

龙门品牌  学子至爱

# LongMen

# 龙门 考题

# 三角函数

## 高中数学

主 编 傅荣强  
本册主编 朱 岩



龍門書局

[www.Longmenbooks.com](http://www.Longmenbooks.com)

## 高中数学

A-1 函数	A-7 平面向量
A-2 立体几何	A-8 数列
A-3 解析几何	A-9 不等式
A-4 算法	A-10 微积分
A-5 统计与概率	A-11 难点解读
A-6 三角函数	A-12 计数原理-随机变量

## 高中化学

C-1 金属及其化合物	C-5 有机化学基础
C-2 非金属及其化合物	C-6 化学实验
C-3 物质结构与性质	C-7 化学计算
C-4 化学反应原理	

## 高中英语

E-1 听力训练	E-4 完形填空
E-2 单项填空	E-5 阅读理解
E-3 语法	E-6 书面表达

## 高中历史

G-1 政治发展史	G-3 文化科技发展史
G-2 经济发展史	G-4 改革与人物

## 高中生物

I-1 分子与细胞	I-3 稳态与环境
I-2 遗传与进化	I-4 生物实验与探究

## 思想方法

J-1 高中数学思想方法	J-3 高中化学思想方法
J-2 高中物理思想方法	

## 高中物理

B-1 高中力学(一)	B-5 高中热学
B-2 高中力学(二)	B-6 振动波
B-3 高中电学(一)	B-7 动量 原子物理
B-4 高中电学(二)	

## 高中语文

D-1 语文基础知识	D-4 文言文阅读
D-2 语言表达与运用	D-5 古代诗歌与名句名篇
D-3 现代文阅读	D-6 写作

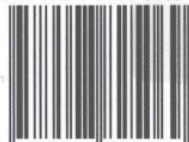
## 高中政治

F-1 经济生活	F-3 文化生活
F-2 政治生活	F-4 生活与哲学

## 高中地理

H-1 自然地理	H-3 区域地理
H-2 人文地理	H-4 地理选修综合

ISBN 978-7-5088-2506-9



9 787508 825069 >

定价：16.00元

# 三角函数



## 高中数学

主 编:傅荣强

本册主编:朱 岩

编 者:王志武 冯 丽 刘志新  
赵志华 王德海 王海军  
王庆福 王洪伟 高朋生  
赵运华 陈执宇 宋玉杰  
刘学武 时 敏 华桂凤  
王永艳 于国涛 何秀丽  
宋福华 周 萍

龍 門 書 局

北 京

**版权所有 侵权必究**

举报电话:(010)64030229;(010)64034315;13501151303

邮购电话:(010)64034160

**图书在版编目(CIP)数据**

龙门专题:新课标.高中数学.三角函数/傅荣强主编;  
朱岩本册主编. —北京:龙门书局,2010.7

ISBN 978-7-5088-2506-9

I. ①龙… II. ①傅…②朱… III. ①数学课—高中—教  
学参考资料 IV. ①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第142253号

责任编辑:马建丽 赵瑞云 刘婷/封面设计:耕者

**龙 门 书 局 出 版**

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

www.longmenbooks.com

**大厂书文印刷有限公司印刷**

科学出版社总发行 各地书店经销

\*

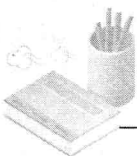
2010年7月第一版 开本:A5(890×1240)

2010年7月第一次印刷 印张:8 1/4

字数:295 000

**定 价: 16.00 元**

(如有印装质量问题,我社负责调换)



未名湖畔，博雅塔旁。

明媚的晨光穿透枝叶，懒散地泻落在林间小道上，花儿睁开惺忪的眼睛，欣喜地迎接薄薄的雾霭，最兴奋的是小鸟，扇动翅膀在蔚蓝的天空中叽叽喳喳地欢唱起来了。微风轻轻拂动，垂柳摇曳，舒展优美的身姿，湖面荡起阵阵涟漪，博雅塔随着柔波轻快地翩翩起舞。林间传来琅琅的读书声，那是晨读的学子；湖畔小径上不断有人跑过，那是晨练的学子；椅子上，台阶上，三三两两静静地坐着，那是求索知识的学子……

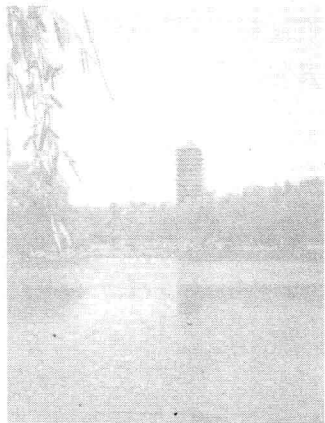
在北大，每个早晨都是这样的；在清华，每个早晨也是这样的；在复旦，在交大，在南大，在武大……其实，在每一所高校里，早晨都是一幅青春洋溢、积极进取的景象！

