版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
□ 路见可 余家荣 吴亲仁 译
□ 郭思旭 校

高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2005–5742 号

Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 3

ISBN 5–9221–0466–7

图书在版编目 (CIP) 数据

微积分学教程. 第3卷: 第8版 / (俄罗斯) 菲赫金哥尔茨著; 路见可, 余家荣, 吴亲仁译. —2版. —北京: 高等教育出版社, 2006. 1

ISBN 7–04–018305–6

I.微… II.①菲…②路…③余…④吴…
III.微积分 – 高等学校 – 教材 IV.0172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2005) 第 152527 号

策划编辑 张小萍 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波
责任印制 孔 源

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 – 58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 – 810 – 0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010 – 58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京新丰印刷厂		
		版 次	1957 年 10 月第 1 版
开 本	787 × 1092 1/16		2006 年 1 月第 2 版
印 张	35	印 次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字 数	720 000	定 价	53.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 18305–00

序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

编者的话

格里戈里 · 米哈伊洛维奇 · 菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》是一部卓越的科学与教育著作, 曾多次再版, 并被翻译成多种文字.《教程》包含实际材料之丰富, 诸多一般定理在几何学、代数学、力学、物理学和技术领域的各种应用之众多, 在同类教材中尚无出其右者. 很多现代著名数学家都提到, 正是 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》使他们在大学时代培养起了对数学分析的兴趣和热爱, 让他们能够第一次清晰地理解这门课程.

从《教程》第一版问世至今已有 50 年, 其内容却并未过时, 现在仍被综合大学以及技术和师范院校的学生像以前那样作为数学分析和高等数学的基本教材之一使用. 不仅如此, 尽管出现了新的一批优秀教材, 但自 Г. М. 菲赫金哥尔茨的《教程》问世起, 其读者群就一直不断扩大, 现在还包括许多数理特长中学 (译注: 在俄罗斯, 除了类似中国的以外语、音乐为特长的中学, 还有以数学与物理学为重点培养方向的中学, 其教学大纲包括更多更深的数学与物理学内容, 学生则要经过特别的选拔.) 的学生和参加工程师数学进修培训课程的学员.

《教程》所独有的一些特点是其需求量大的原因.《教程》所包括的主要理论内容是在 20 世纪初最后形成的现代数学分析的经典部分 (不含测度论和一般集合论). 数学分析的这一部分在综合大学的一、二年级讲授, 也 (全部或大部分) 包括在所有技术和师范院校的教学大纲中.《教程》第一卷包括实变一元与多元微分学及其基本应用, 第二卷研究黎曼积分理论与级数理论, 第三卷研究多重积分、曲线积分、曲面积分、斯蒂尔吉斯积分、傅里叶级数与傅里叶变换.

《教程》的主要特点之一是含有大量例题与应用实例, 正如前文所说, 通常这些内容非常有趣, 其中的一部分在其他俄文文献中是根本没有的.

另外一个重要特点是材料的叙述通俗、详细和准确. 尽管《教程》的篇幅巨大, 但这并不妨碍对本书的掌握. 恰恰相反, 这使作者有可能把足够多的注意力放在新定义的论证和问题的提法, 基本定理的详尽而细致的证明, 以及能使读者更容易理解本课程的其他方面上. 每个教师都知道, 同时做到叙述的清晰性和严格性一般是很困难的 (后者的欠缺将导致数学事实的扭曲). 格里戈里 · 米哈伊洛维奇 · 菲赫金哥尔茨的非凡的教学才能使他在整个《教程》中给出了解决上述问题的大量实例, 这与其他一些因素一起, 使《教程》成为初登讲台的教师的不可替代的范例和高等数学教学法专家们的研究对象.

《教程》还有一个特点是极少使用集合论的任何内容 (包括记号), 同时保持了叙述的全部严格性. 整体上, 就像 50 年前那样, 这个方法使很大一部分读者更容易初步掌握本课程.