在过去几年时间里，我一直在组织北大、清华的高考状元、奥赛金牌得主，还有其他优秀的学子到全国各地巡回演讲。揭开他们“状元”的光环，他们跟我们是那么的相似，同样的普通与平凡。

是什么成就了他们的“状元”梦想？

在来来往往带他们巡讲的路上，在闲来无事的聚会聊天过程中，我越来越发现，他们每个人都是一道亮丽独特的风景，都有一段奋斗不息、积极进取的历程，他们的成功，是偶然中的必然。

小朱，一个很认真、很可爱的女孩子，高中之前家庭条件十分优越，但学习一直平平；在她上高中前，家庭突遭变故，负债累累，用她妈妈的话说，“家里什么都没有了，一切只能靠你自己了”。她说自己只有高考一条路，只有考好了，才能为家里排忧解难。我曾经在台下听她讲自己刻苦学习的经历：“你们有谁在大



年三十的晚上还学习到深夜三点？你们又有谁发烧烧到 39 度以上还在病床上看书？……”那一年，她以总分 684 分成为了浙江省文科高考状元。

陆文，一个出自父母离异的单亲家庭的女孩，她说她努力学习的动力就是想让妈妈高兴，因为从小她就发现，每次她成绩考得很好，妈妈就会很高兴。为了给妈妈买一套宽敞明亮的房子，她选择了出国这条路，考托福，考 GRE，最后如愿以偿，被芝加哥大学以每年 6.4 万美金的全额奖学金录取为生物方向的研究生。

齐伟，湖南省高考第七名，清华大学计算机学院的研究生，被全球最大的软件公司 MICROSOFT 聘为项目经理；霖秋，北京大学数学学院的小妹，在坚持不懈地努力中完成了自身最重要的一次涅槃，昨天的她在未名湖上游弋，今天的她已在千里之外的西雅图……

还有很多优秀的学子，他们也都有自己的故事，酸甜苦辣，很真实，很精彩。我有幸跟他们朝夕相处，默默观察，用心感受，他们的自信，他们的执着，他们的勤奋刻苦，尤其是他们的“学而得其法”所透露出来的睿智更让人拍案叫绝，他们人人都有一套行之有效的学习方法，花同样的时间和精力他们可以更加快速高效。我一直在想：如果当年我也知道他们的这些方法，或许我也能考上清华或北大吧？

多年以来，我一直觉得我们的高考把简单的事情搞复杂了，学生们浪费了大量的时间和精力却收效甚微；多年以来，我们也一直在研究如何将一套优良的学习方法内化到图书中，让同学们在不知不觉

中轻松、快速地获取高分。这就是出版《龙门专题》的原因了。

一本好书可以改变一个人的命运！名校，是每一个学子悠远的梦想和真实的渴望。

《龙门专题》走向名校的阶梯！

总策划 《龙门专题》策划组

2010 年 8 月







# 编委会

主 编：傅荣强

编委会成员：傅荣强 方立波 于长军

张晓红 李健全 佟志军

朱 岩 张书祥 张 硕

牛鑫哲 周 萍 郭 杰

王学春 高 鹤 石铁明

石兴涛 史景辉 高 波

张文刚 李 琴 王新岩

杨开学 陈俊亮 张文刚

李 琴 王新岩 杨开学

陈俊亮



# Contents

## 目录

基础篇 .....	( 1 )
第一讲 三角函数 .....	( 2 )
1.1 任意角和弧度制 .....	( 2 )
1.2 任意角的三角函数 .....	( 14 )
1.3 同角三角函数的基本关系 .....	( 25 )
1.4 三角函数的诱导公式 .....	( 40 )
1.5 已知三角函数值求角 .....	( 49 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 56 )
本讲测试题 .....	( 61 )
第二讲 三角函数的图象与性质 .....	( 72 )
2.1 三角函数的图象与性质 .....	( 72 )
2.2 函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象 .....	( 102 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 117 )
本讲测试题 .....	( 123 )
第三讲 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 .....	( 134 )
3.1 两角和与差的正弦、余弦和正切公式 .....	( 134 )
3.2 二倍角的三角函数 .....	( 151 )
3.3 回顾三角函数的解题技巧 .....	( 168 )
3.4 解斜三角形 .....	( 184 )
高考热点题型评析与探索 .....	( 206 )
本讲测试题 .....	( 212 )
综合应用篇 .....	( 223 )
三角函数的理论应用 .....	( 223 )
一、三角函数在代数中的应用 .....	( 223 )