在我们向读者推出的 Г. М. 菲赫金哥尔茨的新版《教程》中, 改正了在前几版中发现的一些印刷错误. 此外, 新版在读者可能产生某些不便的地方增补了 (为数不多的) 一些简短的注释, 例如, 当作者所使用的术语或说法与现在最通用的表述有所不同时, 就会给出注释. 新版的编辑对注释的内容承担全部责任.

编者对 Б. М. 马卡罗夫教授表示深深的谢意, 他阅读了所有注释的内容并提出了很多有价值的意见. 还要感谢国立圣彼得堡大学数学力学系数学分析教研室的所有工作人员, 他们与本文作者一起讨论了与《教程》前几版的内容和新版的设想有关的各种问题.

编辑部预先感谢所有那些希望通过自己的意见来协助进一步提高出版质量的读者.

A.A.弗洛连斯基

目　录

第十五章　曲线积分 · 斯蒂尔切斯积分

§1. 第一型曲线积分

543. 第一型曲线积分的定义　为了很自然地得出这一新的概念, 我们来考察一个能导出它的力学问题.

设在平面上给定一连续的简单可求长曲线① (K)[75](图 1), 在它上面分布有质量, 且在曲线上所有的点 M 处其线性密度$\rho(M)$ 为已知, 要求确定整个曲线(K) 的质量m.

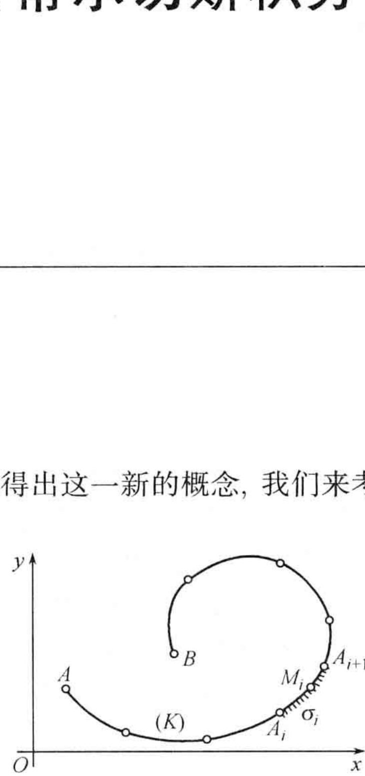


图 1

为达此目的, 在曲线端点 A 与 B 间任意地插入一列点 $A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$(为使记号对称, 命 A_0 与 A 相合, A_n 与 B 相合). 为了明确起见, 我们认为这些点是自 A 到 B 记数的 [参看 **246**], 但是, 将它们以相反的方向记数也可以.

在曲线的弧 A_iA_{i+1} 上任取一点 M_i, 算出这一点处的密度 $\rho(M_i)$. 近似地认为在这一小段弧上所有点处的密度都是这样的, 并以 σ_i 表弧 A_iA_{i+1} 的长, 对这一弧的质量 m_i 我们将有近似表示式

$$m_i \doteq \rho(M_i)\sigma_i,$$

① 为确定, 仅限于非闭的曲线.(以下用带圆圈数字标出的是作者注解.)

[75] 简单曲线与可求长曲线的概念是在 **245~247** 目中引入和讨论的.(以下用带括号的数字标出的是 2003 年俄文版的编者注解.)

而对整个所求的质量, 将有近似式子

$$m \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

这一式子的误差与上面所作的近似假定是有关的; 如所有小段的长 σ_i 趋近于零时, 这误差也将趋近于零. 因此, 如以 λ 表长 σ_i 中最大的一个, 只要取极限就得到准确的公式:

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(M_i)\sigma_i.$$

现在开始一般地来研究这一类型的极限. 丢开上面的问题不谈, 取一任意 "点函数" $f(M) = f(x, y)$, 它是在一连续的可求长平面曲线 (K) 上给出的,① 并重复上述手续: 分曲线 (K) 为许多弧元 A_iA_{i+1}[76), 在它们上面任取点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$, 计算出在这些点处的值 $f(M_i) = f(\xi_i, \eta_i)$, 并作和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\sigma_i;$$

它也代表一定类型的 "积分和".