二、三角函数在立体几何中的应用 .....	(234)
三、三角函数在解析几何中的应用 .....	(236)
三角函数的实际应用 .....	(240)
一、以直角三角形为模型的问题 .....	(240)
二、以直角三角形、斜三角形为模型的问题 .....	(245)
三、以斜三角形为模型的问题 .....	(246)
四、以函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 为模型的问题 .....	(248)
综合应用训练题 .....	(250)



# 基础篇

数学是研究现实世界空间形式和数量关系的学科,简单地说是研究“数”和“形”的学科.三角函数是初等数学的一个分支.

三角函数的本质是研究任意角的集合与一个比值的集合的变量之间的对应关系.

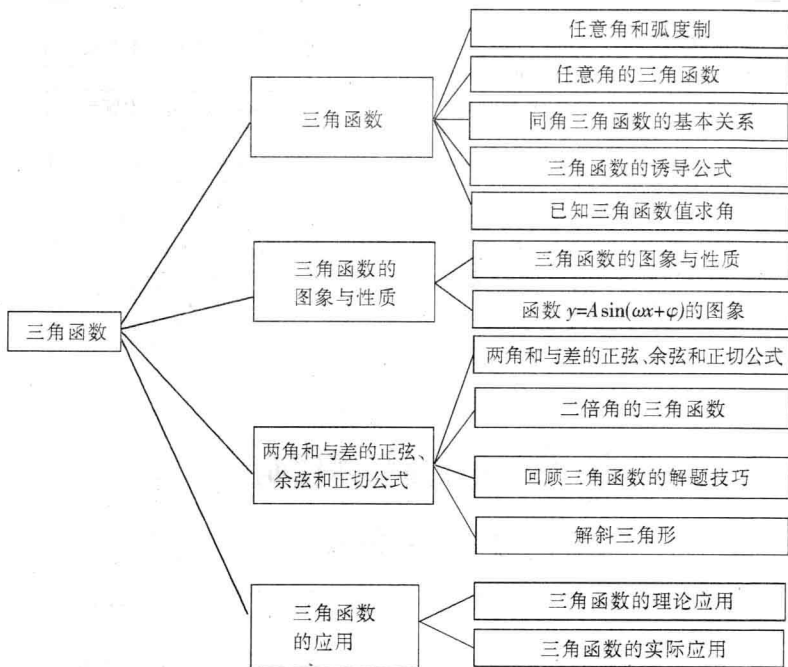
三角函数研究的主要问题是:

(1)以六个三角函数为知识载体,研究“同角不同名,同名不同角,不同名不同角”的三角函数的运算规律,集中地体现在三角函数公式上.

(2)通过三角函数的解析式、图象,研究三角函数的性质.

三角函数的个性,其显著标志是周期性、有界性.

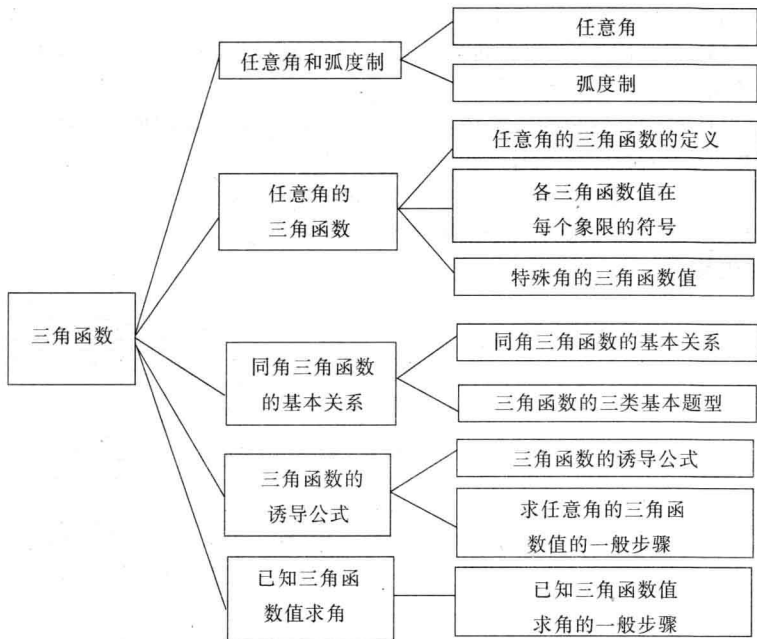
## 本书知识框图





# 第一讲 三角函数

## 本讲知识框图



## 1.1 任意角和弧度制

### 重点难点归纳

**重点** ①终边相同的角的集合的表示形式. ②轴线角和象限角的集合的表示形式. ③度数与弧度数的换算  $\pi=180^\circ$ .

**难点** ①对“弧度”和“弧度制”的理解. ②对用“度”表示的角的集合与实数集  $\mathbf{R}$  之间的一一对应关系的理解.

**本节需掌握的知识点** ①终边相同的角的集合的表示形式. ②度数与弧度数的换算  $\pi=180^\circ$ .



## 知识点精析与应用



### 知识点精析

#### 思考——问题提出

##### 问题 1

今天是星期一,再过几天又是星期一?