类似的过程可以应用于闭曲线的情形, 只要取其上任意一点为点 $A_0(A_n)$, 而其余的点则根据曲线的某一方向排列 [**246**].

当 $\lambda = \max\sigma_i$ 趋近于零时, 如这一积分和有一确定的有限极限 I, 既与曲线 (K) 细分的方法无关, 又与小段 A_iA_{i+1} 上点 M_i 的选择无关, 则这一极限称作函数 $f(M) = f(x, y)$ 沿曲线或道路 (K) 上所取的 **(第一型)② 曲线积分**, 并以记号

$$I = \int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y)ds \tag{1}$$

来表示 (其中 s 是曲线的弧长, ds 就象征长度元 σ_i). 极限过程的精确说明留给读者.

因此, 上面所得曲线质量的式子可重写为:

$$m = \int_{(K)} \rho(M)ds. \tag{2}$$

①这里假定某一直角坐标系取作基础.

②以示与下面 [**546**] 所讨论的第二型曲线积分不同.

[76) "分为许多弧元" 的手续, 对于由参数形式 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 给出的无论是简单闭曲线, 还是自身相交的闭曲线, 今后都将经常施行. 如果分点 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 对应于参数 t 的严格递增或严格递减序列 $t_0, t_1, \cdots, t_n$(换句话说, 按照曲线 (K) 所选取的方向编号), 且分点 A_0 与 A_n 与曲线 (K) 的端点重合, 我们就都说, 点 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 分割 (参数表示的) 曲线 (K) 为弧元 (或者说 "曲线分解成简单部分").

特别注意, 给道路 (K) 所加的方向在所介绍的定义中不起任何作用. 例如, 若这一曲线不是闭的, 且以 (AB) 及 (BA) 作为不同方向的曲线, 则

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds.$$

类似地, 我们可以引导散布在**空间曲线**(K)**上的积分**概念:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{(K)} f(x, y, z)ds.$$①

由于没有什么新的原则性东西, 没有必要在这里详谈.

544. 约化为普通定积分 假定在曲线 (K) 上任意取定一方向 (两个可能方向之一), 曲线上点 M 的位置可由从一点 A 量起的弧长 $s = \overset{\frown}{AM}$ 来确定. 那么曲线 (K) 可表为参数方程的形状:

$$x = x(s), \quad y = y(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant S),$$

而在曲线上给出的函数 $f(x, y)$ 便化成变量 s 的复合函数 $f(x(s), y(s))$.

对应于在 AB 弧上所选取的分点 A_i, 其弧的值如表为 $s_i (i = 0, 1, \cdots, n)$, 则显然 $\sigma_i = s_{i+1} - s_i = \Delta s_i$. 以 $\bar{s}_i$ 表定点 M_i 的 s 值 (而且显然, $s_i \leqslant \bar{s}_i \leqslant s_{i+1}$), 可以看到曲线积分的积分和

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(M_i)\sigma_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i))\Delta s_i$$

同时也是普通定积分的积分和, 所以立刻有:

$$\int_{(K)} f(M)ds = (\mathrm{R}) \int_0^s f(x(s), y(s))ds, \tag{3}$$②

且这两积分中只要有一个存在, 另一个就也存在.

当然, 这种直接由第一型曲线积分约化为普通的积分会降低了它的理论价值, 但在方法上的价值它仍全部保存着.

我们以后将假定函数 $f(M)$ 是连续的,③ 显然在这种情形下积分是存在的.

令设一曲线 (K) 由任意的参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant T)$$

---

①某一直角坐标系将取作基础. 函数 f 仅在曲线 (K) 的点处有定义.

②符号 (R) 表示, 积分这里是了解为通常黎曼定义下的积分.

③我们是指在曲线 (K) 上的点处连续, 也就是指沿着曲线连续. 用 "$\varepsilon - \delta$" 的说法, 这就是说: 对 $\varepsilon > 0$ 能找到这样的 $\delta > 0$, 使当 $\overline{MM'} < \delta$ 时就有 $|f(M') - f(M)| < \varepsilon$($M$ 及 M' 是曲线上的点). 在这一假定下, 复合函数 $f(x(s), y(s))$ 由于 $x(s)$ 及 $y(s)$ 是连续的缘故, 也同样是 s 的连续函数.

所给出, 其中函数 φ 及 ψ 与它们的导数 φ' 及 ψ' 都连续; 此外, 假定曲线上无重点. 那么曲线就是可求长的, 且若弧$s = \widehat{AM} = s(t)$的增加对应于参数 t 的增加, 则

$$s'_t = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$$

[**248**,(10)]. 在 (3) 的右端的积分中换变量, 立刻得到:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{t_0}^{T} f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt. \tag{4}$$

因此, 在计算第一型曲线积分时, 在积分号下的函数中, 变量 x 及 y 应该用坐标的参数表示式来代替, 至于因子 ds, 应该把弧当作参数的函数而用这函数的微分来代替.特别指出, 定积分 (4) 的下限必须小于上限.

在曲线以显方程

$$y = y(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

给出时, 公式 (4) 的形状是:

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx. \tag{5}$$

这一关系式也可有另一形式. 在函数 $y(x)$ 与它的导数 $y'(x)$ 连续的假定下, 曲线 (K) 在每一点处都有一不平行于 y 轴的确定切线. 以 α 表切线与 x 轴的夹角, 我们得到:

$$\mathrm{tg}\alpha = y'(x), \quad |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}.$$

故

$$\int_{(K)} f(M)ds = \int_{a}^{b} \frac{f(x, y(x))}{|\cos\alpha|}dx. \tag{6}$$

如用 S 表示整个曲线 (AB) 的长, 因为显然

$$\int_{(K)} ds = S,$$

所以特别地有

$$S = \int_{a}^{b} \frac{dx}{|\cos\alpha|}. \tag{7}$$

附注 公式 (7) 是经形式的变换得来的. 如果我们定义曲线弧长为外切(不是内接) 折线周长的极限, 则这一定义 —— 在曲线以显式给出时 —— 立即可得出公式 (7). 读者不妨自己来证实这一点.

545. 例 1) 若 (K) 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限内的部分, 计算积分 $I=\int_{(K)} xyds$.

解 (a) 我们有

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad y'=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}},$$
$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}},$$

所以由公式 (5),

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx\\&=\frac{b}{a^2}\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\cdot xdx.\end{aligned}$$

进行积分, 得:

$$I=\frac{-b}{2a^2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

应该注意, 上面做的计算事实上还要有所说明才行, 因为当 $x=a$ 时切线斜率变为无穷大. 下一解法就没有这一缺点.

(б) 如变到椭圆的参数表示 $x=a\cos t, y=b\sin t$, 故

$$x_t'=-a\sin t,\quad y_t'=b\cos t,\ \sqrt{x_t'^2+y_t'^2}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}.$$

则可按公式 (4) 来进行计算:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}dt\\&=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\cdot\sqrt{a^2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}}dt.\end{aligned}$$

这里令 $\cos 2t=z$, 则 $\sin 2tdt=-\frac{1}{2}dz$, 且

$$\begin{aligned}I'&=\frac{ab}{4}\int_{-1}^1\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z}dz\\&=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}z\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^1=\frac{ab}{3}\cdot\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.\end{aligned}$$

2) 计算积分 $I=\int_{(K)} yds$, 其中 (K) 是抛物线 $y^2=2px$ 上自坐标原点到点 (x_0,y_0) 的一段.

解 由曲线的方程, 我们有 $yy'=p$, 所以

$$yds=y\sqrt{1+y'^2}dx=\sqrt{y^2+y^2y'^2}dx=\sqrt{p^2+2px}dx,$$

且

$$I=\int_0^{x_0}\sqrt{p^2+2px}dx=\frac{1}{3p}[(p^2+y_0^2)^{\frac{3}{2}}-p^3].$$