##### 问题 2

你每长一岁,需要多长时间?

##### 问题 3

你的手表慢了,你应该怎样把它校准?快了,又应该如何将它校准?

#### 探究——抽象概括

问题 1、问题 2、问题 3 都是周而复始问题,一般称之为周期问题.

周期现象是自然界中一类基本的现象,周期函数是刻画周期现象的函数模型,三角函数是最基本、最重要的周期函数.

讨论周期函数,从角的周期性开始.

#### 1. 任意角

##### (1)任意角的形成

角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的.射线的端点叫做角的顶点,旋转开始时的射线叫做角的始边,终止时的射线叫做角的终边.

##### (2)正角、负角和零角

按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角.按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角.当射线没有作任何旋转时,形成的角叫做零角.

##### (3)象限角

角的顶点与坐标原点重合,角的始边与  $x$  轴的非负半轴重合,角的终边落在第几象限,就称这个角为第几象限的角.角的终边在坐标轴上,就认为这个角不属于任何象限.

##### (4)终边相同的角

所有与  $\alpha$  角终边相同的角,连同  $\alpha$  角在内(而且只有这样的角)可以用式子  $k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}$  来表示,它们互称终边相同的角.与  $\alpha$  角终边相同的角的集合可记为  $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$ .

##### (5)轴线角

角的终边在坐标轴上的角称为轴线角.

#### 2. 弧度制

##### (1)1 弧度的角

等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角.

##### (2)角的弧度数的顺序性

正角的弧度数为正数,负角的弧度数为负数,零角的弧度数为零.

##### (3)公式 $|\alpha| = \frac{l}{R}$

角  $\alpha$  的弧度数的绝对值  $|\alpha|$ 、角  $\alpha$  所对的圆弧的长  $l$ 、圆的半径  $R$  的关系是



$$|\alpha| = \frac{l}{R}.$$

#### (4) 度数与弧度数的换算

$$180^\circ = \pi \text{ 弧度}.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} \approx 0.01745 \text{ 弧度}; 1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$



### 解题方法指导

最初接触任意角和弧度制,要弄清以下三个问题:

(1) 角的集合的表示形式不是唯一的. 如, 终边在  $y$  轴的非正半轴上的角的集合可用

$$\text{如下两种形式来表示: } \left\{x \mid x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}, \left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}.$$

(2) 讨论三角函数问题, 在同一个式子中两种制度(角度制, 弧度制)不能混用. 如, 与  $30^\circ$  角终边相同的角的集合不能表示为  $\{x \mid x = 2k\pi + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$ , 正确的表示方法是

$$\left\{x \mid x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}\right\}, \text{ 或 } \{x \mid x = k \cdot 360^\circ + 30^\circ, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) 公式  $|\alpha| = \frac{l}{R}$  中, 左边是  $\alpha$  的绝对值, 不要误用为“ $\alpha = \frac{l}{R}$ ”,  $\alpha$  的单位是弧度而不是度.

关于任意角和弧度制, 主要题型有以下四类: ①角的概念; ②确定终边位于指定区间的一切角; ③度数与弧度数的互化; ④公式  $|\alpha| = \frac{l}{R}$  的应用.

#### 1. 角的概念

**[例 1]** 在平面直角坐标系中画出下列各角, 并指出每个角的正负以及它所在的象限.

(1)  $120^\circ$ ;

(2)  $-30^\circ$ ;

(3)  $-240^\circ$ .

**解** (1)  $120^\circ$  的角如图 1-1 所示, 它是正角, 是第二象限的角.

(2)  $-30^\circ$  的角如图 1-1 所示, 它是负角, 是第四象限的角.

(3)  $-240^\circ$  的角如图 1-1 所示, 它是负角, 是第二象限的角.

**点评** 本例中,  $120^\circ$  的角的终边与  $-240^\circ$  的角的终边是相同的, 这说明终边相同的角不一定相等.

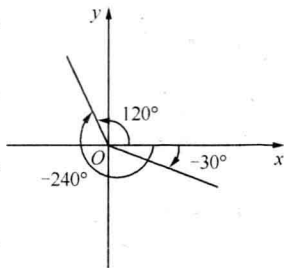


图 1-1





[例2] 下列结论是否正确?

- (1) 第二象限的角大于第一象限的角;
- (2) 第一象限的角都是正角;
- (3) 锐角都是第一象限的角;
- (4) 相等的角终边相同, 终边相同的角不一定相等.

解 (1) 错. 反例,  $91^\circ$  的角是第二象限的角,  $361^\circ$  的角是第一象限的角,  $91^\circ < 361^\circ$ .

(2) 错. 反例,  $-271^\circ$  的角是第一象限的角, 它不是正角.

(3) 正确. 对锐角  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 它的终边都在第一象限.

(4) 正确. 例如,  $\alpha = \beta$ , 角  $\alpha, \beta$  的终边相同;  $1^\circ, 361^\circ$  的角, 它们的终边相同, 但  $1^\circ \neq 361^\circ$ .

点评 学习本题, 能澄清一些模糊概念.

[例3] 写出下列角的集合.

- (1) 终边落在  $x$  轴的非负半轴上的角;
- (2) 终边落在  $x$  轴的非正半轴上的角;
- (3) 终边落在  $x$  轴上的角;
- (4) 终边落在  $y$  轴的非负半轴上的角;
- (5) 终边落在  $y$  轴的非正半轴上的角;
- (6) 终边落在  $y$  轴上的角;
- (7) 终边落在坐标轴上的角.

解 (1) 在  $0^\circ \sim 360^\circ$  内, 终边落在  $x$  轴的非负半轴上的角是  $0^\circ$  的角, 与它终边相同的角, 连同它本身, 可以表示为

$$x = k \cdot 360^\circ + 0^\circ, k \in \mathbf{Z}.$$

所以, 终边落在  $x$  轴的非负半轴上的角的集合为

$$S_1 = \{x \mid x = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z}\},$$

还可以表示为

$$S_1 = \{x \mid x = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(2) 仿第(1)小题, 终边落在  $x$  轴的非正半轴上的角的集合为

$$S_2 = \{x \mid x = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) 设终边落在  $x$  轴上的角的集合为  $S_3$ .

$S_3$  是  $S_1$  与  $S_2$  的并集, 即

$$S_3 = S_1 \cup S_2.$$

$S_1$  中,  $x$  是  $\pi$  的偶数倍,  $S_2$  中,  $x$  是  $\pi$  的奇数倍,

所以,  $S_3$  中,  $x$  是  $\pi$  的整数倍,

所以

$$S_3 = \{x \mid x = n\pi, n \in \mathbf{Z}\}.$$



解 填写如下:

角度	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$
弧度	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
角度	$180^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$270^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$360^\circ$	
弧度	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	

#### 4. 公式 $|\alpha| = \frac{l}{R}$ 的应用

**【例6】** 已知扇形的周长为 20cm, 弧长为  $l$ . 问扇形的圆心角  $\alpha$  为何值时扇形的面积  $S$  最大, 并求出  $S$  的最大值.

**分析** 本题可先运用扇形的面积公式  $S = \frac{1}{2}lR$  及  $l$  与  $R$  的关系式, 写出  $S$  用  $R$  表示的式子, 然后就式子讨论  $S$  的最大值以及这时的  $\alpha$  的值.

**解** 设扇形的半径为  $R$ cm.

依题意, 有

$$l = 20 - 2R, S = \frac{1}{2}lR.$$

由上面的两个式子, 得

$$S = \frac{1}{2}(20 - 2R)R,$$

即  $S = -(R - 5)^2 + 25$ . 这时  $R$  是自变量,  $S$  是  $R$  的二次函数

由上式知, 当  $R = 5$ cm 时,  $S$  有最大值  $25\text{cm}^2$ , 此时  $l = 10$ cm,  $|\alpha| = \frac{l}{R} = \frac{10}{5} = 2, \alpha = \pm 2$ (负值舍).

综上, 当  $\alpha = 2$  时, 扇形的面积  $S$  最大, 且最大值为  $25\text{cm}^2$ .

**【例7】** 一个圆锥的侧面的面积是  $1\text{cm}^2$ , 它的底面周长是  $2\text{cm}$ , 求它的侧面展开图的圆心角的弧度数和弦长.

**解** 圆锥的侧面展开图是扇形, 设扇形的半径为  $r$ , 圆心角为  $\alpha$ , 弦长为  $|AB|$ . 由已知条件, 得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\alpha r^2 = 1, \\ \alpha r = 2, \end{cases}$$